中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

彈性力學

М. М. ФИЛОНЕНКО—БОРОДИЧ 著

朱廣才　馬士修譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

彈性力學

費洛甯軻—鮑羅第契著
朱廣才 馬士修譯

商務印書館

本書係根據蘇聯科技出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的費洛寧輌—鮑羅第契(М. М. Филоненко—Бородич)所著“彈性力學”(Теория упругости）1947年第三版增訂版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校教科書。

本書由北京工業學院朱廣才、馬士修譯。

彈　性　力　學

朱廣才　馬士修譯

★版權所有★

商　務　印　書　館　出　版

上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司　總經售

奎　記　印　刷　所　印　刷

（61944）

1953年11月初版　版面字數280,000

印數1—10,000　定價¥14,500

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號

前　　言

在翻譯這本彈性力學時，譯者對於 напряжения 和 сдвиг 兩個字的譯法很感困難；採用原有的「應力」和「應變」兩個名詞，是否妥當？我們有些懷疑。理由是：

1．當初有人把 stress 和 strain 譯作「應力」和「應變」。現在「應變」趨於被放棄，人們多認為「應變」的應字不妥而改用「形變」了。於是在這一對名詞中只剩下「應力」。然而「應力」的應字是否妥當？亦是我們應該考慮的。

2．「應」字可作兩解。若作「反應」解，那就是把「彈性力」叫作「反應力」。不甚妥當，並且旣不合乎俄文名詞的意思，亦不合乎英文、法文和德文名詞的意思。

3．如果把「應」字當作「對應」解，則需要明瞭與什麼對應。這個只能說是與「力」——作用於物體的「外力」——對應，因為力學所論的就是力。所以，按照這種解釋，「應力」這個名詞，拉長一些，就是「對應於外力的內力」。然而我們知道，在物體不受外力作用時，它的裏面亦能有 напряжения (stress, tension, spannung) 存在：經過了某一些製造過程的物體，其內部就是如此（當然一般說來這個問題是不能不予以考慮的）。再說俄文名詞和英文、法文、德文名詞都未含有「對應」的意思。

4．至於 сдвиг，若譯作「剪變」，「剪」字不能恰當地、明確地、表示 сдвиг 的含意，而且與「剪」字對應的俄國字並非 сдвиг 。

5．俄文的 сдвиг，法文的 Glissement，德文的 schiebung（英文除外，似無恰與 сдвиг 對應的名詞），均表示一種簡單的動作或變化。然而「剪變」（若按「剪」的時候發生的變化解釋），則不簡單了。總之，用「剪變」來翻譯 сдвиг，我們認為是不恰當的。

6. 「應力」和「剪變」雖有上述的種種缺點，然早已成爲慣用的名詞，因此不能不愼重地加以考慮。但是最後因爲只賸下這個理由使我們猶豫，所以我們終於決定了作一個大膽的嘗試：放棄了這兩個名詞，而採用了「張力」（見第一章§1附註）和「平錯」（見第二章§6附註）。因爲我們覺得「張力」和「平錯」這兩個名詞較確切一些，更與原文接近一些。在形變的幾何理論中用「平錯」二字可以更明顯一些。至於「張力」，雖說「張」字用在別處含有伸展的意思，但其本意，則與「弛」字相反，而含有「緊張」的意義，恰好與 напряжения 的意義相合。當譯者草此前言時，偶然看到俄華工業技術字典（中央人民政府重工業部設計司翻譯科編）1953 年 7 月出版第 384 頁，亦把 напряжения 譯成「張力」。

總之，譯者主觀上覺得名詞要又恰當又明顯，所以根據以上的理由決定了放棄一個慣用的名詞「應力」而代以「張力」，並且把 сдвиг 譯作「平錯」。理由是否充足？見解是否正確？望讀者加以批評，譯本中的錯誤亦祈指正。

譯者

北京 1953 年 10 月 20 日

第三版序

本書於1932年首次出版，按其內容命名爲“彈性力學的基礎”；繼於1933年重版，並沒有基本上的修改。

那時由於編入許多高等專門學校教材裏的彈性力學，沒有合用的書籍，迫切需要有一本對於高等專門學校的學生簡略的彈性力學教程出版。狄摩盛科所著的惟一的彈性力學俄文教本，1914—1916年間出版的，當時已成爲一種罕見的書籍，在上述的專門學校的圖書館裏多半是找不到的。

在編撰這個教本的時候，著者對於許多困難的，但是基本的問題的敍述盡量設法使其簡化，易於瞭解；長篇的推論易使讀者望而卻步，他們對於應用，比對於證明和理論的建立，感興趣的多。當然，要達到這樣簡化的目的，只有對於理論上最複雜的章節犧牲一些徹底的、嚴格的和有辯證依據的解釋；並要犧牲可以插入本書的一些問題，雖說這種問題對於技術方面很關重要，但它的解答需要一些繁複的數學資料。

著者對於第三版認爲有將書名略爲改變的需要，爲使其與本書的目的和內容更相符合。

雖說本書的內容大有變更，但用途仍和原先一樣，可以作爲按照高等專門學校的教程打好了數學基礎的人們初次學習彈性力學之用。在重編此書的時候著者曾顧到兩種事實：

一方面，自本書前一版發行以後，在我國即有一系列的很好的彈性力學教程出現，闡明彈性力學的建立，以及專門技術的許多很重要的補充資料；只須舉出 А. Ляв*, С. ц. Тимошенко, П. Ф. Папкович, Л. С. Лейбензон, А. и Л. Фёппль, С. В. Серенсен 所編的教程和 Н. И. Мусхелишвили 的一部出色現已普遍馳名的著作“彈性力學的一些問

---

* A. E. H. Love。

題”，再加上一些敍述雖簡但很切實的單行書籍，如 Треффц 的“彈性的數學理論”和 Геккелер 的“彈性物體的靜力學”，可見一斑。

另一方面，最近 10—12 年以來，在彈性力學領域內工程師們的興趣，大大地增進了，不僅在專門技術需要的許多問題上，而且還在這些問題的徹底的瞭解上，非下這番工夫，工程師們沒有閱讀更深刻的教程和專門書籍的可能。

在此種情形下，著者勢在必須解決如次的問題：將再版的這本書在以上所舉相當豐富的書籍中的地位切實的加以審定，並且同時顧到務使此書對於以其原來的形式能夠得到它的幫助的一些讀書，仍然能夠有所幫助。

著者認爲在本書內不宜插入許多新的特殊問題；這樣的問題，雖說在計算方面對於工程師很關重要，但是在以上所舉的書籍中和在許多特別著作中可以大量找得到的。在此版內本書的補充資料係宗着以上所指出的另一目標而採用的：就是盡可能以更有系統更相連貫的敍述幫助讀者，使之對於彈性力學的基本問題，至少是初步的問題，能夠獲得更容易的瞭解，並且不費力地能轉到更完備的教程和專門著作上去。

爲了達到這個目的，頭兩章(關於張力和形變的理論)大加擴充；第八章關於直桿的扭轉與彎曲幾乎全部是重新寫的；討論平面問題的第六章和第七章亦曾加以補充；並添加了第九章，專論布希涅斯克法，特別是他的關於球形界面受載荷作用的古典問題；這個問題在現在對於建築物下基地堅固性的計算有很重要的應用。在同一章裏並提出關於應用複變數函數以解平面問題的初步說明，並對於第四章裏已經簡略和淺近談過的彈性振波的問題，亦加以補充。

在一系列的問題裏我們曾應用了歐賴和卜阿頌分開變數的古典方法求一次部分微分方程式的積分；有些地方這樣可引起了更繁複、更冗長的計算；不過據著者的看法，如此可以給與一系列的特殊問題一個一

般性的基礎(菲倫和李別爾法對於矩形的平面問題,平面問題的普遍解答在極坐標內的建立,矩形截面桿的扭轉,用定波法解答振動方程式)。另外,在用極坐標解答平面問題的時候,著者按此法仔細地施以運算,竟成功地找出了四個新的特殊解答,這種以極點為異點的解答並未列在米歇爾給出的解答裏面[公式 7.75 和 7.76, 見第 42 節和後面]。

在此版中,同前版一樣,能量的近似法的運用均行略去,這些方法雖有效用,但自從 Л. С. Лейбензон 的既深刻又詳細的著作"應用變分法解答彈性力學問題"發表了以後,還把它們插入書中,未免多餘。

此外,著者修改此書所採取方針是否正確,尚望讀者加以批評;一些讀者對於前版的種種缺點曾提出了很寶貴的意見,以此對於本版的改善頗有幫助,著者非常感激。

著者對於 Л. И. Мальгинов 和 М. И. Нейман 誠懇地表示感謝,兩君審閱稿件指正了若干敍述上的缺點,給了我以很大的友誼的協助。

莫斯科 1946 年 7 月 25 日

菲羅年科·博洛吉奇

目　　錄

彈 性 力 學

引 言

彈性力學爲數學物理的一個重要部分。所研究的是力在具有彈性的物體上的作用，着重於物體在平衡狀態，或在運動狀態其內部所發生的張力和形變。此種問題，我們知道，亦屬於材料力學所研究的範圍。

在材料力學教程裏面，借助於一些設題法和解題法的簡化，我們盡量設法求出簡單而且對實際計算便於應用的結果。彈性力學則係應用一種更普遍，更精確的方法去尋求問題的解答。其第一個目標就是考察所得到的簡化解答是否正確，並且對發生的差數大小加以確定；同時有許多問題用材料力學的普通方法去求解答實不可能；這主要的是這樣的一些問題，在這一些問題裏面彈性物體的形狀並非材料力學中的一個典型桿或梁；彈性物體在受到載荷處所發生的局部張力問題亦應劃歸此類。這類的問題用彈性力學得出的解答，具有能以直接應用的性質。

有許多問題，其解答的精確程度同材料力學一樣的亦劃入彈性力學，不過需要用更複雜的數學解析方法（雙曲率桿，薄板，空殼，彈性物體的振動理論，彈性平衡形的穩定性）。一般的說彈性力學與材料力學相反，所考察的是數學方面複雜的問題。在此兩門學科之間不能劃出清楚的界限，實在有許多問題有的被列在彼處，亦有的列在此處。

但是用彈性力學的方法去解答問題是這樣的複雜，直到現在尚有許多在應用方面甚關重要的問題未能獲得解答，雖說彈性力學在目前已經發展成了一個有能力的學科，廣範的運用數學解析，而且有許多屬於它的專門書籍。

第一章　張力論

§1　物體的緊張狀態

張力❶的概念和張力在最簡單情形下的研究法已見於材料力學❷。在此處我們應該首先規定出一些表示張力的記號；這種記號在立體問題內要應用方便並且允許我們很容易地分清經過所考察物體內一點的各個微分平面上的張力。

張力有數種表示法；我們在此處擬沿用許多彈性力學教程內所採用的記號。

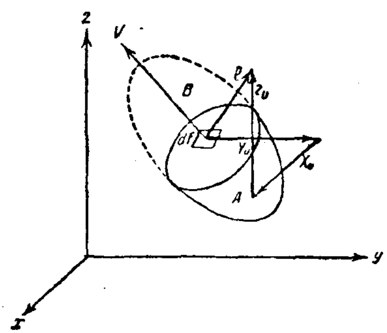

圖 1

設想有一固體(圖 1)被一平面截斷成兩部分 A 與 B。在物體截斷後，放棄其 B 部分；並在斷面上劃分出一個微分面 dF；我們用此微分面的向外法線(對所保留的 A 部分而言)確定該微分面的方向。

利用向外法線不但可以簡單而又顯明的指出微分面的方向同時表明了物體被截斷後所放棄的是那一

---

❶ 譯者沒有沿用「應力」和「應變」兩個現有名詞，因爲西文名詞中都沒含有「應」

俄文	Напряжение	Деформация
英文	Stress	Strain
法文	Tension	Déformation
德文	Spannung	Deformazion

字的意思。「應」字有些不同的講法，加在「力」字和「變」字前面不但不能予以恰當的補充，反而可以使人誤解。其實“Напряжение, Stress, Tension, Spannung”均含有「緊張」之義，所以譯爲「張力」；另一方面 Деформация, Déformation, Deformazion 明明是指形狀(Forma)的變化，所以譯爲「形變」(見「前言」)。

❷ 有同一著者的材料力學。

部分(B 或 A),這一部分在放棄以後,它的作用是由我們用力來代替。

設 p 為所指的微分面上的總張力 $p=\frac{dP}{dF}$,式內 dP 乃加於微分面 dF 上的諸力的合力。

我們在空間任一個地方規定出一任意的正交坐標系 $Oxyz$ 借助於這個坐標系來確定所考察的物體上各點的位置。並用張力在此坐標系各軸上的投影以確定諸張力值;以後在研究形變的時候,我們仍將採用此同一坐標系。

我們用 X_v, Y_v, Z_v 表示微分面 dF 上總張力 p 在各坐標軸上的投影。在這種表示法內大寫字母 X,或 Y,或 Z 表明向那個軸作的投影;傍邊的小寫字母 v,則指出所考察的張力所對應的微分面的外法線方向;因此,像記號 X_v 就應該這樣的說明:"在外法線為 v 的微分面上的總張力在 Ox 軸上的投影"。

倘截斷以後所放棄的是 A 部分,則同一微分面 dF 的外法線方向變為相反。所以按照圖 2 微分面 dF 上的總張力應該表示之如次:X_{-v}, Y_{-v}, Z_{-v}; 顯然

$$X_{-v}=-X_v;\ Y_{-v}=-Y_v;\ Z_{-v}=-Z_v,$$

因為張力 X_v, Y_v, Z_v 表示 B 部分加於 A 部分的作用,而張力 X_{-v}, Y_{-v}, Z_{-v} 則係表示 A 部分加於 B 部分的作用;此二者大小相等而方向相反。

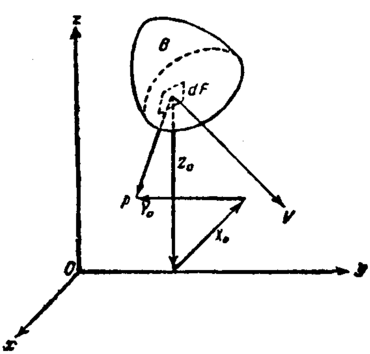

圖 2

在材料力學裏總張力一般的是分解為法線分力與切線分力;我們所導入的張力在任意選取的坐標系各軸 Ox, Oy, Oz 上的投影

$$X_v, Y_v, Z_v$$

一般的說,既非法線分力,亦非切線分力。

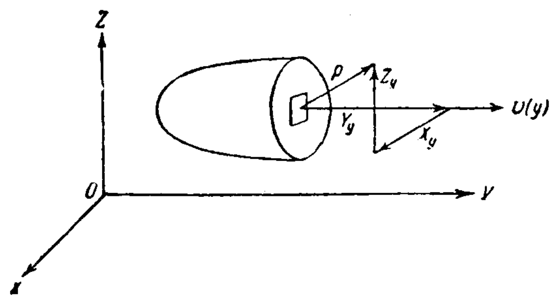

圖 3

以後我們將要時常採用與一個坐標軸垂直的斷面，譬如說與 Oy 軸垂直的斷面；我們就得到總張力的投影(圖3)如次：

$$X_y;\ Y_y;\ Z_y\ 。$$

在此情形 Y_y 乃法線張力；而 X_y, Z_y 則係切線張力。

圖 4a 和圖 4б 係表明與其他二坐標軸垂直的微分面上的張力的記號。綜合以上的結果，我們就得到與各坐標面平行的微分面上的一系張力如次：

$$X_x,\ Y_x,\ Z_x;\ \ X_y,\ Y_y,\ Z_y;\ \ X_z,\ Y_z,\ Z_z\ 。$$

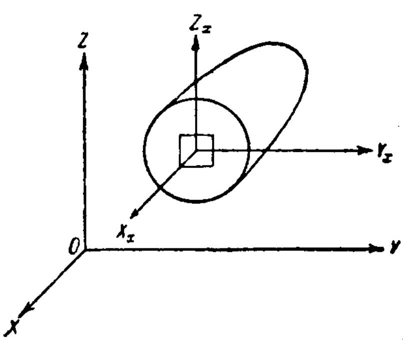

圖 4 a

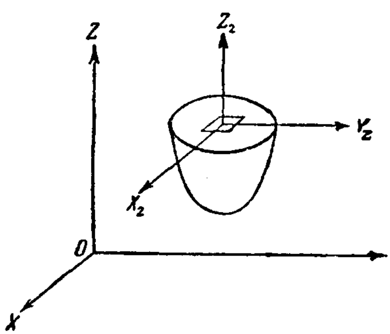

圖 4 $б$

很容易看出張力如

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,$$

記號大小字母相同，乃是法線張力。至於其他六個分力，則均係切線張力。

讀者如欲熟習這些新的記號，可以作以下的習題。

習　題

(1)圖5所示爲一水庫牆的橫斷面 YOA，其 OY 面受到水的壓力，而在 OA 面上則無有載荷。

試表明在 OY 面上的法線張力和切線張力並寫出它們各與何數量相等（要注意到壓力的方向，Ox 軸的方向和投影的符號）。同時表出在 OA 傾斜面（其外法線爲 v）上的張力的分力。就此寫出 OA 面上無有載荷的條件。若將庫牆按 aa 和 bb 截斷，把其某一部放棄（左部或右部；上部或下部），試表明此二斷面上的張力。

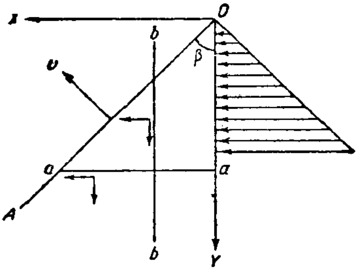

圖5

(2)設一圓柱體由作用於其兩端橫斷面上的力使之扭轉。試表出橫斷面 ln 內任一點 K 的張力並寫出沒有法線張力的條件。又試表出側面上任一點 m 的張力並寫出側面不受任何載荷的條件。

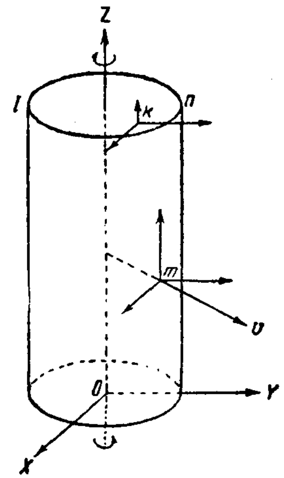

圖6

(3)設一圓柱桿(圖7)，由作用於其右端 pg 橫斷面上的力使之彎曲。試寫出側面不受任何載荷的條件(參考以上的習題)，並指出由材料力學所確定的 mn 橫斷面上的張力(法線力與切線力)。

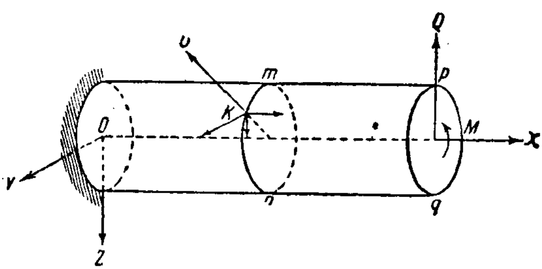

圖7

現在有一些著者採用以下的記號，這種記號亦見於專門技術書籍裏，與 OX, OY, OZ 各軸垂直的微分面上的法線張力分別用

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z;$$

表示；而此各微分面上的切線張力，則用

$$\tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{xz},$$

表示，並有 $X_y=\tau_{xy};\ Y_z=\tau_{yz};\ X_z=\tau_{xz}$。

§2 平衡的微分方程式

我們從固體內分出一個平行六面體形的微分體，使其側面與各坐標面平行。如設 dx, dy, dz 爲此平行六面體的側稜(圖 8)，則其體積等

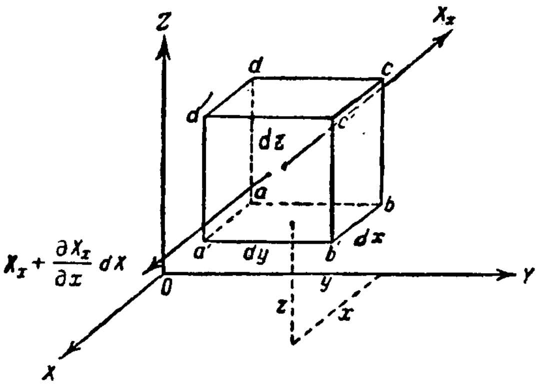

圖 8

於 $d\tau=dx\,dy\,dz$。分割之後，將所放棄一部分的作用代替以力，並分解每個側面上的力爲三個分力。總起來作用於諸側面上的張力的分力共有 $6\times3=18$ 個。這些力就是作用於我們的平行六面體的外力。此外我們尙假設在物體上存在有所謂體積力，並認爲這種力是作用於物體的質量；譬如以後要談到的重力就是一種體積力。

設將作用於單位質量的某一種體積力亦分解爲三個分力：X, Y, Z 則與平行六面體內質量 $\rho\,d\tau$（ρ 爲物體上所考察的 T 點的密度，它代