丁伯民 蔡仁良 编著

压力容器设计

——原理及工程应用

中国石化出版社

压力容器设计

——原理及工程应用

丁伯民
蔡仁良 编著

中国石化出版社

(京)新登字048号

内 容 提 要

本书分两部分.第一部分为按规则设计,从简单的力学基础入手,结合工程应用,深入浅出地介绍了压力容器各部件的设计方法及理论依据.重点围绕着我国有关的压力容器设计规定,说明了其中各计算公式的由来及近似处理的依据。第二部分为按分析设计,从简单的概念着手,结合目前国外的按分析设计规范,较系统地介绍了这一新的设计方法及其理论依据。

本书可供从事压力容器设计、制造、检验、使用和管理的工程技术人员阅读,也可供大专院校有关专业师生参考。

压力容器设计

——原理及工程应用

丁伯民
蔡仁良 编著

中国石化出版社出版

(北京朝阳区太阳宫路甲1号 邮政编码:100029)

海丰印刷厂排版

海丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米 16开本 31 1/4印张 790千字 印1—7000

1992年7月北京第1版 1992年7月北京第1次印刷

ISBN 7-80043-185-1/TQ·094 定价:16.00元

前　言

近几年来，我们应有关设计院、研究院、化机制造厂、化工厂和压力容器学会的邀请，多次为在职的从事压力容器设计、制造、检验、使用和管理的工程技术人员讲解压力容器设计规范和技术进展，本书就是作者以所编的讲义和讲稿为基础，加以补充和修订而成。

对压力容器设计、制造、检验、使用和管理，除应对各具体工作的有关专业范围比较熟悉之外，就压力容器的强度和刚度计算而言，必须掌握一定的弹、塑性力学以及板壳理论基础，这样就能比较透彻地理解常规设计中各计算公式的来源及其近似处理的依据，也有助于理解分析设计的内在涵义。为此，本书除涉及“设计规定”所包括的内容外，适当列入了一些力学基础；同时，在分析各部件的设计公式时也注意到前后呼应，相互联系。

分析设计在国内是一个全新的内容，我们仅是借鉴于国外规范写一些我们的理解和体会。

本书共分两篇，第一篇第一章第一、二节，第二章，第三章第一、二、三节，第五章，第六章，第七章以及第二篇由丁伯民执笔；第一篇第一章第三、四节，第三章第四节，第四章，第八章由蔡仁良执笔。全书由丁伯民主编。吴东棣教授审阅了全书。

本书可供从事压力容器设计、制造、检验、使用和管理的工程技术人员继续教育进修之用，对化工机械专业和有关专业的学生和教学人员也有参考价值。

编者水平有限，书中难免存在缺点和错误，热忱期望广大读者批评指正。

丁伯民　蔡仁良

目　　录

第一篇　按规则设计

第二篇 按分析设计

第一章　弹塑性力学及板壳理论基础

压力容器及其各类受压元件大多数由平板和壳体组成，而板、壳在压力或温差载荷作用下会引起弹性应变或塑性应变，相应地在受压部件的各处引起弹性应力或塑性应力。因而，板壳理论是深入分析压力容器及其元件应力、应变状态的基础。解决一般的板壳理论必须用到弹性力学，因而本章所讨论的弹塑性力学及板壳理论基础，是为解决压力容器设计而编写的。

第一节　弹性力学基础

弹性力学是研究弹性物体在外载（包括机械载荷和温差载荷）作用下产生应力、应变和位移的一门科学。弹性力学和材料力学相比，在研究对象、基本假设和研究方法等方面有相同的地方，也有不同的地方。

材料力学基本上只研究杆状构件在拉、压、剪切、弯曲、扭转作用下的应力和应变。而对非杆状构件，例如板、壳以及其它实体结构在外载作用下的应力和应变，或对杆状构件作进一步的、精确的分析，只能应用弹性力学。所以弹性力学和材料力学相比，其研究对象更为广泛，解决问题更为有力，研究方法更为严密。

弹性力学的假设和材料力学的假设基本相同，它们主要是：

(1) 物体是连续的。物体由连续介质组成，没有空隙。因此，物体中的应力、应变和位移等量都是连续的，都可以用该点位置坐标的连续函数表示。

(2) 物体是均质的和各向同性的。物体各点与各方向上的组分相同。因此，物体各部分的物理性质和机械性能等均不随坐标位置和方向而变。钢材虽然由各向异性的晶粒组成，但由于晶粒非常细小，而且杂乱排列，所以钢材的宏观性质，可以认为是各向同性的。在弹性力学计算中，也忽略了因钢材的辗轧方向而实际上存在的各向异性现象。而木材则看作为是各向异性的。

(3) 物体是完全弹性的。物体在外载作用下引起变形，卸去外载后，物体完全恢复其原来形状而不留任何残余变形。同时还假设材料服从虎克定律，即应力与应变成正比。

(4) 物体的变形是微小的。在外载作用下物体因变形而产生的位移，与物体变形前的尺寸相比是微小的。因此，在微小变形下弹性力学中的微分方程是线性的，据此而研究的对象属于理想弹性体的线性问题，即线弹性力学。

在材料力学中，求取物体中的应力时，常采用截面法，即假设将物体剖开，取截面一边的部分物体作为截离体，利用静力平衡条件，以求取截面上的应力。在弹性力学中，假设所研究的物体，内部由无数个微单元平行六面体而表面为无数个微单元四面体所组成。按这些单元体的平衡条件可列出一组平衡微分方程；按单元体的变形条件可列出一组几何方程；由于物体在变形后仍保持连续而可列出变形协调方程；并可用广义虎克定律表示应力和应变之间的关系；在物体表面上还需考虑内部应力和外部载荷的平衡，即边界条件。这样，就有足够的微分方程来求解未知的应力、应变和位移值。为了比较真实地反映某点的应力、应变和位移值，就必须以无限逼近于该点大小的微单元体作为分析问题的基础。对于比较简单的问题，

在特定条件下可以简化上述各有关方程而直接求解；对于比较复杂的问题，往往由于数学上的原因而难于直接求解，此时就要用逆解法或半逆解法求解，即先设定一部或全部解答，如所设解答能满足所有的微分方程，同时满足边界条件，则所设解答就是正确的。对于比较复杂的实际问题，则往往采用有限单元法等近似方法求解。

一、线弹性力学基本方程

为了研究在外载作用下弹性体内部的应力分布，先研究作用在一个微单元体上的应力以及与它对应的应变、位移及其相互关系。在此基础上，再研究整个弹性体内所有微单元体的这些量的关系，也就是各个微单元体所必须满足的其它条件，从而得到对整个弹性体进行应力应变分析的基本方程。

（一）空间问题的基本方程

一般的弹性体都是空间物体(即立体物体)，一般的外力都是空间力系。所以任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题(即立体问题)。

(1) 以直角坐标系表示的基本方程

以直角坐标系分析空间问题中微单元体的平衡，可取微单元体的3 方向边长为dx、dy、dz，并分别平行于x、y、z坐标轴。对物体内部的任一微单元体，6个面上的应力可用图1-1表示，其中正应力用σ表示，角标x表示该正应力作用在垂直于x轴的面上，且方向沿 x 轴；剪应力用τ表示，角标xy表示该剪应力作用在垂直于y轴的面上，且方向沿x 轴。3 个坐标面上的其它应力标记依次类推。

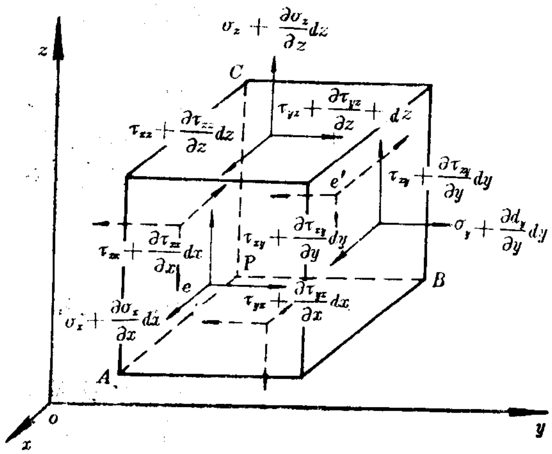

图 1-1　平行六面微单元体的应力分析

如果某微元体一个面上的外法线朝着坐标轴的正方向，则这个面可称为正面。正面上的应力就以沿坐标轴的正方向为正，沿坐标轴的负方向为负；反之，某微元体一个面上的外法线朝着坐标轴的反方向，则这个面可称为负面。负面上沿负方向的应力为正，沿坐标轴的正方向为负。图1-1各面上所示的各应力方向全为正值。

由于应力是所在点位置坐标的函数，因此，作用在此微单元六面体两对面上的应力是不同的。例如，在左面上的正应力为σ_y，则在右面上的正应力为$\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$；在左面上的一个剪应力为$\tau_{xy}$，则在右面上的剪应力为 $\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy$，余类推。

设微单元体的体积力（此处仅指重力）在x、y、z轴的三个分量为K_x、K_y、K_z，则按微单元体力矩和力的平衡条件，即取$\Sigma F=0$，$\Sigma M=0$，则可列出微单元体的平衡微分方程。

以$\Sigma F_x=0$，$\Sigma M_x=0$(以六面微元体前后两面中心的联线 ee' 作为取力矩的轴）为例，则：

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz-\sigma_x dydz+\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\right)dxdz-\tau_{xy}dxdz$$

$$+\left(\tau_{xz}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\tau_{xz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+K_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

$$\left(\tau_{zy}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}+\tau_{zy}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}-\left(\tau_{yz}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}z}{2}$$

$$-\tau_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}z}{2}=0$$

在y、z轴方向仿此。所得平衡式经略去高阶微量并简化后，可归纳为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+K_x=0\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+K_y=0\\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+K_z=0\end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

以及

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}$$
$$\tau_{zx}=\tau_{xz}$$
$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$

即剪应力互等定律。

式（1-1)即为以直角坐标系表示的空间问题的平衡微分方程。其中σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}这六个应力分量完全可以确定空间任一指定点P的应力状态。式(1-1)3个方程中应用了剪应力互等定律后有6个应力分量，所以还必须借助其它方程才能求解。

物体在受外载后各点的位移是不同的，因此各点的位移是该点坐标位置的函数。微单元体内任一点P在x-y平面上的投影示于图1-2，其中PA、PB是受载前的线段，受载后则分别移至P′A′、P′B′。

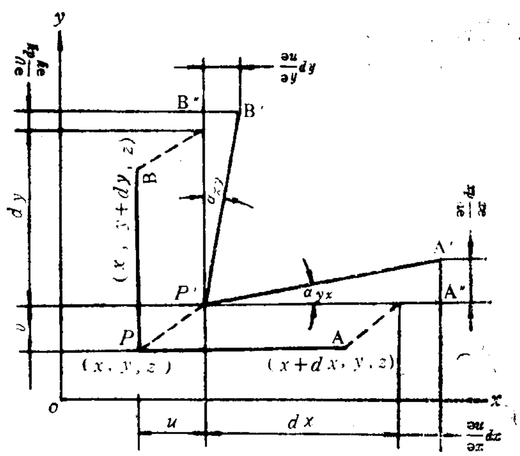

图 1-2　直角坐标系中的应变分析

取PA$=\mathrm{d}x$，PB$=\mathrm{d}y$，P点在x、y、z方向的位移分量用u、v、w表示。则A点在x方向的位移分量为$u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$。因此，线段PA的正应变为：

$$\varepsilon_x=\frac{\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

分析线段PA和PB在受载变形前后的直角改变，亦即剪切应变γ_{xy}，这个剪切应变由转角α_{yx}和α_{xy}两部分组成。

$$\alpha_{yx}=\frac{\left(v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-v}{\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1+\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

上式中，应用了小变形假设，即取$1+\frac{\partial u}{\partial x}\doteq 1$。

同理，$\quad \alpha_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}$

因此，$\quad \gamma_{xy}=\alpha_{yx}+\alpha_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$

同样，据微单元体在y、z方向的位移分量以及各点在y-z、x-z平面上的投影，可归纳为：

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\\
&\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\\
&\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

式（1-2）即为以直角坐标系表示的空间问题的几何方程。

式（1-2）6个方程中有6个应变分量和3个位移分量共九个未知量，所以还必须借助其它方程才能求解。

弹性体内应力和应变之间的关系可用广义虎克定律求得：

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)] \quad \gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}\\
&\varepsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_x+\sigma_z)] \quad \gamma_{yz}=\frac{1}{G}\tau_{yz}\\
&\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)] \quad \gamma_{zx}=\frac{1}{G}\tau_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

式（1-3）即为以直角坐标系表示的空间问题的物理方程。其中G为剪切弹性模数，与拉压弹性模数E、泊松系数μ之间的关系为：

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

式（1-1）、式（1-2）、式（1-3）共15个微分方程中有6个应力分量（σ_x、σ_y、σ_z、$\tau_{xy}=\tau_{yx}$、$\tau_{yz}=\tau_{zy}$、$\tau_{zx}=\tau_{xz}$），6个应变分量(ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx})和3个位移分量（u、v、w）等15个未知量，按理是可以求解的。对任一弹性物体的表面微单元体，还必须满足外载和内力的平衡即边界条件。对压力容器的受载部件而言，边界条件往往都比较简单，如对承受内压p_i和外压p_0作用的厚壁筒体，其边界条件为：

$$\sigma_r|_{r=Ri}=-p_i$$
$$\sigma_r|_{r=R0}=-p_0$$

故不另行讨论。另外，按照弹性物体的连续性假说，物体在变形前后都要连续，所以按照式（1-2）所表示的6个应变分量之间必须满足一定的关系——应变连续方程。所以，15个微分方程加上应变连续方程和边界条件，从原则上讲是足以求解15个未知量的。

由式（1-2），取ε_x对于y的二阶偏导数和ε_y对于x的二阶偏导数之和，得：

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

由式（1-2）γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}分别对z、x、y求一阶偏导数，得：

$$\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$$

$$\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x}$$

$$\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

取上式中的第二、第三式相加并减去第一式，得：

$$\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}=2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

把上式对z求一阶偏导数，得：

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial z}=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}$$

和此法相同，可推得另外两个关系式，可归纳为：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\partial z}\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}4)$$

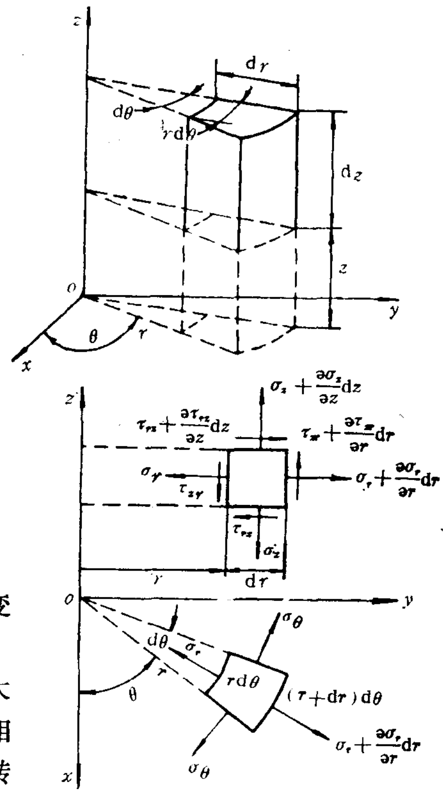

图 1-3　圆柱坐标系微单元体的应力分析

式（1-4）即以直角坐标系表示的空间问题中以应变分量为基础的应变连续方程，或称相容条件。

相容条件也可用应力分量表示。求解静力问题时大多以应力分量作为基本未知量，此时，需将式（1-4）相容条件中的应变未知量由式（1-3）物理方程的关系转换成以应力分量表示的相容条件。

（2）轴对称问题的基本方程

一般空间问题通常都用直角坐标系表示，而很少用圆柱坐标系表示。但轴对称的空间问题则总是以圆柱坐标系表示。压力容器的封头、壳体及其它受压元件绝大多数均为轴对称形式而很少为一般空间问题，故此处仅讨论轴对称问题的基本方程。

所谓轴对称问题，即它的几何形状、受载方式及支承条件都对称于旋转中心轴。据此，

轴对称问题的应力、应变和位移也是对称于旋转中心轴的，即仅是半径r当轴线长度z的函数而和转角θ无关。求解此类问题，采用圆柱坐标系（r、θ、z）远比采用直角坐标系(x、y、z）为方便。

以圆柱坐标系分析轴对称问题中微单元体的平衡，常取相距dr的两个圆柱面，互相成$d\theta$的两个垂直面和相距dz的两个水平面从受载物体上切出一微元六面体，如图 1-3 所示。和直角坐标系相仿，仅以r、θ、z相应取代x、y、z，并考虑到应力、应变和位移的轴对称性，故物体变形时在周向和径向之间、周向和轴向之间不存在相对移动，即$\tau_{\theta r}=\tau_{r\theta}=0$，$\tau_{\theta z}=\tau_{z\theta}=0$，$\gamma_{\theta r}=0$，$\gamma_{\theta z}=0$，$\sigma_\theta$沿$\theta$方向也无增量，即$\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}=0$，因而轴对称问题中只有四个应力分量$\sigma_r$、$\sigma_\theta$、$\sigma_z$、$\tau_{rz}=\tau_{zr}$。

取图1-3微单元体沿r和z方向的力平衡，并简化后可得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+K_r=0\\ \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial r}+\frac{\tau_{zr}}{r}+K_z=0\end{aligned}\right\}\tag{1-5}$$

式（1-5）即为以圆柱坐标系表示的轴对称问题的平衡微分方程。

轴对称问题中只有 4 个应变分量，ε_r、ε_θ、ε_z、γ_{zr}。和在直角坐标系中推导空间问题的几何方程相似，可得其几何方程为：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r&=\frac{\partial u}{\partial r}\\ \varepsilon_\theta&=\frac{u}{r}\\ \varepsilon_z&=\frac{\partial w}{\partial z}\\ \gamma_{zr}&=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\end{aligned}\right\}\tag{1-6}$$

相应地，轴对称问题的物理方程为：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r&=\frac{1}{E}[\sigma_r-\mu(\sigma_\theta+\sigma_z)]\\ \varepsilon_\theta&=\frac{1}{E}[\sigma_\theta-\mu(\sigma_z+\sigma_r)]\\ \varepsilon_z&=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_r+\sigma_\theta)]\\ \gamma_{zr}&=\frac{1}{G}\tau_{zr}\end{aligned}\right\}\tag{1-7}$$

对于轴对称问题，其边界条件仍按边界处的受载情况具体决定；另外，在求解过程中也必须满足应变连续条件，此处从略。

（二）平面问题的基本方程

当物体具有某种特殊形状且受到某种特殊的外载和支承时，空间问题可以简化为平面问

题，此时只需要考虑平行于平面的应力或位移。

平面问题是空间问题的一种特例。它有平面应力和平面应变两种类型。

对平面应力问题可讨论如下：设有一物体，其一个方向的尺寸远小于其它两个坐标方向的尺寸。例如平板，受到平行于板面且不沿厚度变化的外载作用。同时，体力(此处指重力)和支承也平行于板面且不沿厚度变化，即外载都作用在xoy平面内而没有z轴方向的分力，在板的两面也没有外力作用。见图1-4。据此，在平板前后两面的各点没有任何应力，即

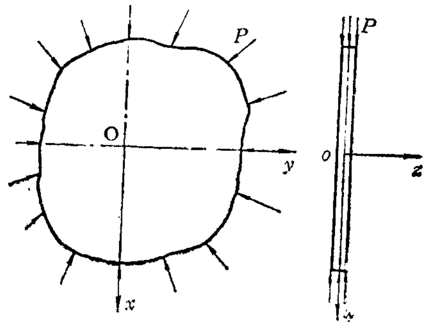

图 1-4　平面应力状态

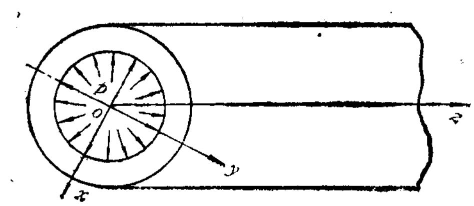

图 1-5　平面应变状态

$$\sigma_z=0$$
$$\tau_{yz}=0$$
$$\tau_{zx}=0$$

因为平板在厚度方向的尺寸远小于平板平面方向的尺寸，外力又不沿厚度变化，所以可近似地认为在整个板的表面和内部各点都符合上述关系（实际上，由于板在厚度方向的尺寸并不能忽略，所以只有在板的两端表面处才严格符合上述关系，在稍离表面处的地区，只能近似地符合上述关系）。这样，只剩下平行于xoy平面的 3 个应力分量 σ_x、σ_y、$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，也可以近似地认为是不沿平板厚度而变化的，即这三个应力分量以及相应的应变分量和位移分量与z轴无关，仅是 x 和 y 的函数。由于薄板前后两个自由表面上不受任何约束，且厚度很小，板内任何点在z方向的变形都不受限制，故$\varepsilon_z\neq0$，这类问题称为平面应力问题。

对平面应变问题可讨论如下：设有一物体，其一个方向的尺寸远大于其它两个坐标方向的尺寸，例如沿z 轴方向的长度远远大于 ox、oy 两个坐标方向的尺寸，且与z轴相垂直的横截面无论在几何形状、受载情况和支承条件等各个方面都相同，受到与z轴相垂直且不随z轴变化的外载和支承作用的水坝或筒体，如图 1-5 所示。据此，从理论上分析，由于物体在z方向很长，所以在它全长范围内的任一截面都可以看成是在整个长度的中间，因而就可看成任一截面都将没有z方向的位移（实际上，由于z方向长度为有限量，且两端的变形不一定受到限制，所以只是在远离两端的截面才接近于这一情况）。因而 $\varepsilon_z=0$ 而沿x和y方向的位移则与z轴无关，应变仅发生在与xoy坐标面相平行的平面内，即物体沿长度垂直方向的各截面在受外载作用而变形后仍保持沿长度的垂直方向。这类问题称为平面应变问题。

（1）以直角坐标系表示的平面问题的基本方程

平面问题的平衡微分方程，可以按照相应坐标系空间问题的平衡微分方程（1-1）根据平面问题的特性（$\tau_{yz}=\tau_{zy}=0$，$\tau_{zx}=\tau_{xz}=0$，$\sigma_z=0$或$\varepsilon_z=0$）简化而得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+K_x=0\\\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+K_y=0\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}8)$$

几何方程则按空间问题的几何方程式（1-2），根据平面问题的特性简化而得：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{1-9}$$

物理方程则按空间问题的物理方程式（1-3），根据平面问题的特性简化而得：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\ \gamma_{xy}&=\frac{1}{G}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{1-10}$$

应变连续方程则按空间问题的应变连续方程式（1-4），根据平面问题的特性简化而得：

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

当采用应力分量表示时，可由式（1-10）的关系代入上式而得：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial K_x}{\partial x}+\frac{\partial K_y}{\partial y}\right)$$

在不计体积力或体积力为常量时(如压力容器的受载部件，在一般情况下不计钢材自重，即使计及，在大多数情况下也为常量）可得：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0\tag{1-11}$$

应该指出的是式（1-8）～式（1-11）是指平面问题都适用的有关方程，但在平面应力或平面应变的具体条件下适当考虑：

平面应力问题　　$\sigma_z=0$，$\varepsilon_z=\frac{-\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$

平面应变问题　　$\varepsilon_z=0$，$\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$

由于存在这个区别，因此对平面应变问题而言，在按空间的物理方程式（1-3）简化时，可得：

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1+\mu}{E}[(1-\mu)\sigma_x-\mu\sigma_y]\\ \varepsilon_y&=\frac{1+\mu}{E}[(1-\mu)\sigma_y-\mu\sigma_x]\\ \gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}$$