

国 家 “ 九 五 ” 规 划 重 点 图 书

混沌科学丛书

HUNDUN KEXUE CONGSHU

电学中的混沌

徐云 宋向东 濮岚澜 著

也许混沌与电学是天生的缘分，使得电类学科成为混沌应用的最热学科群。但是，我们将表达一个令电学研究者感到遗憾的事实：尽管研究混沌的电路非常简单，尽管混沌应用在电学领域非常火爆，但至今仍没有一个简单完美的解释，使人们用已知的电学知识了解混沌和其他非线性现象在电路里产生的机制。



东北师范大学出版社

国家“九五”规划重点图书

徐云 宋向东 濮岚澜 著

电学中的混沌

● 混沌科学丛书

东北师范大学出版社

中国·长春

(吉)新登字12号

出版者 ◆ 贾国祥
总策划 ◆ 王忠山
著者 ◆ 徐云 宋向东 濮岚澜
责任编辑 ◆ 王忠山
封面设计 ◆ 李冰彬
责任校对 ◆ 方军
责任印制 ◆ 张允豪 梁喜湖

混沌科学丛书

● 电学中的混沌

DIANXUE ZHONG DE HUNDUN

发 行 者 ◆ 东北师范大学出版社
地址: 吉林省长春市人民大街138号
邮编: 130024
电话: 0431-5695744 5688470
传真: 0431-5695744 5695734
网址: [http:// www.nenu.edu.cn](http://www.nenu.edu.cn)
电子信箱: Chubs@ivy.nenu.edu.cn

制 版 ◆ 东北师范大学出版社激光照排中心
印 刷 ◆ 吉林省吉新月历公司印刷分公司
版 次 ◆ 1999年10月第1版
印 次 ◆ 1999年10月第1次印刷
开 本 ◆ $850 \times 1092 (\text{mm}^2)$ 1/32
印 张: 5.625
字 数: 110千

印 数 ◆ 0 001册~5 000册
书 号 ◆ ISBN 7-5602-2432-6/TN·1
定 价 ◆ 7.50元

前 言

混沌理论及混沌现象是非线性科学研究中最重要的组成部分之一,近20年来,它特别得到自然科学、人文科学及技术科学的各个领域内的科学家的关注,这不仅说明混沌现象和理论的普遍性及探索混沌奥秘的迫切性,而且反映了各个领域对混沌现象和理论在应用前景上的殷切希望。混沌研究的结果打破了确定论和随机论泾渭分明的界限:对于原来不含有任何外来随机因素的系统 and 模型,其长时间的行为既表现出随机性和微观不可预测性,又表现出宏观结构的总体稳定性及有序性。

非线性电路中的混沌现象是最早引起人们关注的现象之一。电路系统与其对应的数学模型具有很好的吻合性,使电路模型能够方便地模拟各种非电学混沌系统,并能够很好地复现各种复杂的非线性现象。因此,在混沌的理论探索和应用探索中,电路充当着一个非常重要的角色。

由于展现混沌现象的非线性电路具有结构简单、元件物理意义明确、重复性好、容易观察的特点,所以常被作为混沌理论入门的范例。通过电学来研究混沌的优越条件

是:一个简单的实际非线性电路,它仅含4个电路元件,却能集中呈现出非常丰富的混沌和各种复杂有趣的非线性现象;而在其他非电学的实际系统里,这些现象通常只能是出现在不同领域的多个系统中。电路元件特征和参数的改变易如反掌,使人们能方便地研究和观察混沌。利用计算机模拟电路的实验,使神秘莫测的混沌与分岔近在咫尺,清晰可见。

也许混沌与电学有天生的缘分,使得电类学科成为混沌应用最热的学科群:电力系统、功率电子学、通讯、神经网络、锁相环……都在拓展着混沌的应用。

然而,我们却仍将表达一个令电学研究者感到遗憾的事实:尽管研究混沌的电路非常简单,尽管混沌的应用在电学领域非常火爆,但至今仍没有一个简单完美的解释,使人们可以用已知的电学知识去了解混沌和其他非线性现象在电路里的产生机制。我们出版这本书的目的也就是吸引对混沌感兴趣的广大电学研究者,通过大家共同的努力去解决这一令人感到缺憾的事实。

由于时间仓促及水平有限,书中的错误在所难免,望广大读者给予批评指正。

徐 云

1999年6月于清华大学

目 录

第一章 动力学电路与统计学电路

§ 1.1 二阶线性动力学电路的定量与定性分析	2
§ 1.2 二阶非线性动力学电路	17
§ 1.3 非线性统计学网络	26

第二章 混沌与非线性电路

§ 2.1 混沌现象的研究	34
§ 2.2 非线性电路中混沌的判别方法	40
§ 2.3 非线性电路中混沌的普遍性	53

第三章 非线性自治电路

§ 3.1 Canard 轨迹与二阶单结管电路	59
§ 3.2 直流激励下的 Canard 动态过程响应	63
§ 3.3 二阶自治电路中的混沌	66

§ 3.4 计算机模拟研究	68
§ 3.5 蔡氏电路与双涡卷轨迹	74

第四章 非线性二阶电路对周期信号的响应

§ 4.1 非线性二阶电路对正弦信号的响应	85
§ 4.2 Canard 电路在小周期信号激励下的 临界响应	95

第五章 非线性电路的噪声响应

§ 5.1 随机信号的产生与测量	105
§ 5.2 非线性电路在噪声和直流激励下的 响应	109
§ 5.3 非线性系统在周期信号和噪声信号 激励下的随机共振	118

第六章 混沌电路的应用探索:设想与实验验证

§ 6.1 混沌在信息加密中的应用探索	132
§ 6.2 利用混沌拓宽锁相环的捕获范围:设想与 实验验证	139
§ 6.3 混沌跳频序列产生器的实现	149

第七章 实际工程中的分岔及不稳定现象

§ 7.1 晶闸管控制电抗器装置	154
§ 7.2 晶闸管控制电抗器特性的经典分析	156
§ 7.3 晶闸管电流新增一个零点而引起的 不稳定性	157

§ 7.4 数值模拟分析	159
§ 7.5 实验室试验结果	163
参 考 文 献	166

第一章 动力学电路与统计学电路

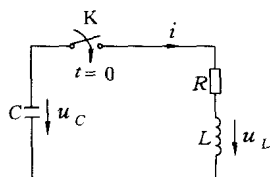
电学中的电路千差万别,但传统上将这些电路分为三类,即电阻性电路、动力学电路和统计学电路。这三类电路宏观上又分属于确定性和随机性两类截然不同的系统:属于确定性系统的电路中的元件、元件参数和激励源都是确定的,因此它们的响应也是确定的;属于随机性系统的那些电路的元件、元件参数或激励源中含有随机量,因此它们的响应也是不确定的(随机的),只能用统计的方法分析和处理,因此称之为统计学电路。

电路中的混沌实际上就是在一定的参数条件下,在一些属于确定性系统的电路里产生的随机响应,即在属于确定性系统的电路中产生属于随机性系统的响应。确定性系统中什么样的电路才有可能产生混沌响应?只有动力学电路,而且仅有非线性动力学电路才有可能产生混沌响应。动力学电路其实就是含有储能元件(如电容器、电感器)的电路。如果动力学电路中只含有线性元件,则称为线性动力学电路,其状态演变规律用线性微分方程或线性差分方程来描述;如果动力学电路中含有非线性元件,则称为非线性动力学电路,其状态演变规律用非线性微分方程或差分方程来描述。

为了对以后内容的更深入了解,我们将在本章中对传统的线性动力学电路、非线性动力学电路和统计学电路的一些基本性质和分析方法做简单的介绍和回顾。

§ 1.1 二阶线性动力学电路的定量与定性分析

图 1-1 所示为 RLC 串联二阶线性电路,设电容 C 已充有电荷且电压为 U_0 时, $t=0$ 开关 K 闭合,电容 C 通过 R 和 L 放电。首先对放电过程作一个定性描述。



开关 K 闭合的初瞬时刻,电路中储存着能量,随着放电过程的进行,电阻 R 引起能量的不断损失,由此使电路中储存的能量越来越少,最后为零。所以,不管放电过程的形式如何,其最后的结局必然是电场能量为零,因而电容电压为零;磁场能量为零,因而电流也为零。

接下来可以具体求出该电路的响应。为此,建立电路关于响应电流 i 的微分方程。由电路可得方程

$$L \frac{di}{dt} + Ri - u_C = 0 \quad (1.1)$$

将上式对时间 t 求微分,同时考虑到 $i = -C \frac{du_C}{dt}$,因而

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{i}{C}, \text{ 则可得}$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

或

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \quad (1.2)$$

由于该电路中电容电压和电感电流不能跳变, 因而有

$$u_C(0) = U_0 \quad (1.3)$$

$$i(0) = 0 \quad (1.4)$$

令 $t=0_+$, 并将上列值代入式(1.1), 可得

$$L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} + R \times 0 - U_0 = 0$$

即

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{U_0}{L} \quad (1.5)$$

式(1.3)(1.4)(1.5)称为电路的初始条件式。现在来求解(1.1)。这是二阶线性齐次微分方程, 可令其解为

$$i = Ae^{Pt} \quad (1.6)$$

式中 A 和 P 均为待定常数。将式(1.6)代入式(1.2), 则有

$$\left(P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC} \right) Ae^{Pt} = 0 \quad (1.7)$$

为了使上式对于所有的 t 都成立, 就必须有

$$P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC} = 0 \quad (1.8)$$

式(1.8)为式(1.7)的特征方程, 也称做 RLC 串联电路的特征方程。由(1.8)可解得

$$P_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$P_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

若令

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad (1 \cdot 9)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1 \cdot 10)$$

则可将 P_1 、 P_2 写为

$$\begin{aligned} P_1 &= -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ P_2 &= -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \quad (1 \cdot 11)$$

可以看出, P_1 和 P_2 的值是由元件参数 R 、 L 和 C 决定的, 与电路的初始状态无关。方程(1.1)式的解可写成下列形式:

$$i = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} \quad (1 \cdot 12)$$

根据式(1.4)(1.5)确定 A_1 和 A_2 。当 $t=0^+$ 时有

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ P_1 A_1 + P_2 A_2 &= \frac{U_0}{L} \end{aligned} \quad (1 \cdot 13)$$

求解上式, 可得

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{U_0}{L(P_1 - P_2)} \\ A_2 &= \frac{-U_0}{L(P_1 - P_2)} \end{aligned} \quad (1 \cdot 14)$$

于是

$$i = \frac{U_0}{L(P_1 - P_2)} [e^{P_1 t} - e^{P_2 t}] \quad (1 \cdot 15)$$

应当指出, (1·15)式还是一般形式, 为了弄清 i 随时间变化的具体情况, 还需要就下列几种情形分别加以讨论。

1. 过阻尼状态

如果 $\delta > \omega_0$, 由 (1·13) 可以看出, P_1 和 P_2 是两个不等的负数, 且 $P_1 - P_2 = 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ 为正实数。这说明响应 i 含有两个衰减的常数

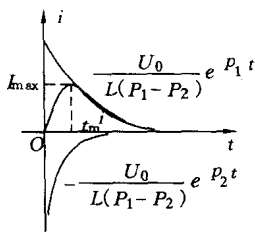


图 1-2 过阻尼状态

项, 一个为正, 即 $\frac{U_0}{L(P_1 - P_2)} e^{P_1 t}$;

一个为负, 即 $\frac{-U_0}{L(P_1 - P_2)} e^{P_2 t}$ 。

由于 $|P_1| < |P_2|$, 所以虽然二者都随着时间的推移而衰减, 但是前者衰减得慢, 后者衰减得快, 因而 i 始终保持正值, 如图 1-2 所示。

这种情况所反映的物理实质是: 电容 C 一直沿着一个方向放电, 直到放完为止。这样的响应称为过阻尼响应。

2. 欠阻尼响应

如果 $\delta < \omega_0$, 由式 (1·12) 可以看出, P_1 、 P_2 为一对共轭复数, 即

$$P_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta + j\omega_n$$

$$P_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta - j\omega_n \quad (1 \cdot 16)$$

式中

$$\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (1 \cdot 17)$$

于是, 由(1·15)得

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{\omega_n L} e^{-\delta t} \left(\frac{e^{j\omega_n t} - e^{-j\omega_n t}}{2j} \right) &= \frac{U_0}{\omega_n L} e^{-\delta t} \sin \omega_n t \\ &= I_0 e^{-\delta t} \sin \omega_n t \quad (1 \cdot 18) \end{aligned}$$

可见, 在这种情况下, 响应电流 i 为一个角频率为 ω_n 的正弦振荡; 同时, 电流的振幅随着时间按照指数规律衰减。这样的响应称为欠阻尼响应, 如图 1-3 所示。 δ 称为衰减系数, δ 越大, 说明衰减得越快。欠阻尼型响应所反映的物理实质是: 电容 C 并非单纯放电, 而是放了又充, 充了又放。

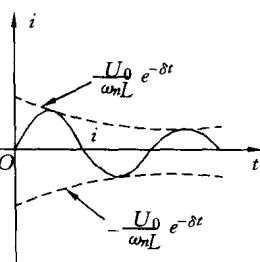


图 1-3 欠阻尼响应

3. 临界响应

如果 $\delta = \omega_0$, 那么 $P_1 = P_2 = -\delta$ 为两个相等负实数。此时 $\omega_n = 0$, 所以

$$i = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \quad (1 \cdot 19)$$

这样的响应称为临界响应, 如图 1-4 所示。

临界响应曲线与过阻尼响应曲线类似, 也可以看成是后者的极限情况。对以上三种情况, 它们有一个共同点, 那就是经过比较长的时间 t 后, i 的响应都按指数规律变化, 衰减趋近于零。换言之, 零是这个电路响应的吸引点, 无论 i 的响应过程如何变化, 它们会最终被吸引到零

点上。

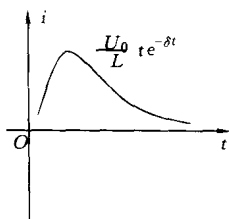


图 1-4 临界响应

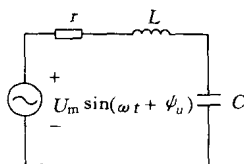


图 1-5 具有电阻、电感和电容的电路在正弦电压激励下接通

下面来研究,当 R 、 L 、 C 串联电路在正电压 $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ 激励下的情形。对图 1-5 有

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad (1 \cdot 20)$$

大家已经知道,表示稳定电流 i' 的方程式的特解为

$$i' = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad (1 \cdot 21)$$

其中

$$I_m = U_m / \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$\psi_i = \psi_u - \arctg \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / r \right]$$

与此相应,电容器的稳态电压 u'_C 的方程式的特解为

$$u'_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin \left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i)$$

从无强制项方程式的解答中,可以求出暂态电流 i'' 和电容器端极上的暂态电压 u''_C 。该方程式的通解形式为

$$L \frac{d^2 i''}{dt^2} + r \frac{di''}{dt} + \frac{1}{C} i'' = 0 \quad (1 \cdot 22)$$

上式有着与式(1·2)相同的形式。

过渡状态期内的电流 $i = i' + i''$, 电压 $u_C = u'_C + u''_C$ 。除了稳态分量外, 主要就是求暂态分量。如前所述, 从 $\delta > \omega_0$ 、 $\delta = \omega_0$ 和 $\delta < \omega_0$ 这三种可能的情况中(其中 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$), 我们只取最后两种来讨论, 因为 $\delta > \omega_0$ 与 $\delta = \omega_0$ 时的情形在原则上没有什么分别。

(1) 当 $\delta = \omega_0$ 时, 假定 $\phi_i = 0$, 同时注意到 $r = 2\delta L$, 暂态电流和电容器上的暂态电压分别为

$$i = i' + i'' = I_m \sin \omega t + (A_3 + A_4 t) e^{-\delta t} \quad (1 \cdot 23)$$

$$u_C = u'_C + u''_C = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t - L[\delta A_3 + (1 + \delta T) A_4] e^{-\delta t} \quad (1 \cdot 24)$$

(2) 当 $\delta < \omega_0$ 时, 暂态电流应为

$$i'' = (A_5 \sin \omega' t + A_6 \cos \omega' t) e^{-\delta t}$$

我们可以把此式化成

$$i'' = I_0 \sin(\omega' t + \theta) e^{-\delta t}$$

注意到 $r = 2\delta L$, 则可求出电容器端极上的暂态电压为

$$\begin{aligned} u''_C &= -ri'' - L \frac{di''}{dt} = -rI_0 \sin(\omega' t + \theta) e^{-\delta t} \\ &= -LI_0 [\omega' \cos(\omega' t + \theta) + \delta \sin(\omega' t + \theta)] e^{-\delta t} \end{aligned}$$

假定 $\frac{\delta}{\omega'} = \tan \beta$, 且 $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, 又可得

$$\begin{aligned} u''_C &= -LI_0 \sqrt{\omega'^2 + \delta^2} \cos(\omega' t + \theta - \beta) e^{-\delta t} \\ &= -\frac{I_0}{\omega_0 C} \cos(\omega' t + \theta - \beta) e^{-\delta t} \end{aligned}$$

即在过渡状态期间,在稳定的正弦电流和电容器端电压上还得加上暂时的有阻尼振荡,其角频率为 ω' 。

从上面讨论可知,只要电路中的电阻 R 大于零,电路响应电感电流 $i = i' + i''$ 和电容电压 $u_C = u'_C + u''_C$ 中的暂态分量 i'' 和 u''_C (不论是振荡或非振荡的),都将随时间而衰减为零,电路响应将只保留稳态分量。即当 R, L, C 串联电路在正弦电压 $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ 激励下,其电路响应 i 和 u_C 长时间的定性运动是跟随激励电压的频率做同频率的周期运动。

上述两种电路还有一个共同点,那就是确定性。描述电路运动状态的方程中的所有项都是确定性的,即不含有随机项;它们的解也是确定性的,即只要给定 i 和 u_C 的初始条件和任意某一确定的时间 t ,就一定知道 i 和 u_C 确切的值。

对任意一个网络(电路)均可用如下形式的状态方程描述:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1 \cdot 25)$$

上式右方的函数不含变量 t , 这类网络(电路)为自治(autonomous)网络(电路), 图 1 - 1 电路就属于自治电路。若描述一个网络(电路)的一般形式状态方程系数随时间而变或由于外施激励为时间的函数使得自变量 t 以显含形式出现, 如

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1 \cdot 26)$$