规划论及其程序设计

张福德
陈玉莲　编 著

OR

吉 林 大 学 出 版 社

规划论及其程序设计

张福德
陈玉莲 编著

吉林大学出版社

规划论及其程序设计

张福德
陈玉莲 编 著

吉林大学出版社出版　长春市第五印刷厂印刷

吉林省新华书店发行

787×1092　32开　7.25印张和20多个程序　1[illegible]9,000字

1985年10月第1版　1985年10月第1次印刷

印数：1—21,000册

统一书号：13323·5　定价：1.90元

编著者说明

本书仅研究了线性规化与动态规划。线性规划是在一些线性等式或不等式的约束条件下，求解线性目标函数最大值或最小值的运筹方法。其应用范围极广，广泛应用于运输计划、分配计划、生产计划等各个领域。线性规划有各式各样问题，也有若干种解法或算法，本书仅介绍单纯形法和匈牙利法。

动态规划是解决多阶段决策过程最优化问题的运筹方法。运用动态规划求解多级决策问题最优解还没有成型的公式和求解方法。当实际问题中的变量个数较多时难以求解，甚至无法求解。因此，根据各类具体问题的特性，研究其数学技巧、建立制订最优决策的数学模型，进行程序设计，以便利用电子计算机进行运算，具有十分重要的实际意义。本书介绍下列动态规划模型：1．资源分配模型，2．最短路线模型，3．生产计划模型，4．设备更新模型。

各种数学模型与算法均有 BASIC 程序清单数、数值举例、试算数据和打印结果，并用非正式语言介绍了动态规划各种模型的算法，为便于读者理解与运用，还列举了实际应用题，并说明求解过程，打印出运算结果清单。所有程序均在微型机上调试通过。

本书特点在于使用较简单易懂的 BASIC 语言，利用小巧灵活、便利可靠、普及较广的微型电子计算机，处理和解

决较复杂的规划论问题。

本书可供运筹学、计算机应用、工业企业管理、技术经济、商业企业会计统计、系统工程及军事系统工程等方面的专家、研究人员、管理人员、技术人员和大专院校师生等参考。

编著者水平有限，错误难免，欢迎读者批评指正。如本书能对读者有所裨益，编著者将感到欣慰。

一九八四年春节　于长春

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　线性规划

引　言

线性规划是运筹学的一个重要分支，是应用范围很广泛但又比较简单的数学规划方法，早在 1939 年就已开始使用线性规划，因此也是出现较早的一种最优化方法。1947 年丹茨格（G. B. Dantzig）提出求解性规划问题的一般方法即单纯形法（Simplex Method）后，线性规划在理论上、算法上逐渐成熟，实际应用也日益广泛。自 1952 年开始利用电子计算机求解线性规划问题以来，随着算法的不断改进和计算机的发展，利用电子计算机可以迅速求解具有许多约束条件和变量的大规模线性规划问题，使其应用范围迅速扩大。因此，掌握和运用线性规划的计算机程序具有重要实际意义。

本章介绍单纯形法和求解分配问题的匈牙利法。在第一节单纯形法及其 BASIC 程序中，提出例题，列出线性规划的数学模型及其矩阵表示，介绍单纯形法、图解法，讨论线性规划问题的各种情况，提供单纯形法的 BASIC 程序，提出试算数据并列出打印输出结果。并例举一些应用题。在第二节匈牙利法及其 BASIC 程序中，提出分配问题，建立分配模型，介绍其算法，提供数值举例，列出匈牙利法 BASIC 程序清单、试算数据与打印输出结果，并例举

部分分配应用题。

本章由浅入深，系统性较强，其特点在于，使用较简单易懂的 BASIC 语言，利用小巧灵活、便利可靠、普及较广的微型电子计算机，处理和求解各种有关线性规划问题。为便于读者学习和使用，第一节末附有带汉字的单纯形法 BASIC 程序，第二节末附有带汉字的匈牙利法 BASIC 程序。

第一节　单纯形法及其 BASIC 程序

1．例题（例题1）

某厂计划生产 P_1、P_2 两种产品。生产产品 P_1 1 kg，需要原料 M_1 2 kg、原料 M_2 2 kg；生产产品 P_2 1 kg，需要原料 M_1 1 kg，原料 M_2 5 kg、原料 M_3 4 kg。原料使用限量如下：原料 M_1 最多为 60 kg，原料 M_2 最多为 100kg，原料 M_3 最多为 60kg。产品 P_1、P_2 每 1 kg 的收益分别为 6 元、7 元。在制订产品生产计划时，产品 P_1、P_2 各生产多少 kg，才能使收益为最大。

设产品 P_1 的产量为 $x_1$kg，产品 P_2 的产量为 $x_2$kg，最大收益为 x_0 元，则可建立如下数学模型：

各种原料的限制　产品 P_1　产品 P_2

$$\left.\begin{array}{ll}\text{原料 } M_1 \text{ 的限制} & 2x_1+x_2\leqslant 60\\ \text{原料 } M_2 \text{ 的限制} & 2x_1+5x_2\leqslant 100\\ \text{原料 } M_3 \text{ 的限制} & 4x_2\leqslant 60\end{array}\right\}\qquad(1\cdot1\cdot1)$$

产量必为非负　$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$　(1·1·2)

应使收益为最大　$x_0=6x_1+7x_2$　(1·1·3)

再新引进3个非负附加变量 x_3、x_4、x_5，可将上述连立1次不等式变换为连立1次方程式，即

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1+x_2+x_3=60 \\ 2x_1+5x_2+x_4=100 \\ 4x_2+x_5=60 \end{array}\right\} \quad (1\cdot1\cdot4)$$

$$x_1\geqslant0,\ x_2\geqslant0,\ x_3\geqslant0,\ x_4\geqslant0,\ x_5\geqslant0 \quad (1\cdot1\cdot5)$$

$$x_0=6x_1+7x_2=Z\max \quad (1\cdot1\cdot6)$$

如将（1·1·6）式改写为如下形式：

$$x_0-6x_1-7x_2=0 \quad (1\cdot1\cdot6')$$

则(1·1·6′)式与（1·1·4）式一起，可看成是变量为 x_0,x_1,x_2,x_3,x_4，x_5 的连立1次方程式，将其系数归纳为表，则如表1-1所示。表1-1称为单纯形表（*simplex tableau*）。利用单纯形表求解线性规划问题是比较便利的。

表1－1　单纯形表（*simplex tableau*）

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	常数
1	－6	－7	0	0	0	0
0	2	1	1	0	0	60
0	2	5	0	1	0	100
0	0	4	0	0	1	60

将（1·1·1）式称为约束条件（*constraint*），将(1·1·2)式称为非负条件，将（1·1·3）式称为目标函数（*objective* *function*）。将满足约束条件的变量 x_i 的一组值称为解（*solution*），在解中，将满足非负条件的解称为可行解（*feasible solution*），将使目标函数值为最大（或最小）的可行解称为最优解（*optimal solution*）。

2．线性规划的数学模型

线性规划的数学模型如下：

约束条件：

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqslant(=,\geqslant) b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqslant(=,\geqslant) b_2 \\
\quad\cdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqslant(=,\geqslant) b_m
\end{array}\right\} \quad (1\cdot1\cdot7)$$

非负条件：

$$x_1\geqslant 0，x_2\geqslant 0，\cdots，x_n\geqslant 0 \qquad (1\cdot1\cdot8)$$

目标函数：

$$x_0=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=Z\max$$

$$\text{或}(\min) \qquad (1\cdot1\cdot9)$$

求解线性规划数学模型就是在满足约束条件（1·1·7）和非负条件（1·1·8）之下，使得目标函数（1·1·9）为最大（或最小），确定变量 x_1，x_2，…，x_n 的值。

由此数学模型可知，线性规划问题的约束条件有“≥”、“＝”和“≤”三种形式，即可以是等式，也可以是不等式；可使目标函数为最大或最小。如以“≤”形式为例，则通过引进m个非负变量 x_{n+1}，x_{n+2}，…，x_{n+m}，使目标函数值为最大（max），则可将（1·1·7）式改为连立1次方程式，即得如下形式：

约束条件：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\left.\begin{array}{llllllll}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & = b_m\end{array}\right\} \quad (1\cdot1\cdot10)$$

非负条件：

$x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$，…，$x_n \geqslant 0$，$x_{n+1} \geqslant 0$，$x_{n+2} \geqslant 0$，

…，$x_{n+m} \geqslant 0$ (1·1·11)

目标函数：

$x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = Z\max$ (1·1·12)

将此形式称为线性规划的标准型，将非负变量 x_{n+1}，x_{n+2}，…，x_{n+m} 称为松弛变量（*slack variable*），也称为附加变量。将 x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1}，x_{n+2}，…，x_{n+m} 统称为结构变量。

线性规划数学模型的简缩形式如下：

约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \qquad (1\cdot1\cdot13)$$

非负条件：

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \qquad (1\cdot1\cdot14)$$

目标函数：

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j = Z\max \text{（或 } Z\min\text{）} \qquad (1\cdot1\cdot15)$$

3. 线性规划的矩阵表示

线性规划数学模型可用矩阵形式表示。

将以(1·1·7)式左边的系数 a_{ij} $(i = 1, \cdots, m;\ j = 1,$

…，n）为元素的矩阵称为系数矩阵，用 **A** 表示如下：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

将以（1·1·7）式右边的常数 b_i（i = 1，…，m）为元素的列向量称为限定列向量，用 **B** 表示：

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

将以（1·1·9）式系数 c_j（j = 1，…，n）为元素的行向量称为价值向量，用 **C** 表示：

$$\mathbf{C}=[c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n]$$

将以变量 x_1，x_2，…，x_n 为元素的列向量称为变量向量，用 **X** 表示：

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则线性规划数学模型可写成如下简单形式：

约束条件：$\mathbf{AX}\leqslant\mathbf{B}$ （1·1·16）

非负条件：$\mathbf{X}\geqslant 0$ （1·1·17）

目标函数：$x_0=\mathbf{CX}=Z\max$ （1·1·18）

如以矩阵形式表示（例题1）的线性规划问题，其形式如下：

约束条件：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$$

非负条件：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

目标函数：

$$x_0 = [6, \ 7] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Z\max$$

如设以变量 x_1，…，x_n 和松弛变量 x_{n+1}，…，x_{n+m} 为元素的变量向量为 **X**，则

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$$

由（1·1·10）式左边系数为元素构成的系数矩阵 **A** 为：

$$
A=\begin{pmatrix}
a_{11}\cdots a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21}\cdots a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}\cdots a_{mn} & 0 & \vdots & \cdots & 1
\end{pmatrix}
$$

以（1·1·10）式右边的常数为元素构成的限定向量B为：

$$
B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

价值系数向量 C 与松弛变量相对应部分的系数为 0，即：

$C=[c_1, c_2, \cdots, c_n, 0, 0, \cdots, 0]$

因此，式(1·1·10)～(1·1·12)可用矩阵形式表示如下：

约束条件：$AX=B$ (1·1·19)

非负条件：$X\geqslant 0$ (1·1·20)

目标函数：$x_0=CX=Z\max$ (1·1·21)

关于(例题 1)，对于引进松弛变量的(1·1·5)～(1·1·7)式，系数矩阵 A、限定向量 B、价值系数矩阵 C 与变量向量矩阵 X 分别如下：

$$
A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}
$$

$$\mathbf{C} = [6,\ 7,\ 0,\ 0,\ 0] \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

由此可见，如设 **X** 为变量向量，则线性规划模型的解又可以描述为：满足约束条件的变量向量 **X** 称为解。

关于例题（1）的约束条件、非负条件和目标函数分别如下：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix} \quad (1\cdot1\cdot22)$$

非负条件：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1\cdot1\cdot23)$$

目标函数：

$$x_0 = [6,7,0,0,0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = Z\max \quad (1\cdot1\cdot24)$$

假设有下列三组解：

$$x_{01}=\begin{pmatrix}0\\15\\45\\25\\0\end{pmatrix},\quad x_{02}=\begin{pmatrix}0\\20\\40\\0\\-20\end{pmatrix},\quad x_{03}=\begin{pmatrix}25\\10\\0\\0\\20\end{pmatrix}$$

则x_{01}是可行解，x_{02}为非可行解(*infeasible solution*)，x_{03}是最优解。

4．单纯形法

以例题 1 为例介绍单纯形法，为便于说明，将其各式重新编号如下：

约束条件：

$$\begin{cases}2x_1+\ \ x_2\leqslant 60 & ①\\ 2x_1+5x_2\leqslant 100 & ②\\ \qquad\ \ 4x_2\leqslant 60 & ③\end{cases}$$

非负条件：

$$x_1\geqslant 0,\qquad x_2\geqslant 0 \qquad ④$$

目标函数：

$$x_0=6x_1+7x_2=Z\max \qquad ⑤$$

此问题如图 1 - 1 所示。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com