徐森林　薛春华

微分几何

中国科学技术大学出版社

微 分 几 何

徐森林 薛春华

中国科学技术大学出版社
1997 · 合肥

微 分 几 何

徐森林 薛春华

*

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路96号,230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本:850×1168/32 印张:14.25 字数:360千

1997年12月第1版 1998年1月第1次印刷

印数:1—2100册

ISBN 7-312-00895-X/O·191 定价:16.00元

内 容 简 介

本书主要介绍了 Riemann 流形、Riemann 联络、Riemann 截曲率、Ricci 曲率和数量曲率. 详细研究了全测地、全脐点和极小子流形等重要的内容. 此外,还应用变分和 Jacobi 场讨论了测地线、极小子流形的长度、体积的极小性. 在证明了 Hodge 分解定理之后,论述了 Laplace-Beltram 算子 Δ 的特征值以及谱理论. 最后,证明了 Synge 定理、著名的拓扑球面定理和一些曲率与拓扑相关联的重要定理. 本书可使读者具有良好的近代数学修养并能增强研究的能力.

本书可用作理科大学数学系和物理系高年级研究生和大学几何、拓扑专业学生的教科书以及相关教学、研究人员的参考书.

序　言

微分几何的始祖是 C. F. Gauss(1777－1855)，他引进了曲面的第 1 基本形式，建立了曲面论. B. Riemann(1826－1866)在 1854 年有名的演讲将这个理论推广到 n 维空间，Riemann 几何就此产生，局部微分几何开始了飞速的发展，产生了张量分析. 同时，1970 年，F. Klein 发表了他的著名的埃尔兰纲领(Erlanger program)，由群论的角度研究空间变换群的不变量，从而引进了各种不同的几何学. 另外，复变函数的单值化理论促进了 Riemann 曲面的研究. 这种种理论以及经典的曲面理论，构成了 20 世纪微分几何发展的基础. 许多著名数学家，如 E. Beltrami，E. B. Christoffel， R. Lipschitz 等又发展了 Riemann 的新几何.

本世纪 30 年代 Einstein 提出的广义相对论，近三十年来 Yang-Mills 提出的规范场等等就是几何学与物理学相结合的最好例子.

微分几何的主要问题是整体的，即研究空间或流形的整体性质，尤其是局部性质与整体性质的关系，Gauss-Bonnet 公式以及许多曲率与拓扑相关的定理就是实例.

全书内容共分五章. 第 1 章是预备知识，介绍了 Riemann 几何的主要内容：Riemann 度量 g，Livi-Civita (Riemann)联络、Riemann 流形基本定理，Riemann 截曲率、Ricci 曲率、数量曲率、常截曲率流形、Laplace 算子 Δ 以及活动标架法. 第 2 章是子流形几何，引进了全测地、极小和全脐子流形的概念，举出了 Euclid 空间和单位球面中大量极小曲面的例子，并讨论了单位球面上紧致极小子流形的刚性问题. 第 3 章是应用变分和 Jacobi 场讨论了测地线和极小子流形. 第 4 章研究了流形(可定向和不可定向)上的

Hodge 分解定理和 Lapace-Beltram 算子 Δ 的特征值，并在习题中讨论了等谱与等距之间关系的问题. 第 5 章给出了曲率与拓扑相关联的 Synge 定理，Rauch 比较定理和著名的拓扑球面定理. 此外，还证明了具有相同常截曲率的空间形式是等距的 Riemann 流形.

本书是中国科学技术大学研究生系列教材之一，收集的内容很丰富，论述很严谨、详细，这是为了使读者可不必过多地查阅文献就能熟练地掌握近代微分几何的基本知识.

本书的特点是注重微分几何与微分方程相关联的问题、微分几何与拓扑相关联的问题，这是当代微分几何两大重要研究方向. 在论证命题时（例如 Riemann 流形基本定理、F. Schur 定理）常采用或同时采用近代观点（映射观点）、古典观点（坐标观点）和活动标架法，这是本书的另一个特点. 书中第 2 章 2.5、第 4 章 4.4 以及配备的大量习题是为读者在研究方向上开设的一些窗口，希望能帮助读者思考和研究更深入的问题，以致尽快进入微分几何研究的前沿.

少年班优秀大学生梅加强、倪轶龙、刘湘伟和数学系研究生夏青岚、王春苗和杨晓松、祁锋以及访问学者夏大峰副教授都仔细阅读了本书，并提出了许多宝贵的建设性意见. 作者在此对他们一并表示衷心的感谢.

由于水平有限，书中肯定有错误和不妥之处，请读者多提宝贵意见.

徐森林

薛春华

1996 年 7 月

目　　录

第1章 Levi-Civita 联络和 Riemann 截曲率

本章引进了线性联络 ∇ 、向量场的平移和测地线的概念，证明了 C^∞ 向量丛上 Riemann 度量的存在性和 Riemann 流形的基本定理(即 Levi-Civita 联络或 Riemann 联络的存在唯一性定理)，介绍了 Riemann 截曲率、Ricci 曲率、数量曲率和常 Riemann 截曲率的流形. 此外，对 C^∞ 函数的 Laplace 算子 Δ ，证明了 Green 第 1、第 2 公式及散度定理和 Hopf-Bochner 定理. 我们还推出了：如何由 Riemann 流形的 Riemann 联络导出正则子流形的 Riemann 联络，Riemann 正则子流形上的第 1、第 2 基本形式，Weingartan 映射，Gauss 曲率方程和 Codazzi-Mainardi 方程. 对于 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中的 C^∞ 超曲面，Gauss 曲率只与第 1 基本形式有关而与第 2 基本形式无关的 Gauss 绝妙定理是一个极其深刻的定理. 最后，我们用活动标架研究了线性联络、Levi-Civita 联络、曲率和正则子流形的局部几何. 继 Cartan 结构方程得到了 Bianchi 第 1、第 2 恒等式的外微分形式的表示. 用活动标架还重新证明了 Riemann 流形的基本定理.

1.1 向量丛上的线性联络

本节主要介绍 C^∞ 向量丛 ξ 上的线性联络 ∇ 、向量的平行移动和测地线等重要概念.

定义 1 设 E, M 为 C^∞ 流形，$\dim M = m$，n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 自然是一个 n 维流形，一般线性群 $GL(n,\mathbf{R}) = \{A | A$ 为 $n \times n$ 非异实矩阵$\}$ 按矩阵的乘法为 C^∞Lie 群，它 C^∞ 有效作用在 $\mathbf{R}^n$ 上(其作用为矩阵乘法，即 $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, a \to Aa$). 所谓有效作用，即对 $\forall\, a \in \mathbf{R}^n, Aa = a$ 蕴涵着 $A = I$(单位矩阵). $\pi: E \to M$ 为 C^∞ 满映射，且是局部平

凡(局部是积空间)的,也就是存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 和相应的 C^∞ 同胚族 $\{\psi_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$,使得对 $\forall\ \alpha \in \Gamma$,图表

$$\begin{tikzcd} E|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_\alpha \times \mathbf{R}^n \arrow[dl, "\pi_{1\alpha}"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

是可交换的,即 $\pi = \pi_{1\alpha} \circ \psi_\alpha$,其中 $\pi_{1\alpha}(p,\alpha) = p$,而 $\psi_{\alpha,p} = \psi_\alpha|_p$: $\pi^{-1}(\{p\}) \to \{p\} \times \mathbf{R}^n$ 为 C^∞ 线性同构. 如果 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$,则 ψ_α 和 ψ_β 诱导出 C^∞ 同胚 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$,且图表

$$\begin{tikzcd} (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{R}^n \arrow[rr, "\psi_\beta \cdot \psi_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\pi_{1\alpha}"'] & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{R}^n \arrow[dl, "\pi_{1\beta}"] \\ & U_\alpha \cap U_\beta & \end{tikzcd}$$

是可交换的,即 $\pi_{1\alpha} = \pi_{1\beta} \circ \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$. 令 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p,a) = (p, g_{\beta\alpha}(p)a)$ 这里 $g_{\beta\alpha}(p)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 为 C^∞ 线性同构,从 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)$ 到 $(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)$ 的**转换映射** $g_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n,\mathbf{R})$ 为 C^∞ 映射.

由上述立即可知,$g_{\alpha\alpha}(p) = I$ 和 $g_{\gamma\alpha}(p) = g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p)$. 事实上,由 $(p,a) = \mathrm{Id}_{U_\alpha \times \mathbf{R}^n}(p,a) = \psi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1}(p,a) = (p, g_{\alpha\alpha}(p)a)$ 得到 $g_{\alpha\alpha}(p)a = a (\forall\ a \in \mathbf{R}^n)$,再由 $GL(n,\mathbf{R})C^\infty$ 有效作用于 $\mathbf{R}^n$,故 $g_{\alpha\alpha}(p) = I$. 由 $(p, g_{\gamma\alpha}(p)a) = \psi_\gamma \circ \psi_\alpha^{-1}(p,a) = \psi_\gamma \circ \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p,a) = \psi_\gamma \circ \psi_\beta^{-1}(p, g_{\beta\alpha}(p)a) = (p, g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p)a)$ 得到 $g_{\gamma\alpha}(p)a = g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p)a$;对任意 $a \in \mathbf{R}^n$,$a = g_{\alpha\alpha}(p)a = g_{\alpha\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\alpha}(p)a = g_{\alpha\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p)a$,根据 $GL(n,\mathbf{R})C^\infty$ 有效作用于 $\mathbf{R}^n$,有 $g_{\gamma\alpha}(p) \cdot g_{\alpha\gamma}(p) = I$ 及 $g_{\alpha\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p) = I$. 于是 $g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p) = g_{\gamma\alpha}(p) \cdot g_{\alpha\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\beta}(p) \cdot g_{\beta\alpha}(p) = g_{\gamma\alpha}(p)$.

如果 $(\pi^{-1}(U),\psi)$ 与每个 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)(\alpha \in \Gamma)$ 满足上述 $(\pi^{-1}(U_\beta),\psi_\beta)$ 与 $(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)$ 相应的条件,则称 $(\pi^{-1}(U),\psi)$ 是与 $\mathscr{E}' = \{(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha) | \alpha \in \Gamma\} C^\infty$ 相容的. 类似 C^∞ 流形的定义,它唯一地确定了一个最大局部平凡之族 $\mathscr{E} = \{(\pi^{-1}(U),\psi) | (\pi^{-1}(U),\psi)$ 与 $\mathscr{E}'$ 是 C^∞ 相容的$\}$(最大性:凡与 $\mathscr{E} C^\infty$ 相容局部

平凡化系必属于 $\mathscr{E}$)，而 $\mathscr{E}'$ 称为生成 $\mathscr{E}$ 的一个**基**. 显然，如果 $\mathscr{E}'_1$ 和 $\mathscr{E}'_2$ 都是基，则 $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 \Leftrightarrow \mathscr{E}'_1$ 和 $\mathscr{E}'_2$ 是 C^∞ 相容的. 我们称六元组 $\xi = \{E, M, \pi, GL(n,\mathbf{R}), \mathbf{R}^n, \mathscr{E}\}$ 为 M 上的**秩为 n 的 C^∞ 向量丛**. E 为**丛(全)空间**，M 为**底空间**，π 为从 E 到 M 的**投影**，$GL(n,\mathbf{R})$ 为**构造群(或结构群)**，$\mathbf{R}^n$ 为**标准纤维**，$E_p = \pi^{-1}(p)$ 为 $p \in M$ 处的**纤维**，$\mathscr{E}$ 称为**丛图册**，$(\pi^{-1}(U), \psi) \in \mathscr{E}$ 称为**丛图卡**. 有时也称 E 为 C^∞ 向量丛.

显然，$\dim E = \dim M + \dim \mathbf{R}^n = m + n$，即 E 为 $(m+n)$ 维 C^∞ 流形.

如果 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，记 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$ 和 (U_β, φ_β)，$\{y^i\}$ 为 M 上的局部坐标系，则有下面的变换图表和公式：

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[dl, "\psi_\beta"'] & \\
U_\beta \times \mathbf{R}^n \arrow[d, "{(\varphi_\beta, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})}"'] & & U_\alpha \times \mathbf{R}^n \arrow[ul, "\psi_\alpha^{-1}"'] \\
\varphi_\beta(U_\beta) \times \mathbf{R}^n & & \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbf{R}^n \arrow[ll, "{(\varphi_\beta \cdot \varphi_\alpha^{-1}, g_{\beta\alpha} \cdot \varphi^{-1})}"'] \arrow[u, "{(\varphi_\alpha^{-1}, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
(y^1, \cdots, y^m, b^1, \cdots, b^n) = \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x^1, \cdots, x^m), g_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(x)) \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}\right),
$$

或简化为

$$
(y, b) = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x), g_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(x))a).
$$

这就是局部平凡系之间的**坐标变换公式**.

例 1 设 $\xi = \{E, M, \pi, GL(n,\mathbf{R}), \mathbf{R}^n, \mathscr{E}\}$ 为 C^∞ 向量丛，如果存在丛图卡 $(E, \psi) \in \mathscr{E}$，则称 ξ 为 C^∞ **平凡向量丛**. 此时，$\psi: E = \pi^{-1}(M) \to M \times \mathbf{R}^n$ 为 C^∞ 同胚，$\psi_p = \psi|_p : E_p = \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times \mathbf{R}^n$ 为 C^∞ 线性同构.

定义 2 设 $\xi = \{E, M, \pi, GL(n,\mathbf{R}), \mathbf{R}^n, \mathscr{E}\}$ 为 C^∞ 向量丛，如果对 $0 \leqslant k \leqslant +\infty$ 存在 C^k 映射 $\sigma: M \to E$，使 $\sigma(p) \in E_p$，$\forall\, p \in M$，即 $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$，则称 σ 为 ξ 上的一个 **C^k 截面**或 **C^k 向量场**.

不难看出，σ 为 ξ 上的一个 C^k 截面$\Leftrightarrow$对任何 $(\pi^{-1}(U),\psi)\in\mathscr{E}$，$(U,\varphi)$，$\{x^i\}$ 为 M 上的局部坐标系，$\sigma(p)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma^i(p)\psi_p^{-1}(e_i)$ 和 σ^i：$U\Leftrightarrow\mathbf{R}$ 为 C^k 函数(即 $\sigma^i(\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m))$ 为 $x^1,\cdots,x^m$ 的 C^k 函数).

如果 $\xi=\{E,M,\pi,GL(n,\mathbf{R}),\mathbf{R}^n,\mathscr{E}\}$ 为秩 n 的 C^∞ 向量丛，则它有一个特殊的 **0 截面** $\sigma_0:M\to E,\sigma_0(p)=O_p\in E_p$. 于是，$\sigma_0:M\to\sigma_0(M)=\{O_p|p\in M,O_p$为 E_p中的零向量$\}$为 C^∞ 同胚. 由此，我们将 M 和 O 截面的象 $\sigma_0(M)$ 视作相同.

记$C^k(\xi)=C^k(E)=\{\sigma|\sigma:M\to E\}$ 为 C^k 截面$\}$，对 $\sigma,\eta\in C^k(\xi),\lambda\in\mathbf{R}$，定义加法和数乘如下：

$$(\sigma+\eta)(p)=\sigma(p)+\eta(p),$$
$$(\lambda\,\sigma)(p)=\lambda\cdot\sigma(p),\qquad\forall\ p\in M.$$

容易验证 $C^k(\xi)$ 在上述加法和数乘下形成一个 $\mathbf{R}$ 上的向量空间. 如果 $m\geqslant 1$，设 (U,φ)，$\{x^i\}$ 为 M 的局部坐标系，使 $C^m(1)=\{x\in\mathbf{R}^m||x^i|\leqslant 1,i=1,\cdots,m\}\subset\varphi(U)$，$(\pi^{-1}(U),\psi)$ 为 E 的丛图卡. 再选 C^∞ 函数 $f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$，使得 $f|_{C^m(\frac{1}{2})}\equiv 1,f|_{\mathbf{R}^m-C^m(1)}\equiv 0$. 显然，$\{(x^1)^l f\circ\varphi(p)\psi_p^{-1}(e_1)|l=0,1,2,\cdots\}$ (自然视作 ξ 上的整体 C^k 截面)是线性无关的(事实上，对任何 l，选 $u=x^1$ 为 $u_1,\cdots,u_{l+1}$ 满足

$$\begin{vmatrix}1 & u_1 & u_1^2 & \cdots & u_1^l\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & u_{l+1} & u_{l+1}^2 & \cdots & u_{l+1}^l\end{vmatrix}=\prod_{i<j}(u_j-u_i)\neq 0).$$

因此上述向量空间是无限维的. 除上述加法外，对 $\lambda\in C^k(M,\mathbf{R})$ (M 上 C^k 函数的全体)，$\sigma,\eta\in C^k(\xi)$. 我们定义：$(\lambda\sigma)(p)=\lambda(p)\cdot\sigma(p),\forall\ p\in M$. 于是，$C^k(\xi)$ 成为 $\mathbf{R}$ 值函数的代数上的一个模.

例 2 我们知道，M 上每一个点 p 处，所有的切向量形成了一个 m 维的切空间 T_pM. 自然从沿 M 的一族切空间得到一个秩为 m 的 C^∞ 向量丛，称为切丛，它是 $2m$ 维 C^∞ 流形.

设 $(M,\mathscr{D})$ 是 m 维 C^∞ 流形，M 的**切丛** $\xi=\{TM,M,\pi,GL(m,M),\mathbf{R}^m,\mathscr{E}\}$ 定义如下：

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM,$$

$\pi: TM \to M, \pi(T_pM) = \{p\}$，即 $\pi(X_p) = p, X_p \in T_pM$. $\pi^{-1}(p) = T_pM$ 为 p 点处的纤维. 对任何 $(U,\varphi),\{x^i\} \in \mathscr{D}$，定义局部平凡化为 ψ: $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{p\in U} T_pM \to U \times \mathbf{R}^m, \psi(X_p) = \psi(\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (p,a^1,\cdots, a^m)$，而 $\psi_p = \psi|_p: \pi^{-1}(p) = T_pM \to \{p\}\times \mathbf{R}^m$ 为线性同构. 由于 ψ 为一一映射，故从 $U\times \mathbf{R}^m$ 的拓扑自然导出了 $\pi^{-1}(U)$ 的拓扑，使 ψ 为同胚. 显然，$\tau^* = \{\pi^{-1}(U)$ 中的开集 $|(U,\varphi)\in \mathscr{D}\}$ 为 TM 的拓扑基，它唯一地确定了 TM 的一个拓扑 τ. 明显地，TM 为 T_2 (Hausdorff)空间，$\pi^{-1}(U)$ 为其开子集，且 $(\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m})\circ\psi: \pi^{-1}(U)\to\varphi(U)\times \mathbf{R}^m, (\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m})\circ\psi(X_p) = (\varphi(p),a^1,\cdots,a^m) = (x^1,\cdots,x^m,a^1,\cdots,a^m)$ 为同构，因而 TM 为 $2m$ 维拓扑流形.

令 $\mathscr{E}' = \{(\pi^{-1}(U),\psi)|(U,\varphi)\in\mathscr{D}\}$，如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\}\in \mathscr{D},(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^i\}\in\mathscr{D}$，则当 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$ 时，有

$$\begin{aligned}(p,b^1,\cdots,b^m) &= (p,g_{\beta\alpha}(p)a) = \psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(p,a^1,\cdots,a^m)\\ &= \psi_\beta(\sum_{i=1}^m a^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = \psi_\beta(\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^i}a^i)\frac{\partial}{\partial y^j}|_p)\\ &= (p,\sum_{i=1}^m\frac{\partial y^1}{\partial x^i}a^i,\cdots,\sum_{i=1}^m\frac{\partial y^m}{\partial x^i}a^i),\end{aligned}$$

其中

$$g_{\beta\alpha}(p) = \begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^m}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^m}{\partial x^m}\end{pmatrix}_{\varphi_\alpha(p)} \in GL(m,\mathbf{R}),$$

显然，$g_{\beta\alpha}: U_\alpha\cap U_\beta\to GL(m,\mathbf{R})$ 为 C^∞ 映射. 又因为

$$\begin{aligned}&(y^1,\cdots,y^m,b^1,\cdots,b^m)\\ &= ((\varphi_\beta,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m})\circ\psi_\beta)\circ((\varphi_\alpha,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m})\circ\psi_\alpha)^{-1}(x^1,\cdots,x^m,a^1,\cdots,a^m)\end{aligned}$$

$$= (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x^1, \cdots, x^m), \sum_{i=1}^m \frac{\partial y^1}{\partial x^i} a^i, \cdots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial y^m}{\partial x^i} a^i)$$

(简记为 $(y,b) = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x), g_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha^{-1}(x))a))$，故 TM 为 $2m$ 维 C^∞ 流形，而 $\mathscr{E}' = \{(\pi^{-1}(U), (\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m}) \circ \psi) \mid (U, \varphi) \in \mathscr{D}\}$ 为其微分构造的基. 由

$$(x^1, \cdots, x^m) = \varphi \circ \pi \circ ((\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m}) \circ \psi)^{-1}(x^1, \cdots, x^m, a^1, \circ, a^m)$$

和

$$(\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m}) \circ \psi \circ ((\psi, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m}) \circ \psi)^{-1} = \mathrm{Id}_{\varphi(U) \times \mathbf{R}^m}$$

可知，π 和 ψ 分别为 C^∞ 映射和 C^∞ 同胚. 于是，由 $\mathscr{E}'$ 唯一地确定了 TM 的一个丛图册 $\mathscr{E}$，使 ξ 或 TM 成为 M 上的一个秩为 m 的 C^∞ 向量丛，即切丛.

M 上 $C^k(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$ 截面 $X: M \to TM$($\pi X = \mathrm{Id}_M: M \to M$ 或对 $\forall\ p \in M$，在映射 X 下对应于 $X_p \in T_pM$) 称为 M 上的 **C^k 切向量场**. 记 M 上的 C^k 切向量场的全体为 $C^k(TM)$.

容易证明：

定理 1 设 $(M, \mathscr{D})$ 为 m 维 C^∞ 流形，则

(1) X 为 M 上的 $C^k(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$ 切向量场$\Leftrightarrow$对任何 $(U, \varphi), \{x^i\} \in \mathscr{D}, X_p = \sum_{i=1}^m a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, p \in U$ 有 $a^i \in C^k(U, \mathbf{R})$；

(2) X 为 M 上的 C^∞ 切向量场$\Leftrightarrow$对任何 $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ 有 $Xf \in C^\infty(M, \mathbf{R})$.

证明 (1) $X: M \to TM$ 为 C^k 截面$\Leftrightarrow$对任何 $(U, \varphi), \{x^i\} \in \mathscr{D}$，

$$(\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m}) \circ \psi \circ X \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \varphi(U) \times \mathbf{R}^m,$$

$$(\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m}) \circ \psi \circ X \circ \varphi^{-1}(x) = (x, a^1 \circ \varphi^{-1}(x), \cdots, a^m \circ \varphi^{-1}(x))$$

是 C^k 类的$\Leftrightarrow$对任何 $(U, \varphi), \{x^i\} \in \mathscr{D}, a^i \in C^k(U, \mathbf{R})$.

(2) ($\Rightarrow$) 对任何 $(U, \varphi), \{x^i\} \in \mathscr{D}$，在 U 中

$$Xf = (\sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}) f = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i},$$

由 $f \in C^{\infty}(M,\mathbf{R})$，$X$ 为 M 上的 C^{∞} 切向量场和(1)可知 $a^i, \frac{\partial}{\partial x^i}f \in C^{\infty}(U,\mathbf{R})$，故 $Xf|_U \in C^{\infty}(U,\mathbf{R})$，从而 $Xf \in C^{\infty}(M,\mathbf{R})$.

($\Leftarrow$) 对 $\forall\, p \in M$，取 p 的局部坐标系 (U,φ)，$\{x^i\} \in \mathscr{D}$，使 $p \in U$. 由于 $X = \sum_{i=1}^{m}(Xx^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$，构造 $f_i \in C^{\infty}(M,\mathbf{R})$，使 $f_i|_V \equiv x^i|_V$，其中 $V \subset U$ 为 p 的更小的开邻域. 于是，

$$(Xx^i)|_V \equiv (Xf_i)|_V$$

是 C^{∞} 类的，故 $X|_V$，从而 X 为 C^{∞} 类的.

例 3 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 m 维 C^{∞} 流形，$T_p^*M = \{\theta \mid \theta: T_pM \to \mathbf{R}$ 为线性函数$\}$，设 $\theta, \eta \in T_p^*M$，定义

$$(\theta + \eta)(X) = \theta(X) + \eta(X),$$
$$(\lambda\theta)(X) = \lambda \cdot \theta(X),$$

则 $\theta + \eta, \lambda\theta \in T_p^*M$，易证 T_p^*M 为 m 维向量空间，它是切空间 T_pM 的对偶空间，称为 p 点处的**余切空间**，T_p^*M 中的元素称为**余切向量**. 类似于切丛的讨论，可以定义**余切丛** $\xi^* = \otimes^{0,1}\xi = \{T^*M, M, \pi, GL(m,\mathbf{R}), \mathbf{R}^m, \mathscr{E}\}$，其中 $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$，$\pi: T^*M \to M$，$\pi(T_p^*M) = \{p\}$，即 $\pi^{-1}(p) = T_p^*M$.

容易看出，在两个局部平凡化系中，

$$\begin{aligned}
(p,\bar{\theta}_1,\cdots,\bar{\theta}_m) &= \left(p, g_{\beta\alpha}(p)\begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots \\ \theta_m\end{pmatrix}\right) \\
&= \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p,\theta_1,\cdots,\theta_m) = \psi_\beta\left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i \mathrm{d}x^i|_p\right) \\
&= \psi_\beta\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\theta_i\right)\mathrm{d}y^j|_p\right) \\
&= \left(p, \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial y^1}\theta_i, \cdots, \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial y^m}\theta_i\right),
\end{aligned}$$

其中

$$g_{\beta\alpha}(p)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^m} & \cdots & \dfrac{\partial x^m}{\partial y^m}\end{pmatrix}_{\varphi_\alpha(p)}\in GL(m,\mathbf{R}).$$

显然，$g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(m,\mathbf{R})$ 为 C^∞ 映射. 又因为

$$\begin{aligned}&(y^1,\cdots,y^m,\bar\theta_1,\cdots,\bar\theta_m)\\&=(\varphi_\beta,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m})\circ\psi_\beta\circ((\varphi_\alpha,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m}\circ\psi_\alpha)^{-1}(x^1,\cdots,x^m,\theta_1,\cdots,\theta_m)\\&=(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\cdots,x^m),\sum_{i=1}^m\frac{\partial x^i}{\partial y^1}\theta_i,\cdots,\sum_{i=1}^m\frac{\partial x^i}{\partial y^m}\theta_i),\end{aligned}$$

所以 T^*M 为 $2m$ 维 C^∞ 流形，而

$$\mathscr{E}'=\{(\pi^{-1}(U),(\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m})\circ\psi\,|\,(U,\varphi)\in\mathscr{D}\}$$

为其微分构造的基. 由

$$(x^1,\cdots,x^m)=\varphi\circ\pi\circ((\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m})\circ\psi)^{-1}(x^1,\cdots,x^m,\theta_1,\cdots,\theta_m)$$

和

$$(\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m})\circ\psi\circ((\varphi,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^m})\circ\psi)^{-1}=\mathrm{Id}_{\varphi(U)\times\mathbf{R}^m}$$

可知，π 和 ψ 分别为 C^∞ 映射和 C^∞ 同胚. 于是 $\mathscr{E}'$ 唯一地确定了 T^*M 的一个丛图册 $\mathscr{E}$，使 ξ^* 或 T^*M 成为 M 上的一个秩为 m 的 C^∞ 向量丛，即余切丛. 类似 C^k 切向量场可定义 C^k **余切向量场**.

例 4 设 $\theta:T_p^*M\underbrace{\times\cdots\times}_{r}T_p^*M\times T_pM\underbrace{\times\cdots\times}_{s}T_pM\to\mathbf{R}$ 为偏线性函数，即对 $\forall\ W_i,U_i\in T_p^*M,X_j,Y_j\in T_pM,\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ 有

$$\begin{aligned}&\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},\lambda W_i+\mu U_i,W_{i+1},\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)\\&=\lambda\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},W_i,W_{i+1},\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)\\&\quad+\mu\theta(W_1,\cdots,W_{i-1},U_i,W_{i+1},\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)\\&\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_{j-1},\lambda X_j+\mu Y_j,X_{j+1},\cdots,X_s)\\&=\lambda\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_{j-1},X_j,X_{j+1},\cdots,X_s)\\&\quad+\mu\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_{j-1},Y_j,X_{j+1},\cdots,X_s),\end{aligned}$$

则称 θ 为 TM 上的 (r,s) **型张量**，r 为**逆变阶数**，s 为**协变阶数**，(r,s) 型张量的全体为 $\bigotimes^{r,s}T_pM$. θ 在 M 的两个局部坐标系 $(U_\alpha,$

$\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$ 和 (U_β,φ_β)，$\{y^i\}$ 中的表示分别为

$$\theta=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{m}\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s}$$

和

$$\theta=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{m}\bar{\theta}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial y^{i_r}}\otimes\mathrm{d}y^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}y^{j_s},$$

其中

$$\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\theta(\mathrm{d}x^{i_1},\cdots,\mathrm{d}x^{i_r};\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}),$$

$$\bar{\theta}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\theta(\mathrm{d}y^{i_1},\cdots,\mathrm{d}y^{i_r};\frac{\partial}{\partial y^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^{j_s}}),$$

以及

$$\bar{\theta}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\ l_1,\cdots,l_s=1}}^{m}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}}\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}.$$

由此公式并仿例 2 立即得到 (r,s) **型的 C^k 张量丛**，其中 $\otimes^{r,s}TM=\bigcup\limits_{p\in M}\otimes^{r,s}T_pM$. 同例 2 可定义 (r,s) **型 C^k 张量场**.

类似定理 1 有：

定理 2 设 $(M,\mathscr{D})$ 为 m 维 C^∞ 流形，则

(1) θ 为 M 上的 (r,s) 型 $C^k(0\leqslant k\leqslant+\infty)$ 张量场 $\Leftrightarrow$ 对任何 (U,φ)，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$，$p\in U$，

$$\theta_p=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{m}\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(p)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s},$$

有 $\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\in C^k(U,\mathbf{R})$.

(2) θ 为 M 上的 (r,s) 型 C^∞ 张量场 $\Leftrightarrow$ 对任何 $W_1,\cdots,W_r\in C^\infty(T^*M)$ 和任何 $X_1,\cdots,X_s\in C^\infty(TM)$，$\theta(W_1,\cdots,W_r,X_1,\cdots,X_s)$ 为 M 上的 C^∞ 函数.

证明 (1) $\theta:M\to\otimes^{r,s}TM$ 为 C^k 映射 $\Leftrightarrow$ 对任何 (U,φ)，$\{x^i\}\in$