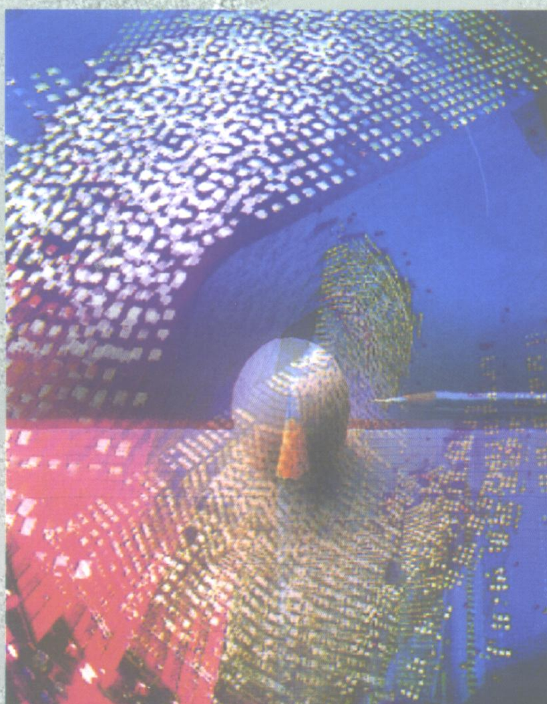
北京大学经济学丛书·高等教育经济学教材

数理金融经济学

王一鸣 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

数理金融经济学

王一鸣　编著

北京大学出版社
北　京

2005/E 14

图书在版编目(CIP)数据

数理金融经济学/王一鸣编著. —北京:北京大学出版社,2000.6

ISBN 7-301-04563-8

Ⅰ.数… Ⅱ.王… Ⅲ.①金融-经济理论 ②金融-经济数学 Ⅳ.F830

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第61513号

书　　名:数理金融经济学

著作责任者:王一鸣

责任编辑:符　丹

标准书号:ISBN 7-301-04563-8/F·0345

出　版　者:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm

电　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752027

电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn

印　刷　者:中国科学院印刷厂

发　行　者:北京大学出版社

经　销　者:新华书店

850毫米×1168毫米　32开本　10.875印张　270千字

2000年6月第一版　2000年6月第一次印刷

定　　价:18.00元

前　言

为了推动我国经济科学的繁荣，为了提高北京大学的经济科学教学和科研水平；为了使经济学这门古老而极富创新性的学科在我国改革发展中获得更广阔的生长空间，使我国的经济发展与经济改革得到更坚实的科学解释和支持；为了使我们的教学和研究真正适应时代的要求，使北京大学近百年来形成的民主与科学的传统在中国社会主义市场经济伟大建设事业中获得历史的伸展和升华；立足北京大学经济学院，我们决定编辑出版《北京大学经济学丛书》。该丛书包括《高等教育经济学教材》和《经济学术文库》两个系列。

这是一项十分艰巨的工程，因为尽管北京大学经济学院，包括其前身北京大学经济学系在内的历史可以追溯到 1912 年，但系统地编写并出版一整套教程和科研丛书，毕竟是第一次；虽然北大经济学院的教授、学者们一代代出版了许许多多的学术著述，并且许多著述在我国经济学发展中留有深刻的痕迹，但在经过近 20 年的改革开放伟大历史实践并进入社会主义市场经济全面建设的新时期，在迎接新世纪严峻挑战的历史时刻，系统地总结、反省、整理一代又一代先生心血凝成并在现在的经济学院师生手中不断拓展的学术成就，实在是极为必要的。历史赐予了我们这种可能。这是一次检阅，也是一次汇报，这是对以往的回顾，更是对未来的憧憬。

从选题上说，这套丛书涉及北大经济学院现有 5 个系科的所有领域，即经济学、国际经济与贸易、国际金融、保险学和财政学。从作者队伍来看，有学贯中西的老教授，也有锐意创新的青年学

者，更以作为我院教学科研中坚的中年学者为骨干。从学术要求来讲，每一部著作均是作者长期从事研究之所得，即使是青年作者，他们在题目上也至少学习研究数年，并有多年教学实践；每一部著作均以理论上的系统性、严密性为基础，以对现实问题更有效的解释为目标；每一部著作均以资料的翔实可靠，思想史和经济史的深入探讨为依据；每一部著作均以求实求是为精神支撑，进而直面改革发展的现实。

为使这套丛书确有其学术性格和学术水准，我们组织了以院长晏智杰教授为首的编委会，经推敲选题，精选作者，听取作者答辩，审议作者大纲并最终审定著述等环节，严格规范程序以确保质量。我们相信，在这一工程的实践中，不仅北大经济学院老一代学者的学术著述能够得到及时总结和系统反映，而且更能锤炼出一批包括院内外作者在内的青年学术带头人。这是我们的希望，也是中国经济学的希望。

不可能指望一套丛书在多大程度上解决中国经济学教学和研究所面临的命题，这并不是说我们经济学者在智慧和勤奋上不足，而是说我们所面临的实践实在是生动而复杂，我们所面临的命题艰深而陌生。面对如此伟大的实践和前无古人的难题，很难寄希望于哪个或哪些学者于书斋中获得历史性的回答，这里需要千万实践者的创造，需要无数研究者的探索。但是，这种推动历史的创造和探索，正是以我们每个人、每部著述的也许是微不足道的投入与呐喊为动力的。

这套丛书凝结着我们，尤其是每位作者的心血，是在履行对中国经济学发展和经济实践的一份责任。我们愿在校内外诸位同仁和朋友们的关怀支持下，通过这套丛书，向社会不断推出高质量的教学和科研成果。

《北京大学经济学丛书》编委会

1996 年 9 月初稿

2000 年 5 月修订

目　录

第一章　不确定情形下的效用函数

本书的主要目的是研究人们如何在不确定情形下利用有限资源最优消费和证券投资，以及分析其对证券定价的含义. 之所以要在不确定性框架中研究，是因为在现实生活中往往是具有随机性或不确定性，尤其是金融证券市场，比如说，股票未来的价格受诸多因素的影响可能上扬，也可能下跌. 投资者涉足于具有高度不确定性的金融市场，只要他是理性的，那么他的消费和证券投资选择或说行为表现必定是按照自己某种目标进行的，它是什么呢？为此我们首先将讨论个人行为的几个公理假设，这些公理导致出期望效用理论假设. 期望效用假设是我们后面证券投资分析的基础，同时它也是极普通接受的假设. 当然，既然是假设，它并不是百分之百真实的，我们后面会详谈这一点.

在微观经济学中，消费者对由一种或几种不同商品组成的商品丛进行选择消费，而这里未来发生的状态是不确定的，投资者对风险证券的组合进行选择投资. 证券组合所得的收益是投资者所关切的主题，收益是不确定的，一般用随机变量来刻画，具体地说，假定收益用货币来计算，未来或投资期末的不确定性表现为未来或投资期末具有众多可能发生的状态. 用 Ω 表示所有可能的状态集合，其中任意元素 $\omega\in\Omega$ 就代表期末的 ω 状态. 例如，假设某投资期末有三种可能情况发生 ω_1,ω_2 和 ω_3，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$. 某证券或证券组合的收益$\tilde{x}=(3.5,8,0)$意味着当状态 ω_1 发生时，收益 x_{ω_1} 为 3.5，当状态 ω_2 发生时，收益 x_{ω_2} 为 8，当状态 ω_3 发生时，收益 x_{ω_3} 为 0. 我们用证券收益来表示证券组合，记 X 为所有可能投资

组合(收益)的集合.

这里的选择与微观经济学的消费者选择虽然有不同的含义,但也有很多相似之处. 消费者或投资者的个人偏好都是指一种特殊的二元关系(binary relations).

§1.1 二元关系

集合 M 上的一个二元关系是确定 M 中两元素之间的一种联系. 比如说,张三认识李四,x 树位于 y 树的右边;小车 x 和小车 y 具有相同的颜色;x 书与 y 书内容相似等等. 细心的读者也许注意到这种二元关系所涉及的两个元素具有同质的特点. 我们回避异质元素相比较的二元关系,如 x 教授为 y 大学工作,x 人的身份证号是 y;x 人有红色小车 y 等等,这些二元关系确定的二元属于两个不同性质的集合里.

许多二元关系要求它们满足某些性质,例如,二元关系,"x 是 y 的邻居"满足对称性;如果 x 是 y 的邻居,那么 y 也是 x 的邻居;二元关系"x 位于 y 的左侧"满足线性质: 完全性、非对称性和传递性. 另外,很多二元关系却不意味任何特定性质,例如,二元关系"x 爱 y". 当然,在某些特殊的人群圈里(x 爱 y 意味着 y 也爱 x)可能该二元关系具有对称性.

注意关于二元关系潜在的性质具有非常多种类,但是我们发现只有为数很少的一些性质,比如,完全性、(非)对称性、传递性、自反性等等,在许多方面、领域具有普遍性. 因此,这里我们选择主要考虑满足完全性、传递性、自反性的二元关系.

§1.2 偏好关系

在证券组合集 X 上,定义一个二元关系 $\geq \subseteq X \times X$,若$(x,y)$

$\in \succeq$，则称$\tilde{x}$好于$\tilde{y}$，记$\tilde{x}\succeq\tilde{y}$；若$(\tilde{x},\tilde{y})\notin\succeq$，则称$\tilde{x}$不比$\tilde{y}$好，记$\tilde{x}\not\succeq\tilde{y}$.

如果二元关系$\succeq$满足：对于任意$\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\in X$，$\tilde{x}\succeq\tilde{y}$，$\tilde{y}\succeq\tilde{z}$，意味着$\tilde{x}\succeq\tilde{z}$，则称$\succeq$具有传递性.

如果二元关系$\succeq$满足：对于任意$\tilde{x},\tilde{y}\in X$，要么$\tilde{x}\succeq\tilde{y}$，要么$\tilde{y}\succeq\tilde{x}$，则称$\succeq$具有完全性.

如果二元关系$\succeq$满足：对于任意$\tilde{x}\succeq x$，有$\tilde{x}\succeq\tilde{x}$. 则称$\succeq$具有自反性.

定义 偏好关系(preference relationship)是指具有传递性、完全性、自反性的一个二元关系$\succeq$.

注 由此偏好关系$\succeq$可以诱导出无差别关系和严格偏好关系：给定偏好关系$\succeq$，称$\tilde{x}$与$\tilde{y}$是无差别的，记为$x\sim y$，如果$\tilde{x}\succeq\tilde{y}$，$\tilde{y}\succeq\tilde{x}$；称$\tilde{x}$严格好于$\tilde{y}$，记为$\tilde{x}\succ\tilde{y}$，如果$\tilde{x}\succeq\tilde{y}$，$\tilde{y}\not\succeq\tilde{x}$. 可见严格偏好关系$\succ$不具有自反性.

粗略地讲，投资者的偏好关系就是使得其比较不同投资策略优劣的一种机制. 例如，给定两种证券组合$\tilde{x},\tilde{y}$，偏好关系使得投资者识别$\tilde{x}$好于$\tilde{y}$，还是$\tilde{y}$好于$\tilde{x}$.

§1.3 偏好的效用函数表示

为了更方便地研究投资者的行为，我们希望偏好关系能用函数形式表示，这样从数学上更容易处理. 这种表示偏好关系的函数称之为效用函数. 具体地说，称函数 H 表示偏好关系$\succeq$，或者称函数 H 是偏好关系$\succeq$的效用函数表出，如果投资者认为$\tilde{x}$好于$\tilde{y}$，即$\tilde{x}\succeq\tilde{y}$，当且仅当 $H(\tilde{x})\geqslant H(\tilde{y})$，$\forall\ \tilde{x},\tilde{y}\in X$. 然而，不幸的是并不是所有的偏好关系，都能用函数来表示，下面给出一些假设条件，在这些条件假设下偏好关系可以用效用函数表示，即偏好效用函数表示定理.

定理 1.1 如果证券组合集 X 只具有有限或可数个元素时，那么定义在 $X\times X$ 上的偏好关系一定可以用实值效用函数表示.

证明(数学归纳法) 当 X 至多只有两个元素时,显然存在函数 H 表示偏好关系.

假定当 X 有 N 个元素时,偏好关系存在效用函数表示,剩下要证：当 X 有 $N+1$ 个元素时,命题成立. 不失一般性,假设 $\tilde{x}_1\preceq\tilde{x}_2\preceq\cdots\preceq\tilde{x}_N$,则存在效用函数 H 使得

$$H(\tilde{x}_1)\leqslant H(\tilde{x}_2)\leqslant\cdots\leqslant H(\tilde{x}_N).$$

由偏好关系的完全性,不妨设某个 $1\leqslant k\leqslant N-1$, $\tilde{x}_{k+1}\succ\tilde{x}_k$,使得 $\tilde{x}_{k+1}\succeq\tilde{x}_{N+1}\succeq\tilde{x}_k$,或者 $\tilde{x}_1\succeq\tilde{x}_{N+1}$,或者 $\tilde{x}_{N+1}\succeq\tilde{x}_N$.

现定义 $\tilde{x}_{N+1}$ 的函数值为

$$H(\tilde{x}_{N+1})=\begin{cases} H(\tilde{x}_{k+1}), & \text{当}\ \tilde{x}_{N+1}\sim\tilde{x}_{k+1} \\ \dfrac{1}{2}[H(\tilde{x}_k)+H(\tilde{x}_{k+1})], & \text{当}\ \tilde{x}_{k+1}\succ\tilde{x}_{N+1}\succ\tilde{x}_k \\ H(\tilde{x}_k), & \text{当}\ \tilde{x}_{N+1}\sim\tilde{x}_k \\ H(\tilde{x}_1), & \text{当}\ \tilde{x}_{N+1}\sim\tilde{x}_1 \\ H(\tilde{x}_1)-1, & \text{当}\ \tilde{x}_{N+1}\prec\tilde{x}_1 \\ H(\tilde{x}_N), & \text{当}\ \tilde{x}_{N+1}\sim\tilde{x}_N \\ H(\tilde{x}_N)+1, & \text{当}\ \tilde{x}_{N+1}\succ\tilde{x}_N \end{cases}$$

于是,将 H 扩充到 $N+1$ 个元素上,并且有

$$H(\tilde{x}_i)\geqslant H(\tilde{x}_j)\ \text{当且仅当}\ \tilde{x}_j\succeq\tilde{x}_j,\ i,j=1,\cdots,N+1.$$

因此,集合 X 上的偏好关系可以用效用函数表出.

注 当 X 具有无限不可数多个元素时,上述命题不一定再成立. 比如说,字典序的偏好关系.

对于 X 具有无限不可数个元素情形,要使偏好关系能被效用函数表示,需要更多的假设条件.

称 X 中的子集 Y 是 X 的$\succeq$-稠密子集($\succeq$-order dense),如果

对于任意$\tilde{x},\tilde{x}'\in X$，$\tilde{x}>\tilde{x}'$，存在$\tilde{y}\in Y$，使得$\tilde{x}\geq\tilde{y}\geq\tilde{x}'$. 进一步，若$Y$只有可数个元素，则称$Y$是$X$的可数$\geq$-稠密子集(countable $\geq$-order dense).

定理 1.2 对于证券组合集X，偏好关系$\geq$可以用效用函数H表出当且仅当X中存在可数$\geq$-稠密的子集.

注 偏好关系的效用函数不是惟一的. 显然，任何单调增变换后的效用函数仍是该偏好关系的效用函数，由此可见效用的绝对值是不重要的，重要的是比较元素间的相对次序(relative ranking).

§1.4 偏好的期望效用函数表示

给定偏好关系虽然可以用效用函数表示，但是当可能状态数目非常巨大时，证券组合$\tilde{x}$是一个高维的向量或说随机变量. 从而效用函数$H(\tilde{x})$难以用来分析问题，作为分析工具极为不便. 为此，我们对效用函数H进一步限制，经常求助于一类更为特殊的、性质更好的效用函数——期望效用函数. 当然，能用期望效用函数表示的偏好关系更加严格. 下面我们将讨论在什么情形下，偏好关系不单单是能被效用函数表示，而且是期望效用函数表示，即偏好的期望效用函数表示定理.

所谓偏好关系的期望效用函数表示是指存在实函数$u: R\to R$和Ω上的概率测度P，使得$\int_\Omega u(x_\omega)\mathrm{d}P(\omega)\geq\int_\Omega u(x'_\omega)\mathrm{d}P(\omega)$当且仅当$\tilde{x}\geq\tilde{x}'$.

显然，在确定情形下的效用函数表示是期望效用函数表示的特例. 因为确定情形下收益$\tilde{x}$可视为在所有状态的取值一致，例如，$\tilde{x},\tilde{x}'$是两个确定性收益或必然收益，即视为$x_\omega=z$，$x'_\omega=z'$，$\forall\ \omega\in\Omega$，其中z,z'为两个实常数，那么$E[u(x)]=u(z)$，$E[u(x')]=$

$u(z')$. 因此在确定性情形下,实函数 u 就可比较两个确定收益. 然而,在不确定情形下,并不是所有的偏好关系都有期望效用函数表示. 为了使它具有良好的期望效用表示,则需要对偏好加以限制,赋予一些"合理"的结构或假设. 一般来说,有两种方式研究期望效用理论,它们的区别在于人们度量状态是用主观概率还是用客观概率. 萨维奇(Savage, 1972)使用主观概率方法,他认为对状态概率的估计是投资者偏好的组成部分,因而状态概率因人而异,是一种主观看法和信念,从而是主观概率. 冯·纽曼和摩根斯坦(von Neumann and Morgenstern, 1953)把状态概率是已知的,或者说所有投资者看法是一致的,因而是一种客观概率. 在本书里,由于主观概率和客观概率度量的差别并不重要,因此不加以区分它们. 我们以后称 u 为冯·纽曼-摩根斯坦效用函数(NMU),它是定义在确定收益上的一元函数.

设 P_ω 是定义在状态空间 Ω 上的概率度量(可以客观或主观的). 证券组合(收益)是一个 Ω 上的随机变量,对于证券组合 $\tilde{x}$,可以定义其分布函数

$$F_{\tilde{x}}(z) \triangleq \mathrm{Prob}\{\omega \in \Omega, x_\omega \leqslant z\} \quad, \forall\ z$$

若偏好关系可以用期望效用函数表示的话,则证券组合 $\tilde{x}$ 的期望效用值为

$$E[u(\tilde{x})] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} u(z) \mathrm{d}F_{\tilde{x}}(z).$$

由此可见,如果两个证券组合 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{x}'$ 具有相同的分布函数,那么它们就有同样的期望效用值,即 $E[u(\tilde{x})] = E[u(\tilde{x}')]$. 这样,我们考虑投资者的效用值时,可以用证券组合(收益)的概率分布作为变量,代替证券组合(收益)本身. 但注意两个具有同一分布的证券组合(收益)在同一状态上的取值可能不一致,例如

$$\tilde{x} = \begin{cases} 1 & \omega_1 \text{ 状态}, \quad \dfrac{1}{2}\text{概率} \\ 0 & \omega_2 \text{ 状态}, \quad \dfrac{1}{2}\text{概率} \end{cases} \qquad \tilde{x}' = \begin{cases} 0 & \omega_1 \text{ 状态}, \quad \dfrac{1}{2}\text{概率} \\ 1 & \omega_2 \text{ 状态}, \quad \dfrac{1}{2}\text{概率} \end{cases}$$

显然，$F_{\tilde{x}}(z)=F_{\tilde{x}'}(z)$，$\forall\ z$，但$\tilde{x}\neq\tilde{x}'$.

下面为了简单起见，假设证券组合(或称证券组合收益变量)的概率分布定义在有限集合 Z 上，就是说，收益变量的取值在 Z 上，即 $x_\omega\in Z$，$\forall\ \omega\in\Omega$，$\forall\ \tilde{x}\in X$(注：其实没有一定要求所有证券组合有共同值域 Z，只要求证券组合有有限结果值).

记 P 为定义在 Z 上的概率分布的集合. 若 $p\in P$，则 $p(z)$表示在概率分布下 p 下取值为 z 的概率，这样 $p(z)\geqslant 0$，$\forall\ z\in Z$，且 $\sum\limits_{z\in Z}p(z)=1$. 证券组合$\tilde{x}$的分布函数为

$$F_{\tilde{x}}(z')=\sum_{z\leqslant z'}p(z).$$

于是，投资者对证券组合$\tilde{x}$的期望效用值为

$$E[u(\tilde{x})]=\sum_{z\in Z}u(z)p(z).$$

另外，我们也可把投资者的证券组合选择视为采取**抽彩形式**(lottery)，其中 Z 中元素为所有可能的各奖金数额，无妨设 $Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$. 则 $p(z_i)$(简记为 p_i)表示获得奖金 z_i 的概率，$i=1,\cdots,n$.

记$(z_1,p_1;z_2,p_2;\cdots;z_n,p_n)$表示为**一次性抽彩** $p\in P$(a simple lottery). 对于任意 $\alpha\in[0,1]$，$\alpha p\oplus(1-\alpha)q$ 或$(p,\alpha;q,1-\alpha)$表示为**复合性抽彩**(a compound lottery)，所谓复合性抽彩是指它的中奖是其它一次性的组合抽彩，比如说，$(p,0.1;1,0.9)$，$(p,\frac{1}{3};q,\frac{2}{3})$，$(p,0.1;\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}r,0.5;1,0.4)$等等，投资者如何看待复合性抽彩，具有多种多样的形式，其中有一种称为复合抽彩的一次性自然抽彩.

称$(z_1,\alpha p_1+(1-\alpha)q_1;\cdots;z_n,\alpha p_n+(1-\alpha)q_n)$为复合性抽彩 $\alpha p\oplus(1-\alpha)q$ 的**一次性自然抽彩**.

这里，将假设投资者采取这种形式来看待复合性抽彩，即说明

投资者对抽彩的感觉仅仅取决于获得各种奖的净概率. 当然，有证据表明有人会有区别地对待复合抽彩和一次性抽彩，在这里不加以细致讨论.

假设 1(复合性抽彩的约简公理，Reduction Axiom)　对于任意 $\alpha\in[0,1]$，$\alpha p\oplus(1-\alpha)q\sim(z_1,\alpha p_1+(1-\alpha)q_1;\cdots;z_n,\alpha p_n+(1-\alpha)q_n)$. 此即 $\alpha p\oplus(1-\alpha)q=\alpha p+(1-\alpha)q$.

在约简公理下，任何复合抽彩必属于抽彩空间 P，并且任意抽彩都可能通过复合两个或多个一次性抽彩而得到，因为 $p\sim\sum_{z\in Z}p(z)P_z$，这里 P_z 表示概率为 1，获得 z 的一次性抽彩. 即

$$P_z(z')=\begin{cases}1, & 当\ z'=z\\0, & 当\ z'\neq z.\end{cases}$$

由于这里假设所有证券组合有共同的值域 Z，并且 Z 只有有限个元素，因此 Z 必存在最大、最小数，记 z^0，z_0. 显然，确定性抽彩 P_{z^0}，P_{z_0}分别为最好和最差的抽彩，即 $P_{z^0}\geq p\geq P_{z_0}$，$\forall\ p\in P$. 如前面所说，并没有必要要求有共同的 Z，只须每个证券组合有有限结果取值(其实，这个限制也可取消，若增加另外假设)，此时，抽彩的有界性就不明显成立了，为了避免技术上的复杂，因此需要增加**抽彩有界性假设**：存在最好和最差的抽彩 p^*，$q^*\in P$，使得 $p^*\geq p\geq q^*$，对于任意 $p\in P$.

假设 2(保序性，Order Preserving)　对于 $p,q\in P$，$p\succ q$，$\alpha,\beta\in[0,1]$，则 $\beta>\alpha$ 当且仅当 $\beta p+(1-\beta)q\succ\alpha p+(1-\alpha)q$.

假设 3(中值性，Intermediate Value)　对于 $p,q,r\in P$，$p\succ q\succ r$. 则存在惟一的 $\alpha^*\in(0,1)$，使得 $q\sim\alpha^*p+(1-\alpha^*)r$.

定理 1.3　如果定义在 P 上的偏好关系满足假设 1,2,3，那么它可以用效用函数表示.

证明　不失一般性，设 $P_{z^0}\succ P_{z_0}$. 考虑一任意的抽彩 $p\in P$，则有三种可能性：(i) $p\sim P_{z^0}$，(ii) $P_{z^0}\succ p\succ P_{z_0}$，(iii) $p\sim P_{z_0}$.