

1
天骄之路大学系列

2002

研究生入学考试

(理工类) 数学

优化教程

主 编 北京大学 周明强
清华大学 高廷江
审 定 考研命题研究组



北京理工大学出版社

2002 研究生入学考试

数 学

(理工类)

优 化 教 程

主编 周明强 高廷江

北京理工大学出版社

内 容 提 要

为正确引导广大考生进行2002年研究生入学考试的总复习,我们组织了北京大学、清华大学及中国人民大学等重点大学知名专家教授编写了本丛书。作者长期从事考研命题研究、阅卷工作,并多年工作在教学指导第一线,具有丰富教学及命题经验。该书严格依照新修订的考试大纲编写,融合了近年(1992—2001)研考的最新动态,内容丰富,覆盖面广,对学生备考有很大帮助。

本书不仅是硕士研究生入学考试应试者的复习用书,也可作为正在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计的理工类高等院校的本科生、大专生、电大、夜大的学生的参考书,还便于自学者阅读。

本丛书封面均贴有“天骄之路系列用书”激光防伪标志,凡无此标志者为非法出版物。

盗版书刊因错漏百出、印制粗糙,对读者会造成身心侵害和知识上的误解,希望广大读者不要购买。举报电话:(010)62750867 68412850。

版权所有 翻印必究

图书在版编目(CIP)数据

2002 研究生入学考试数学优化教程.理工类/周明强,高廷江主编.—2版.—北京:北京理工大学出版社,2001.4

(天骄之路大学系列)

ISBN 7-81045-684-9

I.2… II.①周…②高… III.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 20483 号

北京理工大学出版社出版发行

(北京市海淀区中关村南大街5号)

(邮政编码 100081)

各地新华书店经售

涿州市星河印刷厂印刷

787毫米×1092毫米 16开本 34.75印张 943千字

2001年4月第2版 2001年4月第2次印刷

本册定价:38.00元

※图书印装有误,可随时与我社退换※

编写说明

经各家名师的苦心构思和精心编写,各位编辑的层层推敲和点点把关,一套紧跟新修订的硕士研究生入学数学(经济类)考试大纲的新型考研辅导丛书与全国广大大学生和教师见面了。

长期以来,我们感到:在考研复习阶段,考生迫切需要有一套既能夯实基础以不变应万变,又能在基础上有所拔高,掌握解题技巧及提高应试能力,同时还能与研考新形势、新变化、新理论保持同步的参考书籍。为此,我们特组织了北京大学、清华大学及中国人民大学知名专家教授共同编写了《2002 研究生入学考试优化教程》丛书。本丛书包含以下几个板块:

命题趋向阐释:详细分析近年来(包括 2001 年)考研命题的热点,通过列表总结常考内容,搜索命题奥秘,探求命题规律,预测命题趋向;

考点精要扫描:对考试大纲所要求的知识点、考点进行简明、扼要地叙述、总结、归纳,概括和阐述力求精练、解释清晰、视角广阔;

重点难点突破:对本章节内容繁杂的重点难点进行整理和提炼,并进行详尽分析与说明,使考生在以后的应试中能举一反三,触类旁通;

历年真题研读:通过对历年考研试题的探寻与研究,为考生提供历年命题热点、命题趋向及合理的复习备考方法,以致事半功倍,胸有成竹;

解题技巧导引:重点精选了各类题型的例题并作详细解答,注重启发性和培育兴趣原则,有助于读者形成正确的解题思路,把握解题技巧;

同步强化训练:精心设计题型,无陈题、旧题,不搞题海战术,务求实效性、典型性和启发性,意在培养读者的学科思想与悟性;

能力提高测试:在同步强化训练的基础上,精编了一些选题较为新颖、难度较大、综合性较强的习题,使考生能在短期内得到拔高;

参考答案提示:对于同步强化训练题和能力提高测试题,其答案中均附有解题提示或分析,特别是将容易发生的错误一一指出。

需要说明的是,为照顾广大学生的实际购买能力,使他们能在相同价位、相同篇幅内汲取到比其它书籍更多的营养,本书采用了小五号字和紧缩式排版,如有阅读上的不便,请谅解。

检验本丛书质量的唯一标准是广大师生使用本书的实践。作为教研领域的最新成果,我们期盼它的社会效益,也诚挚地希望广大师生的批评指正。读者对本书如有意见及建议,请来信寄至:(100080)北京大学燕园教育培训中心大厦 1408 室 天骄之路系列丛书编委会收。相信您一定会得到满意的答复。

本丛书在编写过程中,得到了各参编高校及北京理工大学出版社有关领导的大力支持,丛书的统稿及审校工作得到了北京大学有关专家教授的协助和热情支持,在此一并谨致谢忱。

编 者

2001 年 4 月于北京大学燕园

目 录

第一部分 高等数学

第一章 一元函数微分学	(1)
第一节 函数	(1)
第二节 极限与连续	(16)
第三节 导数、微分及其运算	(35)
第四节 微分学中值定理及微分学的应用	(49)
第二章 一元函数积分学	(69)
第一节 不定积分	(69)
第二节 定积分	(79)
第三节 广义积分与定积分的应用	(94)
第三章 空间解析几何与多元函数微分学	(109)
第一节 空间解析几何与向量代数	(109)
第二节 多元函数、极限、偏导数与全微分	(120)
第三节 多元函数微分学的应用	(133)
第四章 多元函数积分学	(146)
第一节 重积分	(146)
第二节 曲线积分与曲面积分	(160)
第五章 级 数	(184)
第一节 常数项级数	(184)
第二节 函数项级数与幂级数	(194)
第三节 傅氏级数	(211)
第六章 常微分方程	(223)
第一节 基本概念和一阶微分方程	(223)
第二节 高阶微分方程	(239)

第二部分 线性代数

第一章 行列式	(261)
第一节 n 阶行列式的概念与性质	(261)
第二节 应 用	(270)
第二章 线性方程组	(279)
第一节 矩阵消元法	(279)
第二节 n 维向量	(283)
第三节 矩阵的秩	(293)

第四节 线性方程组解的结构	(299)
第三章 矩阵代数	(311)
第一节 矩阵的运算	(311)
第二节 逆矩阵	(322)
第四章 线性空间、特征值与特征向量	(334)
第一节 线性空间	(334)
第二节 矩阵的特征值与特征向量	(342)
第五章 二次型	(357)
第一节 二次型和它的标准形	(357)
第二节 正定二次型	(367)
第三节 正交变换与正交矩阵	(375)

第三部分 概率论与数理统计初步

第一章 随机事件和概率	(390)
第一节 随机事件	(390)
第二节 概率的定义及概率的计算公式	(396)
第二章 一维随机变量及其概率分布与数字特征	(410)
第一节 一维随机变量及其概率分布	(410)
第二节 一维随机变量的数字特征	(421)
第三节 常见分布	(430)
第三章 二维随机变量及其概率分布与数字特征	(444)
第一节 二维随机变量及其概率分布	(444)
第二节 二维随机变量的数字特征	(469)
第三节 常见二维分布	(489)
第四章 大数定律和中心极限定理	(497)
第五章 数理统计初步	(513)
第一节 基本概念	(513)
第二节 参数估计	(521)
第三节 假设检验	(535)

第一部分 高等数学

第一章 一元函数微分学

第一节 函数

〔命题趋向阐释〕

函数是数学中重要的基础知识,应用十分广泛,函数的思想方法对分析和解决各种数学问题和实际应用问题具有重要的作用.在学习本部分内容时,首先接触到的内容是函数的定义(这也是早已接触过的).其次便是定义域(自变量的变化范围)、对应规律(因变量与自变量的对应规律)、值域(因变量的取值范围).因为值域是随着定义域、对应规律的确定而完全确定,所以说定义域和对应规律是确定函数的两要素.故若要判断两个函数是相等的,必须满足两条:(1)两个函数的定义域相同;(2)对于定义域内的每一个值,两函数都有相同的函数值与之对应.在微积分中,所讨论的量(常量和变量)一般都限制在实数范围内,自变量与因变量都只能取实数值,对于函数 $y = f(x)$ 与反函数 $x = f^{-1}(y)$ 来说,其图象画在同一直角坐标系中的两条曲线完全重合,也可以说是同一条曲线;但是当我们把 $x = f^{-1}(y)$ 中的 x 写成 y , y 写成 x ,把 $y = f(x)$ 的反函数改写成 $y = f^{-1}(x)$ 之后,再把 $y = f(x)$ 及 $y = f^{-1}(x)$ 的图象画在同一坐标系中时, $y = f(x)$ 在 x 轴上的量,对于 $y = f^{-1}(x)$ 而言恰巧是 y 轴上数值相等的量,这正是 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 在同一坐标系中两者图象关于直线 $y = x$ 对称的原因.

纵观 1995—2001 年试题,对函数部分的考查有上升趋势.1995—1998 年基本没考函数,但以函数为基础的极限与连续还是考了不少.而在 1999 年直接考了函数的性质(第二大题第 3 小题),2001 年(第二大题第 1 小题)涉及复合函数,这种情况表明,在 2002 年的考研中,很有可能会涉及到它,但一定不会是复合函数.

最新颁布的全国硕士研究生入学考试数学考试大纲中规定函数部分的考试内容包括:

- 理解函数的概念,掌握函数的表示方法.
- 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
- 理解复合函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
- 掌握基本初等函数的性质及图形.
- 会建立简单应用问题中的函数关系.

考试的要求是全方位的,试题内容覆盖面较宽.虽然有时以考查函数的形式出现,但它不止考查一两个知识点,前后内容揉在一起综合考查.考生必须上下融会贯通、全面分析,绝不能一叶障目,以偏概全.这样一定能取得理想成绩.

〔考点精要扫描〕

一、函数的概念

1. 定义

设 x 与 y 是两个变量,分别在实数集合 X 与 Y 中取值.对每一个值 $x \in X$,按照某一法则, f 存在着惟一确定的值 $y \in Y$ 与之对应,记为 $f(x)$ ($x \rightarrow f(x)$),则称 y 是 x 的函数,或称这种对应关系 f 为函数,记作

$$y = f(x) \text{ 或 } f: X \rightarrow Y$$

并称 x 为自变量, y 是因变量, X 是定义域.

函数值 $f(x)$ 的全体, 即集合

$$\{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$$

称为函数的值域, 记作 $f(X)$. 显然 $f(X) \subset Y$.

注: (1) 这里的函数是单值的. 例如, 由 $x^2 + y^2 = 1$ 解出 $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$, 我们分别讨论其中之一(一个单值分支).

(2) 只有一个自变量的函数, 称为一元函数.

2. 定义域

一般分两种:

(1) 由实际问题决定. 例如, 在某火车站某条线路的列车价目表上, 对某次列车不同车站对应不同的票价, 则票价是车站的函数, 其定义域由该价目表所决定.

(2) 自然定义域. 当函数由公式(表达式) 给出时, 使公式有意义的自变量的取值范围, 称为自然定义域. 我们通常讨论的定义域是指自然定义域.

使公式有意义的常遇到的四种情况是:

(I) 分式的分母不为零;

(II) $\sqrt[n]{f(x)}$, n 为正整数, 要求 $f(x) \geq 0$;

(III) $\log_a f(x)$, 要求 $a > 0$ 且 $a \neq 1, f(x) > 0$;

(IV) $\arcsin f_1(x)$, 要求 $|f_1(x)| \leq 1$; $\arccos f_2(x)$, 要求 $|f_2(x)| \leq 1$.

此外, 对幂指函数 $y = f(x)^{g(x)}$, 要求 $f(x) > 0$.

二、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \text{ (或 } f(x) = -f(-x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图象关于坐标原点对称.

奇函数和偶函数的运算性质:

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数.

(2) 偶数个奇函数之积为偶函数; 奇数个奇函数的积为奇函数.

(3) 偶函数之积为偶函数.

(4) 一奇一偶函数的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|$, $\cos x$, x^{2n} (n 为正整数), $e^{|x|}$, e^{x^2} , ...

常见的奇函数: $\sin x$, $\tan x$, $\frac{1}{x}$, x^{2n+1} , $\arcsin x$, $\arctan x$, ...

注: 判别给定函数的奇偶性, 主要是根据奇偶性的定义, 有时也用其运算性质.

① $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

② 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若定义域关于原点(或 y 轴) 不对称, 则该函数就不是奇(或偶) 函数.

2. 有界性

设 $y = f(x)$ 在 X 上有定义, 若存在正数 M , 对任意 $x \in X$, 都有

$$|f(x)| \leq M \text{ (即 } \exists M > 0, \forall x \in X, \text{ 有 } |f(x)| \leq M)$$

则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 否则, 即对任意 $M > 0$, 至少存在一点 $x_1 \in X$, 使得

$$|f(x_1)| > M \quad (\forall M > 0, \exists x_1 \in X, \text{使 } |f(x_1)| > M)$$

则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

通常函数的有界性与区间有关,例如 $y = \frac{1}{x^2}$, 在 $(0, 1)$ 内无界,而在 $(\frac{1}{10}, 1)$ 上有界.

显然,设 $f(x)$ 在 X 上有定义,若对一切 $x \in X$,存在两个实数 M 与 K ,使得值域 $f(X) \subset [K, M]$,即值域包含于一个闭区间内,则函数 $f(x)$ 在 X 上有界.

$$\begin{aligned} \text{几个常见的有界函数:} \quad & |\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1, \quad (-\infty, +\infty) \\ & |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, \quad |\arccos x| \leq \pi, \quad [-1, 1] \\ & |\arctan x| < \frac{\pi}{2}, \quad |\operatorname{arccot} x| < \pi, \quad (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

注:将函数取绝对值,然后用不等式放缩法;或借助导数利用求最大(小)值法处理.

3. 单调性

设 $f(x)$ 定义在区间 X 上, $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加(单调减少). 它们统称为单调函数. $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调不减(单调不减).

注:若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知可导,则其单调性的判别用定义;若 $f(x)$ 在区间 X 上可导,则利用导数判别简便.

4. 周期性

设 $f(x)$ 定义在 X 上,若存在正数 $T > 0$, 满足: $\forall x \in X$, 有 $x \pm T \in X$ 且 $f(x + T) = f(x)$ ($\forall x \in X$), 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 为 $f(x)$ 的周期. 它的几何意义是:自变量每增加或减少一固定的距离 T 后,图形重复出现.

若 $f(x)$ 以 T 为周期,则 $f(x)$ 有无穷多个周期, nT ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) 均为周期,若 $f(x)$ 的无穷多个正周期中存在最小数,称它为 $f(x)$ 的最小正周期,简称最小周期或周期.

注:判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数,主要是依据周期的定义,有时也用其运算性质.

三、初等函数

1. 初等函数的定义

由基本初等函数经过有限次的四则运算及复合而得到的函数,称为初等函数.

并非所有的函数都是初等函数.分段函数一般不是初等函数.例如, $y = \operatorname{sgn} x$, $y = [x]$ 以及狄利克来函数等都不是初等函数.

2. 几种基本初等函数

基本初等函数指以下六类函数:

(1) 常数函数 $y = c, x \in (-\infty, +\infty)$, c 为常数.

(2) 幂函数 $y = x^a$ ($a \neq 0$ 为任何实数), 不论对任何 a , 其公共定义域为 $(0, +\infty)$. $a > 0$ 时, 其图形过原点 $(0, 0)$; 当 $a < 0$ 时, 其图形不过原点 $(0, 0)$.

(3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), $x \in (-\infty, +\infty)$, $a > 1$ 时, 严格单调上升; 当 $a < 1$ 时, 严格单调下降, 而图形皆过点 $(0, 1)$.

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), $x \in (0, +\infty)$, 图形过点 $(1, 0)$. 当 $a > 1$ 时, 函数严格单调上升; 当 $0 < a < 1$ 时, 严格单调下降, 常用自然对数 $y = \ln x$.

(5) 三角函数

$y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$, $|\sin x| \leq 1$, 奇函数, 2π 为周期;

$y = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$, $|\cos x| \leq 1$, 偶函数, 2π 为周期;

$y = \tan x, x \in \left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 奇函数, π 为周期;

$y = \cot x, x \in (n\pi, (n+1)\pi), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 奇函数, π 为周期.

(6) 反三角函数

$y = \arcsin x, -1 \leq x \leq 1$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

$y = \arccos x, -1 \leq x \leq 1$, 值域为 $[0, \pi]$;

$y = \arctan x, x \in (-\infty, +\infty), |\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, 函数严格单调上升, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$;

$y = \operatorname{arccot} x, x \in (-\infty, +\infty), 0 < \operatorname{arccot} x < \pi$, 函数严格单调下降, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$.

四、分段函数

如果一个函数在其定义域内, 对应于不同的区间段有着不同的表达形式, 则该函数称为分段函数.

常见的分段函数:

(1) 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$

(2) y 是 x 的最大整数部分, 记为 $y = [x]$.

(3) 狄利克莱(Dirichlet) 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

五、反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z_f , 如果对于 Z_f 中任一 y 值, 从关系式 $y = f(x)$ 中可确定惟一的一个 x 值, 则称变量 x 为变量 y 的函数, 记为

$$x = \varphi(y)$$

$\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

注: ① $y = f(x)$ 的图象与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图象重合; $y = f(x)$ 的图象与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

② 只有一一对应的函数才有反函数.

2. 复合函数

设函数 $y = f(u)$, 定义域 $D_f = U$, 又有函数 $u = g(x)$, 定义域 $D_g = X$, 值域 $R_g = U'$. 若 $U' \subset U$, 可以在 X 上确定一个函数 $y = f(g(x))$, 称为 $u = g(x)$ 与 $y = f(u)$ 的复合函数.

若 $R_g \cap D_f = \emptyset$, 则不能构成复合函数 $y = f(g(x))$;

若 $R_g \subset D_f$, 则可构成复合函数 $y = f(g(x))$, 定义域为 X ;

若 $R_g \cap D_f \neq \emptyset, R_g \not\subset D_f$, 则可构成复合函数 $y = f(g(x))$, 定义域包含在 X 中, 但 $\neq X$.

六、隐函数

前面所讲的形式如 $y = f(x)$ 的函数, 一般称为显函数, 其特点是因变量 y 单独地在等号一边, 而另一边仅仅是自变量 x 的表达式 $f(x)$.

此外, 还有一类函数, 称为隐函数. 其定义是: 凡由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的函数关系称为隐函数. 例如 $x^2 + y^2 - 1 = 0$, 它可以解为 $y = \sqrt{1 - x^2} (-1 \leq x \leq 1)$ 或 $y = -\sqrt{1 - x^2} (-1 \leq x \leq 1)$, 这就变成两个显函数.

并非所有隐函数都可解成显函数. 如开普勒方程 $y - x - \epsilon \sin y = 0$ (ϵ 为常数, $0 < \epsilon < 1$) 是一隐函数, 但它不能解出显函数.

〔重点难点突破〕

根据最新颁布的全国硕士研究生入学考试数学考试大纲规定的考试内容可知: 函数的概念及表示法、函数的性质、反函数、复合函数、分段函数、应用题函数关系的建立等是本章重点, 下面一一讲解.

一、关于函数的概念及表示方法

在这部分中, 主要掌握函数的定义、定义域、值域和函数的表示法. 熟悉几种分段函数.

(1) 绝对值函数 $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$, 如图 1.1.1.

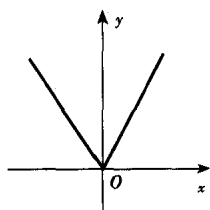


图 1.1.1

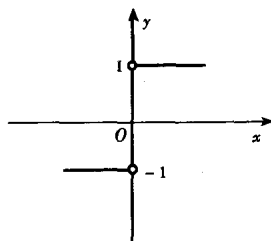


图 1.1.2

(2) 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
 $x \in (-\infty, +\infty)$, 值域为集合 $\{-1, 0, 1\}$, 如图 1.1.2.

(3) $y = [x]$, 表示 x 的最大整数部分, $x \in (-\infty, +\infty)$, 其值域为集合 $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. 对任何实数 x , 有 $[x] \leq x < [x] + 1$, 如图 1.1.3.

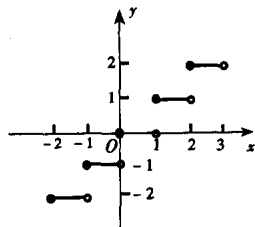


图 1.1.3

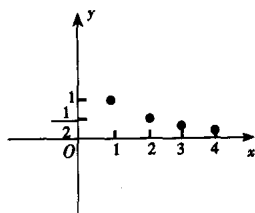


图 1.1.4

(4) 以自然数为自变量的函数. 如 $y = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 定义域为全体自然数; 值域为 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. 如图 1.1.4.

(5) 狄利克雷(Dirichlet) 函数 $y = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$
 $x \in (-\infty, +\infty)$, 值域为集合 $\{0, 1\}$, 其图形画不出.

二、关于函数的性质

1. 函数的单调性

熟悉其定义,掌握判别 $f(x)$ 在 x 上单调性的常用方法.

例1 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,又

$$F(x) = \int_0^x [x^{2n} - (2n+1)t^{2n}]f(t)dt$$

其中 $n \geq 1$ 为整数.就 $f(x)$ 的单调性,讨论 $F(x)$ 的单调性.

解 由已知得 $F(x) = x^{2n} \int_0^x f(t)dt - (2n+1) \int_0^x t^{2n}f(t)dt$

上式两端对 x 求导,得

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2n \cdot x^{2n-1} \int_0^x f(t)dt + x^{2n}f(x) - (2n+1)x^{2n}f(x) \\ &= 2nx^{2n-1} \int_0^x f(t)dt - 2nx^{2n}f(x) \\ &= 2nx^{2n}f(\xi) - 2nx^{2n}f(x) \quad (\text{积分中值定理}) \\ &= 2nx^{2n}[f(\xi) - f(x)], \text{其中 } \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间} \end{aligned}$$

(1) 若 $f(x)$ 单调上升:

当 $x > 0$ 时, $0 < \xi < x$, 故 $f(\xi) - f(x) \leq 0$, 于是 $F'(x) \leq 0$;

当 $x = 0$ 时, $F'(0) = 0$;

当 $x < 0$ 时, $x < \xi < 0$, 故 $f(\xi) - f(x) \geq 0$, 于是 $F'(x) \geq 0$.

因此,若 $f(x)$ 单调上升,则 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调下降,在 $(-\infty, 0]$ 上单调上升.

(2) 若 $f(x)$ 单调下降:

类似地讨论可得, $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调上升,在 $(-\infty, 0]$ 上单调下降.

注:判别函数 $f(x)$ 在 x 上单调性的常用方法为:

a. 用单调定义;

b. 利用导数 $f'(x)$.

2. 函数的有界性

我们说函数 $f(x) \leq |M|$ 有界,即函数 $f(x)$ 的图形位于 $y = M$ 与 $y = -M$ 这两条平行线之间的带形区域内, $f(x)$ 的值既不能大于 M ,也不能小于 $-M$. 函数的有界性也可以这样定义:如果存在两个数 A 和 B ,对一切 $x \in D$ 恒有 $A \leq f(x) \leq B$,则称函数在 D 内有界.

3. 函数的奇偶性

若 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,则 $f(x)$ 一定不是奇(或偶)函数.

判别函数奇偶性的常用方法:

(1) 利用奇偶性的定义;

(2) 利用奇偶函数的性质.

例2 讨论函数的奇偶性.

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,又 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 讨论

$$F(x) = f(|\sin x| - 2) \cdot \operatorname{sgn}(\sin x) + \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$$

解 $a^x + a^{-x}$ 为偶函数,而 $a^x - a^{-x}$ 为奇函数,从而它们的商 $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ 为奇函数.

又因为 $\operatorname{sgn}[\sin(-x)] = -\operatorname{sgn}(\sin x)$, 所以 $\operatorname{sgn}(\sin x)$ 是奇函数.

$f(|\sin x| - 2)$ 为偶函数,故 $f(|\sin x| - 2) \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$ 是奇函数,而函数 $F(x)$ 为两个奇函数之和,故 $F(x)$ 为奇函数.

在判定函数的奇偶性时,若 $f(x)$ 连续, $\Phi(x)$ 是其一个原函数,任一个原函数都可写成 $\Phi(x) + C$, C 为任意取定的常数.当 $f(x)$ 为偶函数时, $\Phi(x)$ 是奇函数,但 $\Phi(x) + C$ ($C \neq 0$) 却不是奇函数.

4. 函数的周期性

任一周期函数都有无穷多个周期. 若在无穷多个周期中存在一个最小的正数, 则这个正数称为函数的最小周期, 简称周期.

例如: $y = |\sin x|$ 以 π 为周期, 而狄利克莱函数 $y = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 由于有理数之和为有理数, 而无理数与有理数之和为无理数, 故任何非零有理数都是它的周期, 但没有最小周期.

三、反函数与复合函数

1. 反函数

要想掌握反函数必须先掌握一一对应关系. 因为, 只有一一对应的函数才有反函数. 所谓一一对应, 就是: 设函数 $y = f(x)$ 在 X 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \neq x_2$, 必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 或等价地由 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, 则称函数 f 是 X 到值域 $f(X)$ 的一一对应. 特别地, 如果又有 $f(X) = Y$, 则称 f 是 X 到 Y 的一一对应.

函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 有如下关系:

(1) 若 $D_f = X, R_f = Y$, 则 $D_{f^{-1}} = Y, R_{f^{-1}} = X$;

(2) $f(f^{-1}(y)) = y \quad (\forall y \in Y), f^{-1}(f(x)) = x \quad (\forall x \in D_f)$;

(3) $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y = x$ 对称, 而 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重合.

$y = f(x), x \in X$ 且存在反函数 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 特别地, 若 $y = f(x)$ 在 X 上单调, 则 $y = f(x)$ 在 X 上存在反函数.

例3 求 $y = f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1 \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2 \\ 12x - 16, & x > 2 \end{cases}$ 的反函数.

解 当 $x < -1$ 时, $y = 1 - 2x^2 < -1$, 则 $x = -\sqrt{\frac{1-y}{2}}$ (另一舍去);

当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $y = x^3 \in [-1, 8]$. $\forall y \in [-1, 8]$, 由 $y = x^3$, 知 $x = \sqrt[3]{y}$;

当 $x > 2$ 时, $y = 12x - 16 > 8$. $\forall y > 8$, 由 $y = 12x - 16$, 知 $x = \frac{y+16}{12}$.

因此, 反函数 $y = f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1 \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8 \\ \frac{x+16}{12}, & x > 8 \end{cases}$

2. 复合函数

将两个或两个以上函数进行复合是本节的难点, 现在根据函数的特点举出几种复合的方法.

(1) 代入法 将一个函数中的自变量用另一个函数表达式来替代, 称之为代入法, 该法用于初等函数的复合.

例4 设 $f_n(x) = f(f \cdots f(x) \cdots)$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

解 $f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

$f_3(x) = f(f_2(x)) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

由以上二式可推得

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (\text{由数学归纳法可证明上式成立})$$

(2) 分析法 分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 从而得出复合函数的方法. 该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合.

例5 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

解 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$

① 当 $\varphi(x) < 1$ 时:

$$\text{或 } x < 0, \varphi(x) = x+2 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1$$

$$\text{或 } x \geq 0, \varphi(x) = x^2-1 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2}$$

② 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时:

$$\text{或 } x < 0, \varphi(x) = x+2 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

$$\text{或 } x \geq 0, \varphi(x) = x^2-1 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$$

$$\text{综上所述, } f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x+2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

(3) 图示法 图示法是借助于图形的直观性达到将函数复合的一种方法, 适用于分段函数, 尤其是两个均为分段函数的复合. 一般有以下几步:

① 先画出中间变量函数 $u = \varphi(x)$ 的图象;

② 把 $y = f(u)$ 的分界点在 xOu 平面上画出(这是若干条平行于 x 轴的直线);

③ 写出 u 在不同区间段上 x 所对应的变化区间;

④ 将上步所得结果代入 $y = f(u)$ 中, 使得 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

例6 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[f(x)]$.

解 令 $f(x) = u$, 则 $f(u) = \begin{cases} 1+u, & u < 0 \\ 1, & u \geq 0 \end{cases}$

① 作出 $u = f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ 的图象, 如图 1.1.5.

② 在图中作出 $y = f(u) = \begin{cases} 1+u, & u < 0 \\ 1, & u \geq 0 \end{cases}$ 的分界点 $u = 0$ 的图象

(x 轴);

③ 从图中看出, 当 $x \leq -1$ 时, $u \leq 0$; 当 $x > -1$ 时, $u \geq 0$;

④ 将上步代入 $y = f(u)$ 中得

$$y = f[f(x)] = \begin{cases} 2+x, & x \leq -1 \\ 1, & x > -1 \end{cases}$$

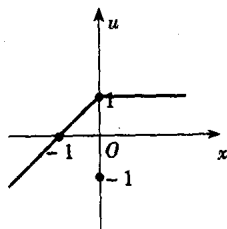


图 1.1.5

〔解题技巧导引〕

例1 函数 $y = x + 2\cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为_____.

应填 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$.

分析 因函数 y 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上可导, 故只需分别计算出函数在驻点和区间端点的函数值, 再比较它们大小即可得最大值.

解 令 $y' = 1 - 2\sin x = 0$, 得 $x = \frac{\pi}{6}$ 为驻点.

又 $y|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$, $y|_{x=0} = 2$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

所以最大值为 $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$.

例2 函数 $F(x) = \int_1^x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$ ($x > 0$) 的单调减少区间为_____.

应填 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

分析 利用函数导数的符号便可确定函数的单调区间.

解 当其导数为负时, 函数便单调减少. 因 $F'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, 令 $F'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{4}$. 即在区间 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 内, 函数 $F(x)$ 单调减少.

例3 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$, $-\infty < x < +\infty$

(1) $f'(x) =$ _____;

(2) $f(x)$ 的单调性: _____;

(3) $f(x)$ 的奇偶性: _____;

(4) $f(x)$ 图形的拐点: _____;

(5) $f(x)$ 图形的凹凸性: _____, _____;

(6) $f(x)$ 图形的水平渐近线: _____.

分析 这是利用导数研究函数的性质.

解 (1) 应填 $e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

(2) 应填单调增加.

因为 $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$ ($-\infty < x < +\infty$), 故 $f(x)$ 在定义域内单调增加.

(3) 应填奇函数.

因为 $f(-x) = \int_0^{-x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \xrightarrow{u=-t} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2} (-du)$
 $= -\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = -f(x)$

(4) 应填 $(0, 0)$.

因为 $f''(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$, 令 $f''(x) = 0$, 得 $x = 0$, 又 $x < 0$ 时, $f''(x) > 0$; $x > 0$ 时, $f''(x) < 0$. 所以 $x = 0$ 是 $y = f(x)$ 图形的拐点的横坐标, 又 $f(0) = 0$, 所以拐点为 $(0, 0)$.

(5) 应填 $x < 0$ 时, 曲线是凹的; $x > 0$ 时曲线是凸的. 理由见(4).

(6) 应填 $y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 和 $y = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \int_0^{-\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

例4 设函数 $f(x) = x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是().

A. 偶函数 B. 无界函数 C. 周期函数 D. 单调函数

解 这既可直接验算而得: 因为 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 和 e^x 是单调增加函数, 所以 $|e^{\sin x}| \geq e^{-1}$; 而 x 和 $\tan x$ 都是无界函数, 所以对于任意给定的正数 M , 都存在 $x_0 > 1$, 使得 $|x_0 \tan x_0| > M$, 从而

$$|f(x_0)| \geq |x_0| |\tan x_0| e^{-1} > M$$

故 $f(x)$ 是无界函数.

也可用排除法: 由于

$$f(-x) = -x \cdot \tan(-x) \cdot e^{\sin(-x)} = x \cdot \tan x \cdot e^{-\sin x} = x \tan x / e^{\sin x} \neq f(x)$$

故 $f(x)$ 不是偶函数.

$f(x)$ 显然不是周期函数, 也不是单调函数.

总之, 应选 B.

例5 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$, 则

$$\begin{aligned} \text{A. } f(-x) &= \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ -(x^2 + x), & x > 0 \end{cases} & \text{B. } f(-x) &= \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases} \\ \text{C. } f(-x) &= \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases} & \text{D. } f(-x) &= \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解 解法一 令 $y = -x$, 则 $x = -y$, 且当 $x \leq 0$ 时, $y \geq 0$; $x > 0$ 时, $y < 0$. 代入 $f(x)$ 的表达式,

有

$$f(-y) = \begin{cases} (-y)^2, & y \geq 0 \\ (-y)^2 + (-y), & y < 0 \end{cases}$$

视式中的 y 为 x , 便得

$$f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

可见 D 是正确的.

解法二 直接计算. 当 $x \geq 0$ 时, $-x \leq 0$, 故由 $f(x)$ 的定义, $f(-x) = (-x)^2 = x^2$; 而当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 则 $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$, 即 D 是正确的.

也可利用 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图象是关于 y 轴对称的原理, 直接从图形上推断 D 是正确的.

例6 判别下列函数的奇偶性:

(1) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续的偶函数.

(2) $F(x) = f(x) + \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du$, 其中 $f(x)$ 是连续的奇函数.

(3) $F(x) = \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right) f(x)$, 其中 $a > 0, a \neq 1, f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且对任何 x, y 恒有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

解 (1) $F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t = -u} \int_0^x f(-u) (-du) \xrightarrow{\substack{f(x) \text{ 为} \\ \text{偶函数}}} - \int_0^x f(u) du = -F(x)$
 $\therefore F(x)$ 为奇函数.

$$(2) F(x) = f(x) + \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du \quad \text{①}$$

$$F(-x) = f(-x) + \int_0^{-x} \left(\int_0^u f(t) dt \right) du \quad \text{②}$$

$\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(x) + f(-x) = 0$ ③

又 $\because \int_0^{-x} \left(\int_0^u f(t) dt \right) du \xrightarrow{\text{令 } u = -v} \int_0^x \left(\int_0^{-v} f(t) dt \right) (-dv) = - \int_0^x \left(\int_0^{-u} f(t) dt \right) du$ ④

由 ①, ②, ③, ④ 得

$$F(x) + F(-x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du - \int_0^{-x} \left(\int_0^u f(t) dt \right) du = \int_0^x \left(\int_{-u}^u f(t) dt \right) du = 0$$

故 $F(x)$ 为奇函数.

(3) 令 $g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$

$$\because g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0$$

$\therefore g(x)$ 为奇函数.

又 $\because f(x+y) = f(x) + f(y)$, 令 $y = 0$, 得 $f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

又显然有 $0 = f(0) = f[x + (-x)] = f(x) + f(-x)$

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

故 $F(x) = g(x)f(x)$ 为偶函数.

〔历年真题研读〕

〔2001 年试题〕

1. (选, 3) 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ 则 $f[f(f(x))]$ 等于 ()

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$

解 $\because |f(x)| \leq 1, \therefore f[f(x)] = 1$, 从而 $f[f[f(x)]] = 1$.

〔1999 年试题〕

1. (选, 3) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 ()

- A. 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数
B. 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数
C. 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数
D. 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数

解 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以写成 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$ 的形式. 则

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt + C \xrightarrow{\text{令 } u = -t} \int_0^x f(-u) d(-u) + C$$

当 $f(x)$ 是奇函数时, $f(-u) = -f(u)$, 从而有

$$F(-x) = \int_0^x f(u) du + C = F(x)$$

故 A 为正确选项, 至于 B、C、D 可分别举反例如下:

B 的反例: $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x + 1$ 不是奇函数; C 的反例: $f(x) = \cos 2x$, $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$, 不论 C 取什么常数, $F(x)$ 都不是周期函数; D 的反例: $f(x) = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的, 但 $F(x) = -\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调减少的.

本题考查原函数的概念及其用变上限函数表示法. 要求考生熟知函数的奇偶性、周期性和单调性的概念, 并用举反例法排除干扰项. 正确选项应是 A, 但选择 A 的考生只有 19%, 而选择 C 的达 58%, 一方