

微积分 (下)

Calculus (Vol.II)

苏德矿 吴明华 编
金蒙伟 杨起帆

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



华航Z0197155



CHEP
高等教育出版社



Springer
施普林格出版社

微 积 分

(下)

主 编 苏德矿 吴明华

编 者 苏德矿 吴明华
金蒙伟 杨起帆

浙江大学数学系



CHEP
高等教育出版社



Springer
施普林格出版社

本书是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,也是根据作者多年的教学和科研经验,集思广益,并广泛汲取校内外意见的一本改革性教材.本书分上、下两册出版.下册共 6 章,主要内容有:矢量代数与空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分与曲面积分,级数,含参量积分.本书可作为本科生教材,适用于工科、理科、经济及管理各专业.

本书在保留我国传统的重归纳、演绎、推理的特色之外,更注重分析综合的思想.许多定理的条件与结论用发现探索式方法给出,并用分析、综合的方法给予证明.为了培养学生的数学素质和自我发现的能力,把数学建模的最基本内容和最基本方法融入教材中,便于学生在学习微积分的过程中,也学会用数学方法建立数学模型解决实际问题.此外,在教材中还增加了微积分在经济中的应用:如连续复利、年有效收益、现值与将来值、边际分析、弹性分析、最大利润、收入流等.与本书配合的微积分多媒体辅助教学光盘(CD-ROM),利用软件的文本、图形、动画及音效直观,清晰地讲授本书内容中的一些重要概念和定理,使学生容易理解和接受.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下) / 苏德矿 吴明华 主编. —北京: 高等教育出版社;
海德堡: 施普林格出版社, 2001.2
ISBN 7-04-009456-8

I. 微… II. ①苏… ②吴… III. 微积分 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 02785 号

微积分(下)

苏德矿 吴明华 金蒙伟 杨起帆 编

出版发行 高等教育出版社 施普林格出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009
电 话 010-64054588 传 真 010-64014048
网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所
印 刷 北京外文印刷厂

开 本 787×1092 1/16 版 次 2001 年 2 月第 1 版
印 张 20.25 印 次 2001 年 6 月第 2 次印刷
字 数 510 000 定 价 26.00 元

©China Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Heidelberg 2000

版权所有 侵权必究

责任编辑 徐 可
封面设计 王凌波
版式设计 杨 明
责任排版 杨 明
责任印制 陈伟光



目 录

第七章 向量代数与空间解析几何	(1)
§1 二阶、三阶行列式及线性方程组	(1)
§1.1 二阶行列式和二元线性方程组	(1)
§1.2 三阶行列式和三元线性方程组	(3)
习题 7-1	(6)
§2 向量概念及向量的线性运算	(6)
§2.1 向量概念	(6)
§2.2 向量的加法	(7)
§2.3 向量的减法	(8)
§2.4 数量与向量的乘法	(9)
§2.5 向量的线性组合与向量的分解	(10)
习题 7-2	(12)
§3 空间直角坐标系与向量的坐标表达式	(12)
§3.1 空间直角坐标系	(12)
§3.2 空间两点间的距离	(13)
§3.3 向量的坐标表达式	(14)
§3.4 向量的代数运算	(15)
习题 7-3	(16)
§4 两矢量的数量积与矢量积	(17)
§4.1 两矢量的数量积	(17)
§4.2 两矢量的矢量积	(20)
习题 7-4	(23)
§5 矢量的混合积与二重矢积	(24)
§5.1 三矢量的混合积	(24)
§5.2 三矢量的二重矢积	(26)
习题 7-5	(27)
§6 平面与直线方程	(27)
§6.1 平面及平面方程	(27)
§6.2 空间直线方程	(31)
§6.3 平面束方程	(36)
习题 7-6	(37)

§7 曲面方程与空间曲线方程·····	(38)
§7.1 曲面方程·····	(38)
§7.2 空间曲线方程·····	(44)
习题7-7·····	(48)
§8 二次曲面·····	(48)
习题7-8·····	(52)
第七章综合题·····	(53)
第八章 多元函数微分学 ·····	(54)
§1 多元函数的极限与连续性·····	(54)
§1.1 多元函数的概念·····	(54)
§1.2 平面点集·····	(55)
§1.3 二元函数的极限与连续·····	(57)
习题8-1·····	(59)
§2 偏导数与全微分·····	(60)
§2.1 偏导数·····	(60)
§2.2 全微分·····	(67)
习题8-2·····	(72)
§3 复合函数微分法·····	(73)
§3.1 复合函数的偏导数·····	(73)
§3.2 复合函数的全微分·····	(78)
习题8-3·····	(79)
§4 隐函数的偏导数·····	(80)
§4.1 隐函数的偏导数·····	(80)
§4.2 隐函数组的偏导数·····	(82)
* §4.3 反函数组的偏导数·····	(84)
习题8-4·····	(85)
§5 场的方向导数与梯度·····	(86)
§5.1 场的概念·····	(86)
§5.2 场的方向导数·····	(87)
§5.3 梯 度·····	(89)
习题8-5·····	(91)
§6 多元函数的极值及应用·····	(92)
§6.1 多元函数的泰勒公式·····	(92)
§6.2 多元函数的极值·····	(95)
习题8-6·····	(108)
§7 偏导数在几何上的应用·····	(108)
§7.1 矢值函数的微分法·····	(108)
§7.2 空间曲线的切线与法平面·····	(110)
§7.3 空间曲面的切平面与法线·····	(111)

习题 8-7	(116)
第八章综合题	(117)
第九章 重积分	(119)
§1 二重积分的概念	(119)
§1.1 二重积分的概念	(119)
§1.2 二重积分的性质	(122)
习题 9-1	(123)
§2 二重积分的计算	(124)
§2.1 在直角坐标系中计算二重积分	(124)
§2.2 在极坐标系中计算二重积分	(131)
* §2.3 在一般曲线坐标系中计算二重积分	(137)
习题 9-2	(138)
§3 三重积分	(140)
§3.1 三重积分的概念	(140)
§3.2 在直角坐标系中计算三重积分	(140)
§3.3 在柱面坐标系、球面坐标系及一般曲面坐标系中计算三重积分	(145)
§3.4 点函数积分的概念、性质及应用	(156)
习题 9-3	(165)
第九章综合题	(166)
第十章 曲线积分与曲面积分	(168)
§1 第一类曲线积分与第一类曲面积分	(168)
§1.1 第一类曲线积分	(168)
§1.2 第一类曲面积分	(170)
习题 10-1	(174)
§2 第二类曲线积分	(175)
§2.1 第二类曲线积分的概念	(175)
§2.2 格林公式	(182)
§2.3 平面曲线积分与路径无关性	(185)
习题 10-2	(193)
§3 第二类曲面积分	(194)
§3.1 第二类曲面积分的概念	(194)
§3.2 第二类曲面积分的计算	(196)
§3.3 高斯公式	(199)
§3.4 散度场	(202)
习题 10-3	(203)
§4 斯托克斯公式、空间曲线积分与路径无关性	(204)
§4.1 斯托克斯公式	(204)
§4.2 空间曲线积分与路径无关性	(207)
§4.3 旋度场	(208)

* § 4.4 势量场	(209)
* § 4.5 向量微分算子	(211)
习题 10-4	(212)
第十章综合题	(212)
第十一章 级数	(214)
§ 1 数项级数的基本概念	(214)
§ 1.1 数项级数的概念	(214)
§ 1.2 数项级数的基本性质	(218)
习题 11-1	(221)
§ 2 正项级数收敛性的判别法	(221)
习题 11-2	(231)
§ 3 一般数项级数收敛性的判别法	(232)
§ 3.1 交错级数	(232)
§ 3.2 绝对收敛级数与条件收敛级数	(233)
§ 3.3 绝对收敛级数的性质	(235)
习题 11-3	(240)
* § 4 函数项级数与一致收敛性	(240)
§ 4.1 函数项级数的基本概念	(240)
§ 4.2 函数项级数一致收敛的概念	(241)
§ 4.3 函数项级数一致收敛性的判别法	(242)
§ 4.4 一致收敛级数的性质	(244)
习题 11-4	(246)
§ 5 幂级数及其和函数	(247)
§ 5.1 幂级数及其收敛半径	(247)
§ 5.2 幂级数的性质及运算	(250)
§ 5.3 幂级数的和函数	(253)
习题 11-5	(257)
§ 6 函数展成幂级数	(257)
§ 6.1 泰勒级数	(257)
§ 6.2 基本初等函数的幂级数展开	(259)
§ 6.3 函数展成幂级数的其它方法	(261)
习题 11-6	(264)
§ 7 幂级数的应用	(264)
§ 7.1 函数的近似公式	(264)
§ 7.2 数值计算	(265)
§ 7.3 积分计算	(265)
习题 11-7	(267)
§ 8 函数的傅里叶级数展开	(267)
§ 8.1 傅里叶级数的概念	(267)

§ 8.2 周期函数的傅里叶展开	(270)
§ 8.3 有限区间上的傅里叶展开	(273)
* § 8.4 复数形式的傅里叶级数	(280)
* § 8.5 矩形区域上二元函数的傅里叶展开	(281)
习题 11-8	(282)
第十一章综合题	(282)
* 第十二章 含参量积分	(285)
§ 1 含参量的常义积分	(285)
§ 2 含参量的非正常积分	(288)
§ 2.1 含参量的非正常积分	(288)
§ 2.2 含参量的非正常积分的性质	(290)
§ 3 Γ 函数与 B 函数	(293)
§ 3.1 Γ 函数	(293)
§ 3.2 B 函数	(294)
§ 3.3 Γ 函数与 B 函数的关系	(295)
第十二章综合题	(296)
附录 IV 度量空间与连续算子	(298)
§ 4.1 度量空间的基本概念	(298)
§ 4.2 度量空间中的邻域、极限、连续	(299)
习题答案	(301)

第七章 向量代数与空间解析几何

在中学我们已经学过平面解析几何和各种数系,本章我们将学习一种新的代数体系——向量代数.向量代数是数学、物理、力学以及工程技术中一种重要的数学工具.向量代数与实数代数有很多类似之处但又不完全相同,它可作为由实数体系学习抽象代数体系的桥梁.空间解析几何通过空间直角坐标系,用代数方法研究空间几何问题.本章我们先介绍向量概念以及向量的某些运算,然后讲述空间解析几何,其主要内容是平面和直线方程,一些常用的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的某些基本问题,这些方程的建立和问题的解决是以向量作为工具的.同时,本章的内容对以后学习多元函数的微分学和积分学在几何图形的描绘上将起到非常重要的作用.

§ 1 二阶、三阶行列式及线性方程组

本节作为预备知识,我们介绍二阶、三阶行列式的由来及其概念和展开式,以便在解线性方程组和向量运算中使用.

§ 1.1 二阶行列式和二元线性方程组

求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & (1.1) \\ a_2x + b_2y = c_2. & (1.2) \end{cases}$$

用消去法解, $(1.1) \times b_2 - (1.2) \times b_1$ 消去 y , 得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2,$$

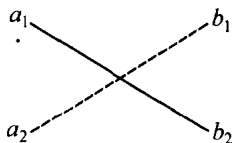
用同样的方法消去 x , 得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

若 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, 可得该方程组的唯一解:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \quad (1.3)$$

为了便于记忆,我们引入二阶行列式概念,并用二阶行列式来表示(1.3)式所表示的解.注意到上式分子、分母只与方程组的系数及常数项有关,其中分母 $a_1b_2 - a_2b_1$ 中各个乘数按它们原来在方程组中的位置成有序排列,即



我们称实线表示的对角线为主对角线,虚线表示的对角线为副对角线,这样 $a_1b_2 - a_2b_1$ 就是

主对角线上两个数的乘积减去副对角线上两个数的乘积之差. 我们引进符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \triangleq a_1 b_2 - a_2 b_1. \quad (1.4)$$

称(1.4)式左端为二阶行列式, 其中 a_1, a_2, b_1, b_2 称为行列式的元素, 这四个元素排列成二行二列(横写的称为行, 竖写的称为列). 称(1.4)式右端为该二阶行列式的展开式, 这种展开方法称为对角线法则. 例如,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 5 = -14.$$

这样, 二元线性方程组在其系数行列式 $D \triangleq \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 的条件下, 解的公式可写成

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D},$$

其中, $D_x \triangleq \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, 即用方程组右端常数项取代 D 中 x 的系数位置; $D_y \triangleq \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, 即用方程组右端常数项取代 D 中 y 的系数位置. 也可直接写成

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

上述方法称为解二元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

下面讨论当方程组的系数行列式 $D = 0$ 的情形. 这时由消去法可得

$$D \cdot x = D_x, \quad D \cdot y = D_y.$$

1. 当 $D = 0$ 而 D_x, D_y 中至少有一个不等于零时, 这时上述二个等式不能同时成立, 因此方程组无解;

2. 当 $D = 0$ 而 D_x, D_y 均等于零时, 可得

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0, \quad c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0, \quad a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0,$$

即有 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. 这表明方程组中一个方程可由另一个方程乘上一常数得到, 这时方程组有无穷多组解.

综上所述:

1. 当 $D \neq 0$ 时, 二元线性方程组有唯一确定解 $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$;

2. 当 $D = 0$ 时, 而 D_x, D_y 中至少有一个不等于零时, 方程组无解;

3. 当 $D = 0, D_x = 0, D_y = 0$ 时, 方程组有无穷多组解.

例 1 求解方程组 $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 5x + 2y = 12. \end{cases}$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

所以方程组有唯一确定解:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 12 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

例 2 求解方程组 $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 4x + 2y = 3. \end{cases}$

解 因为 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 而 $D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, 所以方程组无解, 易知上述二个方程为矛盾方程.

例 3 求解方程组 $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 4x + 2y = 10. \end{cases}$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 0, D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

所以方程组有无穷多组解. 事实上, 第二个方程可由第一个方程乘以 2 得到, 亦即可把该方程组看成一个方程 $2x + y = 5$, 故有无穷多组解.

§ 1.2 三阶行列式和三元线性方程组

求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \quad (1.5)$$

用消去法, 先从前两个方程消 z , 再消去 y , 可得

$$\begin{aligned} & (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)x \\ & = b_1c_2d_3 + b_2c_3d_1 + b_3c_1d_2 - b_1c_3d_2 - b_2c_1d_3 - b_3c_2d_1 \end{aligned}$$

当 x 的系数 $D \triangleq a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \neq 0$ 时, 可解得 x ; 同理可解得 y 和 z . 即有

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{D}(b_1c_2d_3 + b_2c_3d_1 + b_3c_1d_2 - b_1c_3d_2 - b_2c_1d_3 - b_3c_2d_1); \\ y &= \frac{1}{D}(a_1c_3d_2 + a_2c_1d_3 + a_3c_2d_1 - a_1c_2d_3 - a_2c_3d_1 - a_3c_1d_2); \\ z &= \frac{1}{D}(a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3 - a_3b_2d_1). \end{aligned}$$

所以, 当 $D \neq 0$ 时, 方程组(1.5)有上述唯一解.

为了便于记忆, 与二元线性方程组类似, 我们引进符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \triangleq a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

上述等式左端称为三阶行列式, 其中 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 为三阶行列式的元素, 这 9

个元素按原三元线性方程组的位置排列成三行三列;右端为三阶行列式的展开式,该展开式也可采用对角线法则:即主对角线(图 7-1 中用实线相连的三组所示)三项之和减去副对角线(图 7-1 中用虚线相连的三组所示)三项之和的差,共六项之代数和.

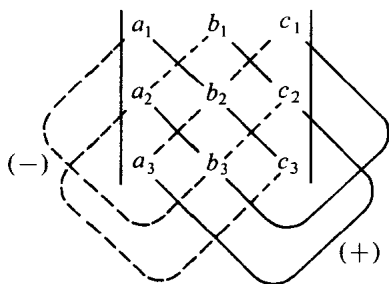


图 7-1

这样,方程组(1.5)中的系数所组成的三阶行列式为: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.并记

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ 即将方程组右端的常数项分别取代 } D \text{ 中 } x \text{ 的系数位置;}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ 即将方程组右端的常数项分别取代 } D \text{ 中 } y \text{ 的系数位置;}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}, \text{ 即将方程组右端的常数项分别取代 } D \text{ 中 } z \text{ 的系数位置.}$$

这样,当 $D \neq 0$ 时,方程组(1.5)的解可简记为

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}.$$

上述方法称为解三元线性方程组的克拉默法则.

例 4 求解方程组
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1, \\ x + y + z = 6, \\ 3x + y - 2z = -1. \end{cases}$$

解
$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-4 + 1 - 9) - (3 + 2 + 6) = -23,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2 + 6 + 3) - (-1 - 1 + 36) = -23,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-24 - 1 - 3) - (18 + 2 - 2) = -46,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2 - 1 - 54) - (-3 + 3 + 12) = -69.$$

因为 $D \neq 0$, 所以方程组有解

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-23}{-23} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-46}{-23} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-69}{-23} = 3. \square$$

用对角线法则计算行列式有时运算较繁, 况且这种方法对三阶以上的行列式不再成立, 所以需要新的算法, 在线性代数课程中通过对行列式的更一般的定义与性质讨论可得解决方法. 我们现在利用其中的性质来简化三阶行列式的计算, 为此, 首先引入子行列式和代数余子式这两个新的概念.

定义 把行列式中某一元素所在的行和列划去, 留下来的行列式称为这个行列式对应于该元素的子行列式.

例如, 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 对应于元素 b_2 的子行列式为 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

定义 设行列式中某一元素所在的行数为 i , 列数为 j , 将对应该元素的子行列式乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子称为对应于该元素的代数余子式.

例如, 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 对应于 b_1 的代数余子式为: $(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

其中, 因为 b_1 在第一行第二列, 所以 $i = 1, j = 2$.

由于

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2) - (a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1) \\ = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2),$$

再用二阶行列式记括号内的表达式, 便得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (1.6)$$

其中三个二阶行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ 是三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 中第一行元素

a_1, b_1, c_1 所对应的子行列式, 而(1.6)式右端是第一行元素 a_1, b_1, c_1 与其对应的代表余子式的乘积之和. 于是得到三阶行列式等于它的第一行元素与对应于它的代数余子式的乘积之和,

也称为按第一行的展开式. 同时这个方法可推广到按任一行或任一列元素的展开, 即有:

三阶行列式等于它的任一行(或任一列)的各元素与对应于它的代数余子式的乘积之和.

另外, 上述方法还可推广到三阶以上的行列式.

例 5 用按行展开法求
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 按第一行展开, 有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} &= 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-3) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-3) + 3 \times (-5) + 1 \times (-2) = -6 - 15 - 2 = -23; \end{aligned}$$

按第二行展开, 有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} &= -1 \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times 5 + 1 \times (-7) - 1 \times 11 = -5 - 7 - 11 = -23. \end{aligned}$$

习题 7-1

1. 分别用对角线法则和按行展开法计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

2. 解方程
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & 4 & 1 \\ x^2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 用克拉默法则解下列线性方程组:

$$(1) \begin{cases} 3x + 5y = 19, \\ 2x + 3y = 12; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x - y + z = 6, \\ 3x + 2y - 5z = -13, \\ x + 3y - 2z = 1. \end{cases}$$

4. 验证

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 2 向量概念及矢量的线性运算

§ 2.1 向量概念

人们在日常生活和生产实践中常遇到两类量, 一类如温度、距离、体积、质量等, 这种只有大小没有方向的量称为数量, 也称为纯量或标量. 另一类如力、位移、速度、加速度等, 它们不但

有大小而且有方向,这种具有大小和方向的量称为向量,也称为向量.如何来表示向量呢?在几何上,可用空间的一个带有方向的线段即有向线段来表示,在选定长度单位后,这个有向线段的长度表示向量的大小,它的方向表示向量的方向.

如图7-2所示,以A为起点,B为终点的向量记作 \overrightarrow{AB} .为简便起见,常用一个粗体字母表示向量,如上 \overrightarrow{AB} 也可记作 \mathbf{a} .

向量的大小叫做向量的模或长度,记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\mathbf{a}|$.起点与终点重合的向量,即长度等于零的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$,零向量的方向不确定,或说它的方向是任意的.

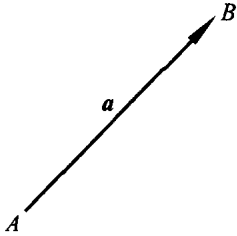


图 7-2

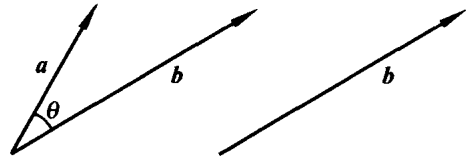


图 7-3

两个向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} ,如果它们的方向相同且模相等,则称这两个向量相等,记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.根据这个规定,一个向量和它经过平行移动(方向不变,起终点位置改变)所得的向量是相等的,这种向量称为自由向量.以后如无特别说明,我们所讨论的向量都是自由向量.由于自由向量只考虑其大小和方向,因此用有向线段表示向量时,其起点位置可以任意取,这样在讨论向量的几何运算时将更加方便.

记两向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 之间的夹角为 θ (图7-3),我们规定 $0 \leq \theta \leq \pi$.特别地,当 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 同向时, $\theta = 0$;当 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 反向时, $\theta = \pi$.

注意:向量的大小和方向是组成向量的不可分割的部分,也是向量与数量的根本区别所在.因此,在讨论向量的运算时,必须把它的大小和方向统一起来考虑.

下面我们介绍向量的线性运算,向量的线性运算包括向量的加法、减法和数乘.

§ 2.2 向量的加法

由力学知识,作用在一质点上的两个力 f_1 与 f_2 的合力 f 可按平行四边形法则求得(图7-4),对于速度也有同样的结论.一般地,两向量的加法可定义如下:

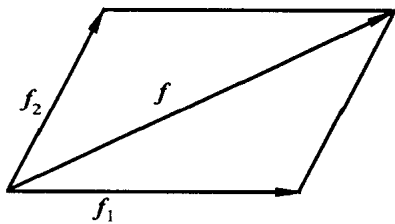


图 7-4

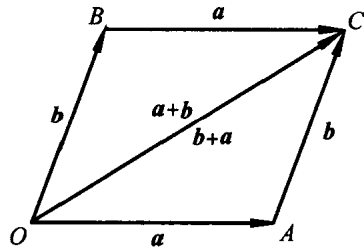


图 7-5

定义 设有两向量 a, b , 作 $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b$, 以这两个向量为邻边作平行四边形, 其对角线向量 \vec{OC} 称为向量 a 与 b 的和(图 7-5), 记作 $c = a + b$.

这种求和法则叫做平行四边形法则. 因为 $\vec{OB} = \vec{AC}$, 所以 $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AC}$. 由此可得, 两向量 a 与 b 的和, 可以向量 a 的终点作为向量 b 的起点, 从 a 的起点到 b 的终点所作的向量即为 a 与 b 的和向量. 这种方法称为三角形法则.

三个向量 a, b, c 相加, 只需用三角形法则(或平行四边形法则), 先作出 $a + b$, 然后再将 $a + b$ 与 c 相加, 作出 $a + b + c$ (图 7-6), 即只要把三个向量中前一个向量的终点作为下一个向量的起点, 再从最初的向量的起点到第三个向量的终点所作的向量, 就是它们的和. 这种方法可推广到三个以上的向量相加(图 7-7).

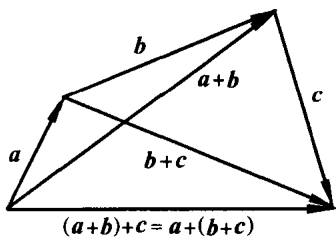


图 7-6

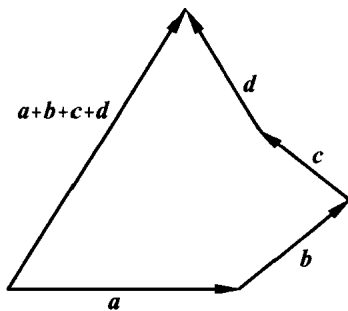


图 7-7

据定义, 由图 7-5 及图 7-6 可以得出, 向量的加法服从交换律和结合律:

1. 交换律 $a + b = b + a$;
2. 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$.

§ 2.3 向量的减法

如同数的减法是加法的逆运算一样, 向量的减法也是加法的逆运算, 向量的减法定义如下:

定义 已知向量 a 与 b , 若向量 c 满足 $b + c = a$, 则向量 c 称为 a 与 b 的差, 记作 $c = a - b$.

以某一点 O 为共同起点引向量 $a = \vec{OP}, b = \vec{OQ}$ (图 7-8). 由定义 $b + \vec{QP} = a$, 所以, $c = \vec{QP} = a - b$. 于是, 我们得到向量 $a - b$ 的作图法: 过空间同一点引向量 a 与 b , 则以减向量 b 的终点为起点, 以被减向量 a 的终点为终点的向量就是 a 与 b 的差.

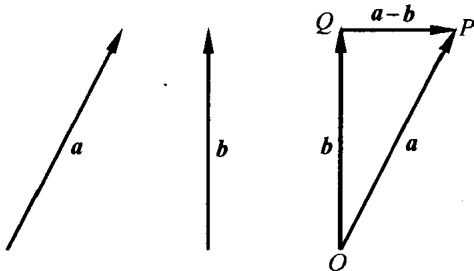


图 7-8