# 微积分（下）

# Calculus (Vol.II)

苏德矿　吴明华
金蒙伟　杨起帆　编

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

# 微　积　分

## （下）

主　编　苏德矿　吴明华

编　者　苏德矿　吴明华
　　　　金蒙伟　杨起帆

浙江大学数学系

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，也是根据作者多年的教学和科研经验，集思广益，并广泛汲取校内外意见的一本改革性教材．本书分上、下两册出版．下册共6章，主要内容有：矢量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，级数，含参量积分．本书可作为本科生教材，适用于工科、理科、经济及管理各专业．

本书在保留我国传统的重归纳、演绎、推理的特色之外，更注重分析综合的思想．许多定理的条件与结论用发现探索式方法给出，并用分析、综合的方法给予证明．为了培养学生的数学素质和自我发现的能力，把数学建模的最基本内容和最基本方法融入教材中，便于学生在学习微积分的过程中，也学会用数学方法建立数学模型解决实际问题．此外，在教材中还增加了微积分在经济中的应用：如连续复利、年有效收益、现值与将来值、边际分析、弹性分析、最大利润、收入流等．与本书配合的微积分多媒体辅助教学光盘(CD－ROM)，利用软件的文本、图形、动画及音效直观，清晰地讲授本书内容中的一些重要概念和定理，使学生容易理解和接受．

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分(下)／苏德矿 吴明华 主编．－北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，2001.2

ISBN 7-04-009456-8

Ⅰ．微…　Ⅱ．①苏…②吴…　Ⅲ．微积分　Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第02785号

微积分(下)

苏德矿　吴明华　金蒙伟　杨起帆　编

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社　施普林格出版社 | | |
| 社　址 | 北京市东城区沙滩后街55号 | 邮政编码 | 100009 |
| 电　话 | 010－64054588 | 传　真 | 010－64014048 |
| 网　址 | http://www.hep.edu.cn | | |
| 经　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 印　刷 | 北京外文印刷厂 | | |
| 开　本 | 787×1092　1/16 | 版　次 | 2001年2月第1版 |
| 印　张 | 20.25 | 印　次 | 2001年6月第2次印刷 |
| 字　数 | 510 000 | 定　价 | 26.00元 |

责任编辑　徐　可
封面设计　王凌波
版式设计　杨　明
责任排版　杨　明
责任印制　陈伟光

# 目　　录

# 第七章　矢量代数与空间解析几何

在中学我们已经学过平面解析几何和各种数系，本章我们将学习一种新的代数体系——矢量代数．矢量代数是数学、物理、力学以及工程技术中一种重要的数学工具．矢量代数与实数代数有很多类似之处但又不完全相同，它可作为由实数体系学习抽象代数体系的桥梁．空间解析几何通过空间直角坐标系，用代数方法研究空间几何问题．本章我们先介绍矢量概念以及矢量的某些运算，然后讲述空间解析几何，其主要内容是平面和直线方程，一些常用的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的某些基本问题，这些方程的建立和问题的解决是以矢量作为工具的．同时，本章的内容对以后学习多元函数的微分学和积分学在几何图形的描绘上将起到非常重要的作用．

## §1　二阶、三阶行列式及线性方程组

本节作为预备知识，我们介绍二阶、三阶行列式的由来及其概念和展开式，以便在解线性方程组和矢量运算中使用．

### §1.1　二阶行列式和二元线性方程组

求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & (1.1) \\ a_2x + b_2y = c_2. & (1.2) \end{cases}$$

用消去法解，$(1.1) \times b_2 - (1.2) \times b_1$ 消去 $y$，得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2,$$

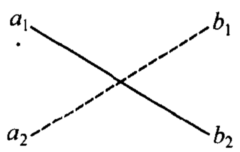
用同样的方法消去 $x$，得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

若 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$，可得该方程组的唯一解：

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{1.3}$$

为了便于记忆，我们引入二阶行列式概念，并用二阶行列式来表示(1.3)式所表示的解．注意到上式分子、分母只与方程组的系数及常数项有关，其中分母 $a_1b_2 - a_2b_1$ 中各个乘数按它们原来在方程组中的位置成有序排列，即




我们称实线表示的对角线为主对角线，虚线表示的对角线为副对角线，这样 $a_1b_2 - a_2b_1$ 就是

主对角线上两个数的乘积减去副对角线上两个数的乘积之差. 我们引进符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \triangleq a_1b_2 - a_2b_1. \tag{1.4}$$

称(1.4)式左端为二阶行列式,其中 $a_1$、$a_2$、$b_1$、$b_2$ 称为行列式的元素,这四个元素排列成二行二列(横写的称为行,竖写的称为列). 称(1.4)式右端为该二阶行列式的展开式,这种展开方法称为对角线法则. 例如,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 5 = -14.$$

这样,二元线性方程组在其系数行列式 $D \triangleq \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 的条件下,解的公式可写成

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D},$$

其中,$D_x \triangleq \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$,即用方程组右端常数项取代 $D$ 中 $x$ 的系数位置;$D_y \triangleq \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$,即用方程组右端常数项取代 $D$ 中 $y$ 的系数位置. 也可直接写成

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

上述方法称为解二元线性方程组的**克拉默(Cramer)法则**.

下面讨论当方程组的系数行列式 $D = 0$ 的情形. 这时由消去法可得

$$D \cdot x = D_x, \quad D \cdot y = D_y.$$

1. 当 $D = 0$ 而 $D_x, D_y$ 中至少有一个不等于零时,这时上述二个等式不能同时成立,因此方程组无解;

2. 当 $D = 0$ 而 $D_x, D_y$ 均等于零时,可得

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0,\ c_1b_2 - c_2b_1 = 0,\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0,$$

即有 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. 这表明方程组中一个方程可由另一个方程乘上一常数得到,这时方程组有无穷多组解.

综上可知:

1. 当 $D \neq 0$ 时,二元线性方程组有唯一确定解 $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$;
2. 当 $D = 0$ 时,而 $D_x, D_y$ 中至少有一个不等于零时,方程组无解;
3. 当 $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ 时,方程组有无穷多组解.

**例 1** 求解方程组 $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 5x + 2y = 12. \end{cases}$

**解** 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

所以方程组有唯一确定解：

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1\\ 12 & 2\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-2}{-1}=2,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\ 5 & 12\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-1}{-1}=1.$$

**例 2** 求解方程组 $\begin{cases}2x+y=5,\\ 4x+2y=3.\end{cases}$

**解** 因为 $D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0$，而 $D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=7\neq 0$，所以方程组无解，易知上述二个方程为矛盾方程.

**例 3** 求解方程组 $\begin{cases}2x+y=5,\\ 4x+2y=10.\end{cases}$

**解** 因为

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0, D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 10 & 2\end{vmatrix}=0, D_y=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 4 & 10\end{vmatrix}=0.$$

所以方程组有无穷多组解.事实上，第二个方程可由第一个方程乘以 2 得到，亦即可把该方程组看成一个方程 $2x+y=5$，故有无穷多组解.

## §1.2 三阶行列式和三元线性方程组

求解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3.\end{cases}\tag{1.5}$$

用消去法，先从前两个方程消 $z$，再消去 $y$，可得

$$\begin{aligned}&(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1)x\\ &=b_1c_2d_3+b_2c_3d_1+b_3c_1d_2-b_1c_3d_2-b_2c_1d_3-b_3c_2d_1\end{aligned}$$

当 $x$ 的系数 $D\triangleq a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1\neq 0$ 时，可解得 $x$；同理可解得 $y$ 和 $z$. 即有

$$x=\frac{1}{D}(b_1c_2d_3+b_2c_3d_1+b_3c_1d_2-b_1c_3d_2-b_2c_1d_3-b_3c_2d_1);$$

$$y=\frac{1}{D}(a_1c_3d_2+a_2c_1d_3+a_3c_2d_1-a_1c_2d_3-a_2c_3d_1-a_3c_1d_2);$$

$$z=\frac{1}{D}(a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_1b_3d_2-a_2b_1d_3-a_3b_2d_1).$$

所以，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.5) 有上述唯一解.

为了便于记忆，与二元线性方程组类似，我们引进符号

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\triangleq a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.$$

上述等式左端称为三阶行列式，其中 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3$ 为三阶行列式的元素，这 9

个元素按原三元线性方程组的位置排列成三行三列；右端为三阶行列式的展开式，该展开式也可采用对角线法则：即主对角线（图 7 - 1 中用实线相连的三组所示）三项之和减去副对角线（图 7 - 1 中用虚线相连的三组所示）三项之和的差，共六项之代数和.

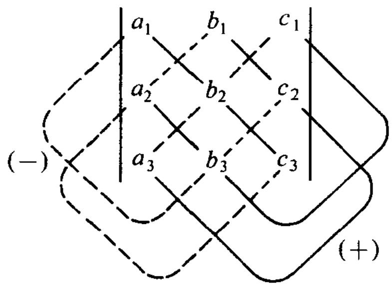


图 7 - 1

这样，方程组(1.5)中的系数所组成的三阶行列式为：$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. 并记

$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，即将方程组右端的常数项分别取代 $D$ 中 $x$ 的系数位置；

$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，即将方程组右端的常数项分别取代 $D$ 中 $y$ 的系数位置；

$D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$，即将方程组右端的常数项分别取代 $D$ 中 $z$ 的系数位置.

这样，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.5)的解可简记为

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}.$$

上述方法称为解三元线性方程组的克拉默法则.

**例 4**　求解方程组$\begin{cases} 2x-3y+z=-1, \\ x+y+z=6, \\ 3x+y-2z=-1. \end{cases}$

**解**　$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-4+1-9)-(3+2+6)=-23,$

$D_x=\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(2+6+3)-(-1-1+36)=-23,$

$$D_y=\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&6&1\\3&-1&-2\end{vmatrix}=(-24-1-3)-(18+2-2)=-46,$$

$$D_z=\begin{vmatrix}2&-3&-1\\1&1&6\\3&1&-1\end{vmatrix}=(-2-1-54)-(-3+3+12)=-69.$$

因为 $D\neq 0$,所以方程组有解

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-23}{-23}=1,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-46}{-23}=2,\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{-69}{-23}=3.\square$$

用对角线法则计算行列式有时运算较繁,况且这种方法对三阶以上的行列式不再成立,所以需要新的计算法,在线性代数课程中通过对行列式的更一般的定义与性质讨论可得解决方法.我们现在利用其中的性质来简化三阶行列式的计算,为此,首先引入子行列式和代数余子式这两个新的概念 .

**定义** 把行列式中某一元素所在的行和列划去,留下来的行列式称为这个行列式对应于该元素的子行列式.

例如,行列式 $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ 对应于元素 $b_2$ 的子行列式为 $\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_3&c_3\end{vmatrix}$.

**定义** 设行列式中某一元素所在的行数为 $i$,列数为 $j$,将对应该元素的子行列式乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子称为对应于该元素的代数余子式.

例如,行列式 $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ 对应于 $b_1$ 的代数余子式为:$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}$.

其中,因为 $b_1$ 在第一行第二列,所以 $i=1,j=2$.

由于

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}&=(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2)-(a_1b_3c_2+a_2b_1c_3+a_3b_2c_1)\\&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2),\end{aligned}$$

再用二阶行列式记括号内的表达式,便得

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix},\tag{1.6}$$

其中三个二阶列式 $\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}$ 是三阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ 中第一行元素 $a_1,b_1,c_1$ 所对应的子行列式,而(1.6)式右端是第一行元素 $a_1,b_1,c_1$ 与其对应的代表余子式的乘积之和.于是得到三阶行列式等于它的第一行元素与对应于它的代数余子式的乘积之和,

也称为按第一行的展开式. 同时这个方法可推广到按任一行或任一列元素的展开,即有:

**三阶行列式等于它的任一行(或任一列)的各元素与对应于它的代数余子式的乘积之和.**

另外,上述方法还可推广到三阶以上的行列式.

**例 5**　用按行展开法求 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

**解**　按第一行展开,有

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-3) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-3) + 3 \times (-5) + 1 \times (-2) = -6 - 15 - 2 = -23;$$

按第二行展开,有

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times 5 + 1 \times (-7) - 1 \times 11 = -5 - 7 - 11 = -23.$$

## 习题 7 - 1

1. 分别用对角线法则和按行展开法计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

2. 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & 4 & 1 \\ x^2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

3. 用克拉默法则解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 3x + 5y = 19, \\ 2x + 3y = 12; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x - y + z = 6, \\ 3x + 2y - 5z = -13, \\ x + 3y - 2z = 1. \end{cases}$

4. 验证

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \end{vmatrix} = 0.$$

# §2　矢量概念及矢量的线性运算

## §2.1　矢量概念

人们在日常生活和生产实践中常遇到两类量,一类如温度、距离、体积、质量等,这种只有大小没有方向的量称为数量,也称为纯量或标量. 另一类如力、位移、速度、加速度等,它们不但

有大小而且有方向，这种具有大小和方向的量称为矢量，也称为向量. 如何来表示矢量呢?在几何上，可用空间的一个带有方向的线段即有向线段来表示，在选定长度单位后，这个有向线段的长度表示矢量的大小，它的方向表示矢量的方向.

如图7－2所示，以 $A$ 为起点，$B$ 为终点的矢量记作 $\overrightarrow{AB}$. 为简便起见，常用一个粗体字母表示矢量，如上 $\overrightarrow{AB}$ 也可记作 $\boldsymbol{a}$.

矢量的大小叫做矢量的模或长度，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$. 起点与终点重合的矢量，即长度等于零的矢量称为**零矢量**，记作 $\mathbf{0}$，零矢量的方向不确定，或说它的方向是任意的.

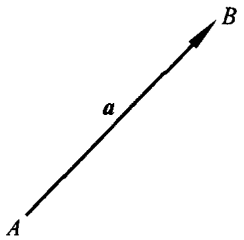



图7－2

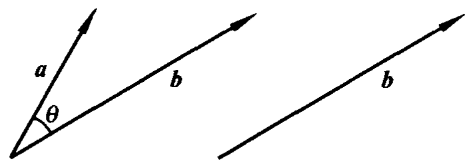



图7－3

两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果它们的方向相同且模相等，则称这两个矢量相等，记作 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. 根据这个规定，一个矢量和它经过平行移动(方向不变，起终点位置改变) 所得的矢量是相等的，这种矢量称为**自由矢量**. 以后如无特别说明，我们所讨论的矢量都是自由矢量. 由于自由矢量只考虑其大小和方向，因此用有向线段表示矢量时，其起点位置可以任意取，这样在讨论矢量的几何运算时将更加方便.

记两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 $\theta$(图7－3)，我们规定 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. 特别地，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\theta = 0$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\theta = \pi$.

**注意：**矢量的大小和方向是组成矢量的不可分割的部分，也是矢量与数量的根本区别所在. 因此，在讨论矢量的运算时，必须把它的大小和方向统一起来考虑.

下面我们介绍矢量的线性运算，矢量的线性运算包括矢量的加法、减法和数乘.

## §2.2　矢量的加法

由力学知识，作用在一质点上的两个力 $\boldsymbol{f}_1$ 与 $\boldsymbol{f}_2$ 的合力 $\boldsymbol{f}$ 可按平行四边形法则求得(图7－4)，对于速度也有同样的结论. 一般地，两矢量的加法可定义如下：

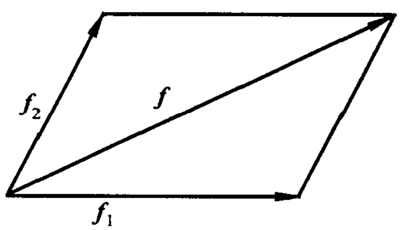



图7－4

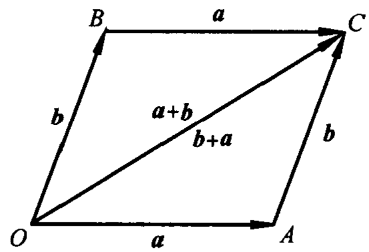



图7－5

**定义**　设有两矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以这两个矢量为邻边作平行四边形，其对角线矢量 $\overrightarrow{OC}$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 7－5)，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

这种求和法则叫做**平行四边形法则**. 因为 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$. 由此可得，两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，可以矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为矢量 $\boldsymbol{b}$ 的起点，从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点所作的矢量即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和矢量. 这种方法称为**三角形法则**.

三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 相加，只需用三角形法则(或平行四边形法则)，先作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，然后再将 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 相加，作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$(图 7－6)，即只要把三个矢量中前一个矢量的终点作为下一个矢量的起点，再从最初的矢量的起点到第三个矢量的终点所作的矢量，就是它们的和. 这种方法可推广到三个以上的矢量相加(图 7－7).

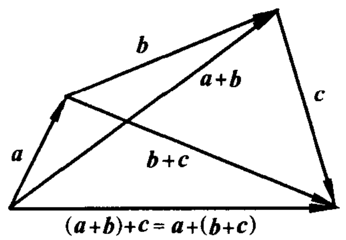



图 7－6

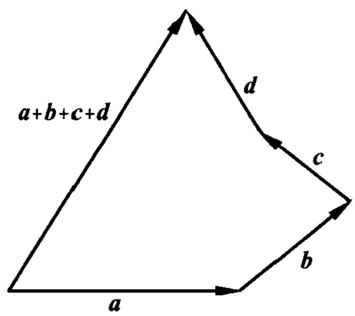



图 7－7

据定义，由图 7－5 及图 7－6 可以得出，矢量的加法服从交换律和结合律：

1. **交换律**　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

2. **结合律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

## §2.3　矢量的减法

如同数的减法是加法的逆运算一样，矢量的减法也是加法的逆运算，矢量的减法定义如下：

**定义**　已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，若矢量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则矢量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

以某一点 $O$ 为共同起点引矢量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OQ}$(图 7－8). 由定义 $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{QP}=\boldsymbol{a}$，所以，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{QP}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 于是，我们得到矢量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的作图法：过空间同一点引矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，则以减矢量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以被减矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的矢量就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 .

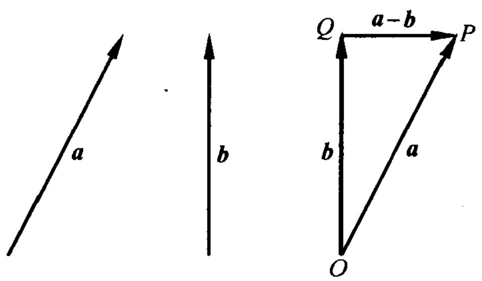



图 7－8