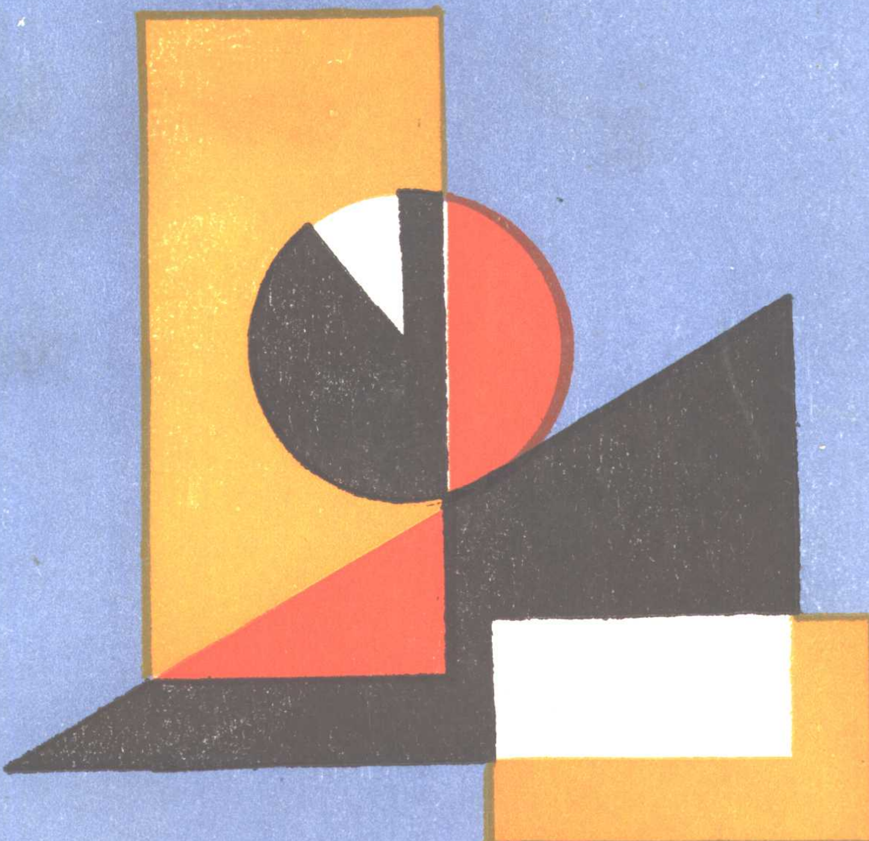
武汉出版社



学·超黄金分割

徐先国　阮泰桢　编著

数学趣·黄金分割

徐先国　阮泰桢　编著

武汉出版社

数学·超黄金分割

SHUXUE CHAOHUANGJINFENGGE

徐先国　阮泰桢　编著

*

武汉出版社出版发行

（武汉市江岸区三眼桥一村附100号）

湖北省新华书店经销

武汉大学出版社印刷总厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：4.375 字数：85千字

1988年6月第1版　1988年6月第1次印刷

印数1—5000册　　定价：1.15元

ISBN7—5430—0057—1/N·1

内 容 提 要

《数学·超黄金分割》是一部介绍现代数学及在科技方面应用的科学普及读物。内容有模糊数学、数理逻辑、超黄金分割、系统工程学、正交试验等方面的知识，并对其产生、发展和运用作了由浅入深、简明扼要的说明。它能帮助读者对数学这门十分重要的基础学科与当代高科技之间的关系，作初浅、概括的了解和激发对数学学习的兴趣。本书列举出的若干数学概念，都作了通俗易懂的解释。对历史上数学家的事迹和贡献，用故事的形式作了适当地介绍。全书文字朴素，饶有兴味，是初中文化程度以上的学生、职工、农民及干部难得的科普读物。

前 言

数学和音乐是人类的两种伟大精神产品，它们都是用简单的阿拉伯数字和若干符号造就一个无限的、奇妙的世界。音乐家运用的是：或雄浑、或低沉、或优美、或悲壮的旋律，震撼着人们的心灵；数学家则是靠非凡的直觉和天赋，用已占有的材料构成基本的假说或公理，并从此开始逻辑的推演，直到最后一个环节，为人类打开了一个通往崭新世界的大门，催人奋发，促人进取。

数学是一个自成体系的知识领域，它伴随着人类的诞生而诞生，每一个人从小就开始接触数学，因此，如何认识数学和学好数学是人人都十分关注的问题。

我们奉献给读者的这本《数学·超黄金分割》，是一本以介绍现代数学及其在现代科学技术方面应用的通俗易懂的科普读物，它对当代数学中的若干数学分支，作了由浅入深，简明扼要的介绍。对各数学分支中涉及的许多深奥的数学概念，都尽量作了通俗浅显的解释，同时对历史上作过重要贡献的数学家的生平、事迹和趣事，也作了恰如其分的介绍。

本书中提出的“超黄金分割”，是对“黄金分割法”在当今科技上应用的拓广。从二十世纪七十年代以来，由于电子电器工业的迅猛发展，原有的黄金分割法中确定的分割点，在实际应用中，有些进行了适当的调整。比如，目前在市场上通常

见到的一种多功能收录机，一般呈狭长形，长和宽之差越来越大，这样才便于电路的有效设计和安装；家用电冰箱的高度在向上伸长，这样才能减少占地面积和充分利用室内空间。0.618的分割点，在这里暂时失去了它的光彩。人们对黄金分割点所作的这种适当调整，从事这些行业的科技人员，一般地称为“超黄金分割法”。因此，读者诸君在见到超黄金分割时，不要把它看作是数学领域中的某一个严谨的概念，将它理解为实际工作者的一种俗语更切实际。

数学作为自然科学中一门基础学科，范围之广，内容之深奥，是任何一门其他学科无法比拟的。由于作者学识与水平有限，缺点与不当之处在所难免，希望读者诸君不吝赐教。

编者

1988年2月1日

目　录

一、现代数学的基础

一位大学生走进财经大学宏伟壮观的图书馆内的借阅大厅，在他填好要借的书目的分类号码B·124—10后，管理人员很快就把他要借阅的书——《集合》——送到了他的手中。人们不禁要问，管理人员为什么有这么大的神通，能一下子从上百万册的藏书中找到这本《集合》呢？其实这并不使人感到大惊小怪。因为管理人员事先已经把所有的图书分门别类地、井井有条地放在书架上。比如B代表数学类图书，124代表书架上的编号，10代表《集合》这本书在数学学科类中的编号数。于是，只要按照书的分类号码，管理人员就很快地从书架上找出你所需要的书来，并在现代化传递系统的帮助下，把书送到你的手中。从这里我们可以看出，把同类事物进行有目的汇集是多么重要！象这样分门别类地把一些事物汇集在一起的事例到处可见。例如百货商店把服装、鞋子、帽子、文具……，分别设立专柜，便于顾客选购；仓库里各种货物分类堆放，便于提存；在数学中把所有相同的研究对象（数，形，方程……）汇集在一起，便于研究。把一些确定的事物汇集在一起，就构成一个"集合"。

"集合论"是现代数学的基础。现代数学中，人们把集合论的观点贯串到一切数学学科中，即使是在中小学的数学课本中，也引入了集合论的概念和语言。

十九世纪初，法国著名数学家哥西，创造性地用极限理论把微积分中的定理严格地加以系统化的证明，使得牛顿和莱布尼兹发现的微积分有了坚实的理论基础。可是哥西在证明极限理论的一个基本定理中，是借助几何的直觉进行证明的，这个证明方法给人一种十分不满意的感觉。后来，狄德金深入进行了研究，发现这个证明要涉及到实数的性质问题，从而建立起严格的实数理论。德国的大数学家康托，把研究的对象加以扩大，抽象成为我们所说的“集合论”。

什么是“集合”呢？通俗地讲，我们把要研究的对象组织在一起，形成一个整体，这个组织在一起具有某一特性的事物整体，就称为集合。这里所指的对象可以是人类，也可以是英文字母，甚至是动物，如猫、狗之类等等。一般地，集合是用英文大写字母A、B、C……表示，而组成集合的每一个对象，我们称之为元素，是用小写字母a、b、c、……x、y…表示。

表示集合的方法通常有下面两种：

（1）列举法：这种方法是把集合中的所有元素列举出来写在一个大括号内，并且用逗点把所有元素一一分开。例如全体自然数构成的集合N，可记为：$N=\{1, 2, 3, \cdots n, \cdots\}$。在一个集合中，若有相同的元素，我们规定相同的元素只算一个，例如：组成$book$一字的字母的集合A，记为：$A=\{b, o, k\}$

（2）描述法：这种方法是把集合的一个代表性元素或者特征写在大括号内，在这个元素后面写符号“|”（或“：”）并在“|”之后写出这个元素所具有的特性。例如，圆心在原点的单位圆上所有点所构成的集合L，可表示为：

$$L=\{(x, y) | x^2+y^2=1, x, y \in R\}$$

集合论中最主要和最原始的概念是“属于”。若元素x在

集合A中，则称元素x属于集合A，记作$x\in A$；若元素x不在集合A中，则称x不属于A，记作$x\notin A$。设全体自然数组成的集合为N，则$10\in N$，$-10\notin N$。当我们谈到某集合A时，总认为存在一个准则，它可以判定任何一个元素是否属于A。例如：我们不能讨论“拳击手和牛的力量差不多的人”这个集合，因为这个标准不够明确，这需要用到模糊数学中模糊集合的概念，因此我们这里所讲的集合都是指在精确数学中的通常集合。在通常（经典）集合论中承认“排中律”，即对任何集合A，任何一个元素x，$x\in A$或$x\notin A$只能二者必居其一。

集合论的应用是相当广泛的，中学课本引入集合理论后，我们可以把方程、不等式的解，写成一个集合，叫做解集合。

如把方程$x^2-5x+6=0$所有根组成的集合，记为 $B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$

同时，我们也把满足某一条件的平面图形的点，叫做点的集合。例如把抛物线$y^2=x$上的所有点（x，y）组成一个集合，记为$S=\{(x,y)|y^2=x\}$

我们所见到的集合中，可以包含一些特定的元素，也可以不包含任何一个元素。因此，把不包含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$。例如方程$\begin{cases}2x-3y=2\\4x-6y=10\end{cases}$是没有实数解的。于是我们把这个方程组的解记为$\varnothing$；

即$\varnothing=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{l}2x-3y=2\\4x-6x=10\end{array}\right\}$

在学习和了解通常的集合时，一定要熟知和理解集合论中的两个公理：

（1）外延公理：若两个集合A、B具有相同的元素，则这两个集合称为相等的，用$A=B$表示。

（2）规定公理：对任何一个集合A及规定A中元素x，具有某些性质的每一个条件$S(x)$，总存在集合B

$$B=\{x|x\in A,\ S(x)\}$$

上述几个例子都成功地应用了规定公理。

根据集合的定义，我们还可以考虑集合的集合，即以集合为元素的集合，例如某工厂的每个车间是由工人组成的集合，而全厂又是由每一个车间构成的集合，也就是由集合为元素的集合。

我们给集合也赋于运算规则，它的运算类似于数的运算一样，有大于，相等和加，减，乘，只不过我们称这样的运算为包含、相等和并、交、减的运算。

对于两个集合A与B，如果集合A的每个元素都是集合B的元素，即若$x\in A$，必有$x\in B$，则称集合A被集合B包含，或称集合A为集合B的子集，记为$A\subseteq B$（见图1-1）

若A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，就叫集合A是集合B的真子集，记为$A\subset B$，同时我们规定空集$\varnothing$是任何集合的子集。

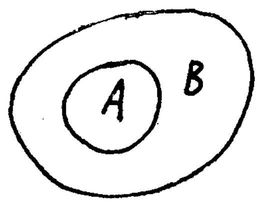


图1—1

若$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，根据外延公理，可知$A=B$

把集合A和集合B的所有元素合并在一起，这样组成一个新的集合C，称C为A与B的并集，记作$C=A\cup B=\{x|x\in A$或$x\in B\}$（见图1—2，1—3），“$\cup$”叫做集的并运算。

也可记作　$C=A+B$

显然　　$A+A=A$

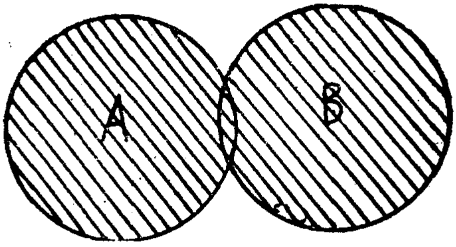


图 1-2

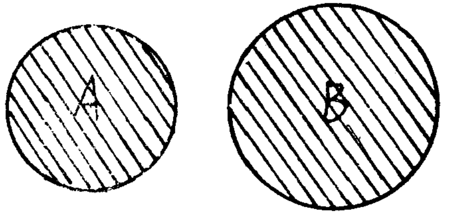


图1-3

把集合A和集合B的所有公共元素组成一个新的集合D，称D为A与B的交集，记作

$D=A\cap B=\{x\mid x\in A$同时$x\in B\}$（见图1—4），"$\cap$"叫做集的交运算。

也可记作　$D=A\cdot B=AB$

显然　$A=A\cdot A$

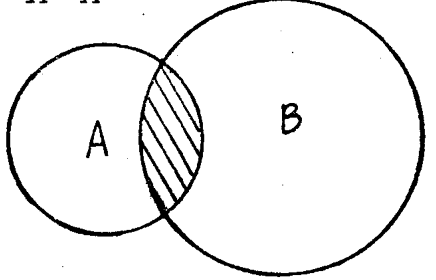


图1-4

把所有属于A而不属于B的元素组成一个新的集合E，把E看作是A与B的差（或差集），或A减B，记作

$E = A - B = \{x \mid x \in A$但$x \notin B\}$（见图1—5），“$-$”叫做集的差运算。

集合中的并、交，差运算虽然类似于数的加、乘、减运算，但也有很多不同之处，例如前面所述的$A + A = A$和$A \cdot A = A$，这就和平时数的运算大不相同。假若我们把集合A看作是一个集合，并用1加以表示，那么就有$1 + 1 = 1$的结论，这在普通数的运算中，是根本不可能出现的。

在研究集合时，往往首先要限定是什么样的范围内进行，这样的范围叫做全集，记为I，也就是说，全集包含了我们所要研究的各个集合的全部元素。若$A \subseteq I$，则$I - A$叫做关于I的补集，记为$\overline{A}$。显然有：

$$A \cup \overline{A} = I \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$$

由于康托的集合论解决了数学基础的问题，所以在1900年巴黎国际数学会议上，法国大数学家庞加莱宣称：“数学的严格性，看来直到今天才可说是实现了。”可见当时，数学界对集合论的产生，评价是何等的高啊！但是，仅隔两年时间，于1902年突然传来了又一惊人的消息：集合论的概念本身出现矛盾。这就是英国唯心主义哲学家、数学家罗素出的悖论，也称“罗素悖论”。什么叫悖论呢？所谓悖论，就是指这样的一个命题A，由A出发，可以推出一个命题B，但从这个命题B却会出现如下自相矛盾的结论：若B是真，则推出的B是假；若B是假又会推出B是真。古代就有不少悖论，相传古代印度有一个残酷的暴君，为了不准别人进入他占领的土地，他订下一条法规：“进来者若讲真话就要杀头；若讲假话就要淹死。”并要求守卫的士兵严格地执行上述法令。这样无

论是讲真话还是假话，都只有死路一条。这时，有一个极其聪明的农夫大摇大摆地闯进了暴君的领地，当守卫的士兵斥问他时，他巧妙地说：“我是来被淹死的。”士兵对这句话就无法判别它的真假，不好执行暴君的法令。我们设想，若农夫这句话是真的，则按法令就要执行国王的规定，把他杀头。而淹死后杀头就没有意义；若农夫这句话是假的，则按法令就要把他淹死，淹死后这句就变成了真话。所以兵士对这个聪明的农夫束手无策。

罗素提出的悖论是：宇宙是不存在的！他设U是一切事物所成的集合，U是宇宙。但这个U本身又是事物，故有$U\in U$，这是不可理解的。因为，一个集合与组成这个集合的元素是有本质的区别．也就是说：这个所谓包罗一切的宇宙U是不能存在的，若存在这个U就会引出矛盾。上述的这种论证是极为肤浅但却是十分通俗的，它的缺点是不严格。

下面我们再用集合的理论来证明罗素的悖论：

令$U=\{A|A\notin A\}$，也就是说U是由所有不属于自身的那些集合所组成的集合。由规定公理知：U是存在的。现在要问：集合U是否属于它自身呢？

若假定：$U\in U$，则因为U的任何一个元素A都有$A\notin A$，所以，若U是U的一个元素，也应有$U\notin U$，于是产生了矛盾。反之若假定：$U\notin U$，则U满足集合U所规定的条件，故应有$U\in U$，也产生了矛盾。

现在我们来解答为什么古代相传的其他悖论对数学界没有什么影响，而罗素悖论却对整个数学界产生极大的震动呢？这是因为罗素的悖论涉及到集合论中最基本的一个概念“集合”。按照规定公理可知“任何确定的条件都可以决定一个集合”。但罗素悖论发现这条原则会导致矛盾。这不能不大大地动摇了

集合论的基石，同时也动摇了整个数学的基础。所以，一般也称这是第三次数学危机。著名的数学家韦尔甚至说：“数学的最后基础和终极意义的问题仍旧没有解决，我们不知道沿着哪一个方向去寻找最后的解答，甚至也不知道我们是否能够希望找到一个最后的客观的回答。”数学界为了消除上述的矛盾现象提出了各种不同的解决方案，罗素本人也主张把数学还原为逻辑，并在这个方面做了大量的工作。但最后他发现无穷公理和选择公理不能还原为逻辑而宣告失败。英国数学家布劳沃主张在一定程度上限制排中律，这样就可以避免出现罗素的悖论。但是希尔伯特反对这样做，他认为“禁止数学家使用排中律，等于不许天文学家使用天文望远镜，不许拳击家使用拳头”。他提出形式化的解决方案，从1902年到今天，差不多快90年了，数学界对此还未能提出一个完善的解决方案。

下面我们利用集合论的有关知识导出有关有限集合内元素个数的计算公式：

记集合A的元素个数是$M(A)=n$

集合B的元素个数是$M(B)=m$

即属于A又属于B的元素的个数$M(A\cdot B)=k$

从图（1—6）可以看出，或者属于A或者属于B的元素的个数是

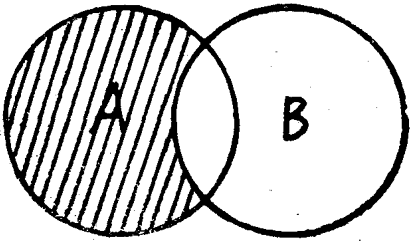


图1-5

$$M(A\cup B)=M(A)+M(B)-M(A\cdot B)=n+m-k$$

同样地有：

$$M(A\cup B\cup C)=M(A)+M(B)+M(C)-M(AB)-M(AC)-M(BC)+M(ABC)$$

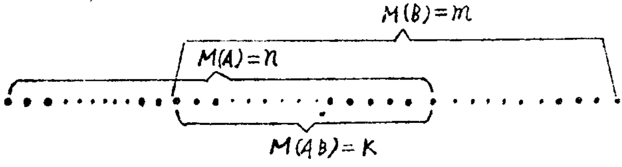


图 1—6

用图（1—6）的图形和以上公式去解决集合里的元素的个数方法，一般称温氏图解法。

集合论的应用十分广泛。例如审判员要从四个嫌疑犯中找出一个真正的罪犯，他已知真正罪犯只有一个，而且这些嫌疑犯在回答问题时，要么完全讲真话，要么完全讲假话，现在四个嫌疑犯的供词如下：

甲：“乙不是罪犯，丁才是罪犯。”

乙：“我不是罪犯，丙才是罪犯。”

丙：“我不是罪犯，乙才是罪犯。”

丁：“乙不是罪犯，甲才是罪犯。”

审判员就可以利用逻辑运算或事件运算的公式，把一个事件看成一个集合加以解决。

一个事件的发生或不发生，相当于属于或不属于相应的集合。必然事件相当于整个空间U，不可能事件相当于∅集，这样，事件的运算相当于集合的运算。

用$A=\{甲\}$　　$\overline{A}=\{不是甲\}$

$B=\{乙\}$　　$\overline{B}=\{不是乙\}$

$C=\{丙\}$　　$\overline{C}=\{不是丙\}$

$D=\{丁\}$　　$\overline{D}=\{不是丁\}$

对于甲说的"乙不是罪犯，丁才是罪犯"，若完全是真话，则可表示为$\overline{B}\cdot D$；若完全是假话，则可表示为$B\cdot\overline{D}$。

因为他要么讲真话，要么讲假话，故上式必有其中之一能成立，即$\overline{B}D\cup B\overline{D}=U$，U是整个空间，在概率上表示必然事件。

同样地有：$\overline{B}C\cup B\overline{C}=U$

$$\overline{C}B\cup C\overline{B}=U$$

$$\overline{B}A\cup B\overline{A}=U$$

故$(\overline{B}D\cup B\overline{D})(\overline{B}C\cup B\overline{C})(\overline{C}B\cup C\overline{B})(\overline{B}A\cup B\overline{A})=U$

从而　$(\overline{B}D\cup B\overline{D})(\overline{B}C\cup B\overline{C})(\overline{B}A\cup B\overline{A})=U$

从左到右展开得：

$$(\overline{B}D\,\overline{B}C\cup B\overline{D}\,\overline{B}C\cup \overline{B}DB\overline{C}\cup B\overline{D}\,B\overline{C})\,(\overline{B}A\cup B\overline{A})=U$$

因为只有一个真正罪犯，故$\overline{B}D\overline{B}C=\varnothing$　$B\overline{D}\,\overline{B}C=\varnothing$　$\overline{B}DB\overline{C}=\varnothing$ 因此　$B\overline{D}\,\overline{C}(\overline{B}A\cup B\overline{A})=U$

$$B\overline{D}\,\overline{C}\,\overline{B}A\cup B\overline{D}\,\overline{C}B\overline{A}=U$$

$$\therefore\quad B\overline{D}\,\overline{C}\,\overline{A}=U$$

即乙是罪犯。

集合论渗透在数学各学科中，它对现代数学的日益发展和应用起着不可估量的影响。集合已经成为现代数学的最基础概念。集合论的观点不仅使数学的基础变得严密可靠，而且应用极其广泛；不仅成为纯粹数学的基本理论，而且成了边缘数学、综合数学的桥梁和工具。