高等数学

第二册

主　编　杜先能
副主编　顾荣宝　黄仿伦

安　徽　大　学　出　版　社

安徽大学重点建设课程教材

高等数学

（第二册）

主　编　杜先能
副主编　顾荣宝　黄仿伦
编　者　杜先能　顾荣宝
黄仿伦　雍锡琪
何江宏

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/杜先能主编. - 合肥:安徽大学出版社,1999.9
ISBN 7-81052-276-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.杜…　Ⅲ.高等数学 - 高等学校 - 教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 42581 号

高等数学(第二册)

杜先能　主编

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号　邮编 230039)	**印　刷**	合肥朝阳印刷有限责任公司
		开　本	850×1168　1/32
联系电话	总编室 0551 - 5107719 发行部 0551 - 5107784	**印　张**	40.25
		字　数	900 千
责任编辑	杨　冬	**版　次**	1999 年 9 月第 1 版
封面设计	孟献辉	**印　次**	1999 年 9 月第 1 次印刷
经　销	新华书店	**印　数**	1—5100 册

ISBN 7-81052-276-0/**O**·20　**全四册总定价**:52.40 **元**(**本册定价**:11.40 **元**)

内容提要

本书是综合性大学理工科非数学专业《高等数学》课程的通用教材，书中的内容系统、全面，定理的证明、公式的推导简洁、严谨。同时在每一章的最后，根据近几年的全国考研试题的类型与方向，精编了一部分综合习题作为提高之用。

全书分四册出版，第一册内容包括函数的极限与连续、一元函数微分学、积分学；第二册包括空间解析几何、多元函数微积分学；第三册包括无穷级数、线性代数；第四册包括常微分方程、概率论与数理统计。

本书可作理工科院校非数学专业或师范院校相关专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学。

编者的话

随着安徽大学进入全国二十一世纪重点建设的100所高等院校，安徽大学对基础教学提出了更高的要求，把《高等数学》作为学校重点建设课程之一。本书就是我们根据全国高等院校理工科《高等数学教学大纲》，并参考了《1999年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，为理工科院校非数学专业的学生而编写的。与国内、外同类教材相比，本书有如下特点：

1. 书中的内容系统、全面，书中定理的证明、公式的推导，我们总是尽可能地用最简洁、严谨的方法去证明，同时对于那些需要加深理解的概念及灵活掌握的方法，书中都配有大量的例题与习题。兼顾到一部分同学考研的需要，我们在每一章的最后，还根据近几年的全国考研试题的类型与方向，精编了一部分综合习题作为提高之用。初学时不必题题都做，更不要因为有几个题目做不出来而失去信心。

2. 我们把大多数理工科院校非数学专业《高等数学》五学期的课程（微积分（包括空间解析几何、常微分方程）三学期，线性代数、概率论与统计各一学期）压缩到四学期。本书分四册出版，每一学期讲授一册，第一册内容包括函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学；第二册包括空间解析几何、多元函数微分学、积分学；第三册包括无穷级数、线性代数；第四册包括常微分方程、概率论与数理统计。

3. 由于基本初等函数及性质在中学教材里已作详细讨论，所以我们只是简单提及一下，不再重复。

4. 我们以"有上界的实数集必有上确界"为公理建立极限理论，所涉及的定理（如Cauchy 收敛准则，闭区间连续函数的性质，可积函数类的讨论等）都给以严格的论证。我们认为这些定理证明的方法对理解《高等数学》的内容是很有帮助的。

5. 为了加强学生综合运用所学的知识分析和解决实际应用问题能力，所以书中配有大量应用问题的实例与习题。

6. 根据国家标准对数学符号的统一要求，书中的正切函数、余切函数、反正切函数和反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\mathrm{arccot}\, x$ 表示。

7. 在第四册的附录中编写了常用数学软件《Mathematica》、《Maple》和《Phaser》。

参加本书编写工作的有杜先能、顾荣宝、黄仿伦、雍锡琪、何江宏等。第一册由黄仿伦编写，第二册由顾荣宝编写，第三册的第7章由黄仿伦编写、第8章由杜先能编写，其余各章由雍锡琪编写，第四册常微分方程部分由顾荣宝编写，概率论与数理统计部分由何江宏编写，最后由黄仿伦协调统稿。另外，感谢盛立人教授为我们编写了第四册的附录《常用数学软件》。胡舒合教授审阅了全书。在编写本书的过程中，得到了安徽大学教务处和数学系的大力支持，许多教师对本书的写作提出了宝贵的意见，安徽大学出版社为本书的出版作了大量的工作，作者谨在此对他们表示诚挚的感谢。

在编写本书的过程中，我们参考了国内外许多同类教材，在此恕不一一列名致谢。

由于编者水平有限，加上编写时间仓促，书中一定存在不妥之处，敬请读者批评、指正。

编　者

一九九九年七月

目　　次

第 4 章

空间解析几何

空间解析几何的主要内容是用代数的方法研究空间的几何图形，也就是说，通过建立空间坐标系，把空间的几何图形用图形上点所满足的代数方程来表示，从而由代数方程的性质来研究图形的性质.

§4.1 空间直角坐标系·曲面与曲线方程

1. 空间直角坐标系

在空间任取一点 O，过 O 点作三条两两垂直的轴(规定了正方向的直线)Ox、Oy、Oz，再取定长度单位，这样我们就在空间建立了一个坐标系 $Oxyz$，称为**空间直角坐标系**. 点 O 称为**坐标原点**，直线 Ox、Oy、Oz 称为**坐标轴**，依次称为 x 轴、y 轴、z 轴. 由每两条坐标轴所决定的平面 Oxy、Oyz、Ozx 称为**坐标平面**.

通常我们规定三个坐标轴构成右手系统，即用右手握住 z 轴，当四个手指从 x 轴正向转$\frac{\pi}{2}$角度到 y 轴正向时，大拇指指向 z 轴正向(见图 4-1).

三个坐标平面将空间分成八个部分，称为八个**卦限**(如图 4-2).

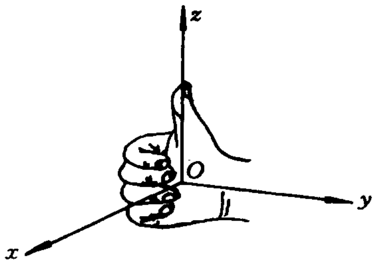

图 4-1

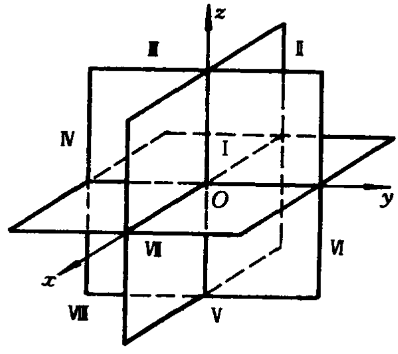

图 4-2

在空间建立坐标系后，可以用数组来确定点的位置.

设 P 是空间任意一点，过 P 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，分别交坐标轴于点 A、B、C. 设点 A、B、C 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别是 x、y、z，于是得到唯一的三元有序实数组(x,y,z)与点 P 对应；反之，任意给定一个三元有序实数组(x,y,z)，可在 x 轴、y 轴和 z 轴上确定三个点 A、B、C，使得它们在坐标轴上的坐标分别为 x、y、z，过 A、B、C 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，这三个平面交于空间一点 P. 这样，空间的点 P 和三元有序实数组(x,y,z)间建立了一一对应关系(见图 4-3).

称三元有序实数组(x,y,z)为**点 P 的坐标**，记作 $P(x,y,z)$.

利用点的坐标，可以给出空间两点间的距离公式.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$是空间两点，过 P_1、P_2 分别作平行于各坐标平面的平面，它们围成一个长方体(如图 4-4)，其三边长分别为

$$|P_1A|=|x_2-x_1|,\quad |AB|=|y_2-y_1|,\quad |BP_2|=|z_2-z_1|.$$

由于 P_1 和 P_2 两点间的距离是长方体对角线的长，于是

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2 &= |P_1B|^2+|BP_2|^2\\ &= |P_1A|^2+|AB|^2+|BP_2|^2\\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

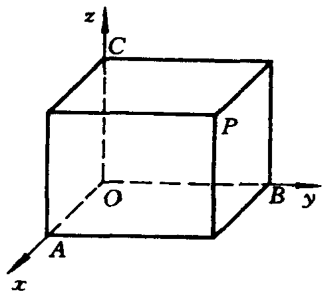

图 4-3

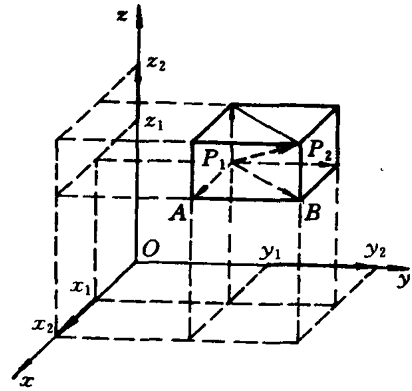

图 4-4

所以

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1.1)$$

这就是空间两点 P_1 和 P_2 间的距离公式. 特别地，点 $P(x,y,z)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 间的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (1.2)$$

例 1 求点 $P(4,-5,1)$ 到 x 轴的距离 d.

解 过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 $Q(4,0,0)$，则 P 到 x 轴的距离就是 $|PQ|$，所以

$$d=|PQ|=\sqrt{(4-4)^2+(0+5)^2+(0-1)^2}=\sqrt{26}.$$

例 2 求 z 轴上一点，使与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 的距离相等.

解 设所求的点为 $P(0,0,z)$，则由两点间的距离公式可知

$$|AP|=\sqrt{4^2+(-1)^2+(z-7)^2)}=\sqrt{66-14z+z^2},$$

$$|BP|=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(z+2)^2)}=\sqrt{38+4z+z^2}.$$

由 $|AP|=|BP|$ 得到

$$66-14z+z^2=38+4z+z^2,$$

解得 $z=\frac{14}{9}$，因此，所求的点为 $(0,0,\frac{14}{9})$.

2. 曲面方程

空间的曲面可以看作满足某一条件的点的轨迹. 例如一球面是到定点的距离为定长的点的轨迹.

设曲面 S 上点的坐标为 (x,y,z)，用方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{1.3}$$

表示曲面 S 上点的坐标所满足的条件，如果方程(1.3)和曲面 S 之间有下列关系：

(1) 曲面 S 上所有的点的坐标都满足方程(1.3)，

(2) 坐标满足方程(1.3)的所有点都在曲面 S 上，

则称方程(1.3)为**曲面 S 的方程**，而曲面 S 称为**方程**(1.3)**的图形**.

例 3 在坐标平面 Oxy 上点的 z 坐标等于零，而 z 坐标等于零的点必在 Oxy 平面上，故 Oxy 平面的方程为 $z=0$.

例 4 设一球面以 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心，R 为半径. 在这球面上任取一点 $P(x,y,z)$，由于它与球心 P_0 的距离等于 R，所以点 P 的坐标满足方程

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{1.4}$$

反之，若一点的坐标满足方程(1.4)，则这点到球心 P_0 的距离等于 R，从而这点在球面上．因此方程(1.4)是以 P_0 为球心，R 为半径的球面方程．特别地，若球心 P_0 为坐标原点，则球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

例 5 已知两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$，求线段 AB 的垂直平分平面的方程.

解 点 $P(x,y,z)$ 在线段 AB 的垂直平分平面上的充要条件是 $|AP|=|BP|$，这个条件用坐标表示即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

两边平方且化简，得

$$2x-6y+2z-7=0.$$

这就是所求的平面方程.

建立了曲面与方程的对应后，用代数方法研究曲面可归结为下面两个基本问题：

(1) 已知曲面，建立这曲面的方程；

(2) 已知三变量 x、y、z 的方程，研究这方程所表示的曲面的形状.

3. 曲线方程

空间的曲线可以看作两个曲面的交线，设这两个曲面的方程为 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$，若它们的交线 L 和方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}\tag{1.5}$$

有如下关系：

(1) 曲线 L 上所有点的坐标都满足方程组(1.5)，

(2) 坐标满足方程组(1.5)的所有点都在曲线 L 上，

则称方程组(1.5)为**曲线 L 的一般方程**，而曲线 L 称为**方程组(1.5)的图形**.

例 6 方程组$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ x^2+z^2=R^2 \end{cases}$表示什么曲线?

解 方程 $x^2+y^2=R^2$ 和 $x^2+z^2=R^2$ 分别表示以 z 轴和 y 轴为轴,半径为 R 的圆柱面,从第一式减去第二式,得 $y^2-z^2=0$,即 $y=\pm z$,因此原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=0, \\ y=\pm z. \end{cases}$$

可见,所求图形是圆柱面 $x^2+y^2=0$ 和两个平面 $y=z$,$y=-z$ 的交线,因而是两个椭圆(图 4-5).

过一条曲线 L 作一个母线平行于 z 轴的柱面,这柱面与 Oxy 平面的交线,称为曲线 L 在 Oxy 平面上的**投影曲线**,简称**投影**.同样可以定义 L 在 Oyz 平面和 Ozx 平面上的投影.

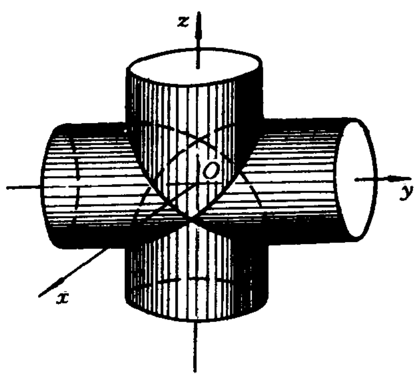

图 4-5

例 7 已知两个球面

$$x^2+y^2+z^2=1 \tag{1.6}$$

和

$$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1, \tag{1.7}$$

求它们的交线在 Oxy 平面上的投影.