

公共课系列

2001年研究生入学考试应试指导丛书

6

2001
2001

策划：北京大学研究生院

Entrance Exams for MD

研究生入学考试

微积分

范培华 刘书田 编著

北京大学出版社

2001 年研究生入学考试应试指导丛书

微 积 分

范培华 刘书田 编著

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/范培华,刘书田编著. —北京:北京大学出版社,2000.4
(2001年研究生入学考试应试指导丛书)

ISBN 7-301-04482-8

I. 微… I. ①范… ②刘… III. 微积分-研究生-入学考试-
自学参考资料 IV. 0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第03823号

书 名: 微积分

著作责任者: 范培华 刘书田 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-04482-8/G·566

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62754140 理科编辑部 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

排 版 者: 北京高新特公司激光照排中心

印 刷 者: 北京飞达印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

850×1168 32开本 13.125印张 330千字

2000年4月第1版 2000年4月第1次印刷

定 价: 19.00元

内 容 简 介

本书是经济类硕士研究生入学考试科目“微积分”复习指导书. 本书作者多年来参加有关经济类考研数学试卷的命题、阅卷和考研辅导班的教学, 亲临考研第一线, 具有丰富的教学与应试经验. 作者把他们的教学经验以及潜心研究试卷命题的体会加以细化、归纳和总结, 整理成书奉献给广大读者, 旨在提高考研者的考试成绩与命中率.

本书紧扣数学三、四的考试大纲, 贴切考试实践, 内容丰富. 全书共分九章. 内容包括: 函数、极限、连续, 一元函数微分学, 不定积分, 定积分, 多元函数微分学, 多元函数积分学, 无穷级数, 常微分方程和差分方程等. 本书结构新颖, 每一章按照: 考试要求, 复习要点(重要定义、定理及公式), 典型例题分析, 练习题四部分编写. 本书概念叙述简洁, 解题思路清晰, 对典型例题从多侧面、不同角度、用多种解法进行讲解, 注重对考生基本概念的理解、多种类型基础题目的训练和综合解题能力的培养, 是考研者较好的复习指导书和良师益友.

本书可作为经济类硕士研究生入学考试数学考试科目“微积分”的复习指导书, 也可作为理工科考研者的复习参考书. 对于在校的经济类及管理类大学生、大专生及自学考试者, 本书也是一本较好的学习用书.

前 言

为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生能在较短的时间内全面、系统地复习有关的数学内容,我们根据教育部最近制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关要求,结合我们多年参加经济类数学考研及有关考试的命题、阅卷及辅导的经验,编写了这套经济类数学《2001年研究生入学考试应试指导丛书》,其中包括复习指导书:《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》以及《2001年研究生入学考试数学模拟试卷(经济学类)》共4册,供广大考生选用。

本套应试指导丛书的每一章由以下四部分构成:

一、考试要求——编写这部分的目的是使广大考生明确每一章考的内容是什么,掌握到什么程度就可以了。在编写过程中,根据我们多年以来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结,使广大考生能够正确把握考试要求,这是区别于其他考研辅导书的一大特点。

二、重要定义、定理及公式——这部分根据考试大纲的要求,将概念、定理和公式、方法进行了简明扼要地叙述、归纳和总结;精选了各种典型的例题并作详细的解答,使得考生能够在较短的时间内对重点、难点、热点问题进行了复习,全面、系统地掌握所需要的知识,在考试时能够拿得出、用得上。

三、典型例题分析——这部分根据考试大纲要求的题型进行了分类、归纳,总结了各种题型解题的方法及技巧,开阔了考生的解题思路,使所学的知识能够融会贯通,并迅速提高考生的综合解题能力。

四、练习题——每章的最后部分精选了适量的练习题,全部

习题都附有答案或提示,这些题目作为考生巩固所学知识、复习有关内容时使用,这有利于提高考生分析问题和解决问题的能力。

《2001年研究生入学考试数学模拟试卷(经济学类)》一书由两部分组成:一部分是为了检查前一阶段考生复习效果、更好地提高考生的应试能力而设计编制的全真模拟试题共十二份,其中数学三、四各6份;另一部分是1999年和2000年数学三、四考研试题及解答。

我们是在深入研究了历年考研试卷的结构、知识点及难度的分布,并紧密结合我们命题实践、阅卷过程中常见问题及在全国各大城市“考研辅导班”辅导的经验来编好每一道题。因此,每一份试卷都从不同角度选择了具有多种风格的题目,基本上涵盖了全部命题思路,能够达到实际考试效果。这样有利于广大考生检验自己复习的效果,更加全面系统地掌握所需知识,迅速提高综合解题能力。为了方便考生了解近两年有关数学考试的题目类型、知识点及难度的分布情况,我们给出了1999年和2000年数学三、四考研试题及解答,仅供参考。

本书不仅是经济类硕士研究生入学考试数学考试科目应试者的一本复习用书,同时对于参加理工类考研及在校的经济类和管理类本科生、大专生、参加自学考试考生也是一本较好的学习用书和参考书。

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编 者

2000年4月20日

目 录

第一章 函数、极限与连续	(1)
一、考试要求	(1)
二、复习要点	(1)
(一) 重要定义、定理及公式	(1)
(二) 求函数的定义域	(8)
(三) 确定无穷小阶的方法	(8)
(四) 求极限的方法	(9)
(五) 函数连续性的判别	(12)
(六) 曲线渐近线的求法	(12)
三、典型例题分析	(13)
(一) 填空题	(13)
(二) 选择题	(15)
(三) 计算题	(17)
(四) 证明题	(34)
四、练习题	(36)
习题答案与提示	(38)
第二章 一元函数微分学	(39)
一、考试要求	(39)
二、复习要点	(39)
(一) 重要定义、定理及公式	(39)
(二) 导数运算	(44)
(三) 微分运算	(47)
(四) 用洛必达法则求未定式的极限	(48)
(五) 判别函数的增减性	(49)

(六) 函数的极值	(49)
(七) 曲线的凹向与拐点	(51)
(八) 函数(曲线)性态的一般检查法	(52)
(九) 用中值定理证明等式的思路和程序	(52)
(十) 证明不等式	(53)
(十一) 用导数讨论方程的根	(54)
三、典型例题分析	(55)
(一) 填空题	(55)
(二) 选择题	(57)
(三) 计算题	(60)
(四) 证明题	(83)
(五) 应用题	(95)
四、练习题	(105)
习题答案与提示	(106)
第三章 不定积分	(108)
一、考试要求	(108)
二、复习要点	(108)
(一) 重要定义及定理	(108)
(二) 求不定积分的基本方法和重要公式	(110)
(三) 求不定积分需要注意的问题	(114)
三、典型例题分析	(114)
(一) 填空题	(114)
(二) 选择题	(116)
(三) 计算题	(118)
四、练习题	(142)
习题答案与提示	(143)
第四章 定积分	(147)
一、考试要求	(147)
二、复习要点	(147)

(一) 重要定义、定理及公式	(147)
(二) 计算定积分的方法和重要公式	(151)
(三) 计算广义积分	(153)
(四) 关于变限的定积分	(153)
(五) 定积分证明题的基本思路	(154)
(六) 定积分的应用	(156)
三、典型例题分析	(159)
(一) 填空题	(159)
(二) 选择题	(162)
(三) 计算题	(166)
(四) 证明题	(190)
(五) 应用题	(210)
四、练习题	(218)
习题答案与提示	(222)
第五章 多元函数微分学	(227)
一、考试要求	(227)
二、复习要点	(227)
(一) 重要定义、定理及公式	(227)
(二) 求偏导数的思路	(232)
(三) 求函数极值的思路	(234)
三、典型例题分析	(237)
(一) 填空题	(237)
(二) 选择题	(241)
(三) 解答题	(244)
(四) 证明题	(259)
(五) 应用题	(265)
四、练习题	(273)
习题答案与提示	(276)

第六章 多元函数积分学	(279)
一、考试要求	(279)
二、复习要点	(279)
(一) 重要定义、定理及公式.....	(279)
(二) 计算二重积分的思路	(282)
三、典型例题分析	(285)
(一) 填空题	(285)
(二) 选择题	(287)
(三) 解答题	(290)
(四) 证明题	(302)
(五) 应用题	(305)
四、练习题	(307)
习题答案与提示	(308)
第七章 无穷级数	(309)
一、考试要求	(309)
二、复习要点	(309)
(一) 重要定义、定理及公式.....	(309)
(二) 判别数项级数的敛散性	(314)
(三) 求幂级数收敛半径与收敛域的方法	(317)
(四) 求级数的和函数	(318)
三、典型例题分析	(319)
(一) 填空题	(319)
(二) 选择题	(322)
(三) 解答题	(327)
(四) 证明题	(343)
四、练习题	(348)
习题答案与提示	(351)
第八章 常微分方程	(354)
一、考试要求	(354)

二、复习要点	(354)
(一)重要定义、定理及公式	(354)
(二)微分方程的解题思路	(356)
三、典型例题分析	(359)
(一)填空题	(359)
(二)选择题	(360)
(三)解答题	(361)
(四)证明题	(380)
(五)应用题	(382)
四、练习题	(389)
习题答案与提示	(392)
第九章 差分方程	(395)
一、考试要求	(395)
二、复习要点	(395)
(一)重要定义、定理及公式	(395)
(二)差分方程的解题思路	(397)
三、典型例题分析	(398)
(一)填空题	(398)
(二)选择题	(398)
(三)解答题	(399)
(四)证明题	(402)
四、练习题	(404)
习题答案与提示	(404)

第一章 函数、极限与连续

一、考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法;
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;
3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念;
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念;
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式;
6. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念;
7. 了解无穷小的概念和基本性质,掌握无穷小的阶的比较方法.了解无穷大的概念及其与无穷小的关系;
8. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限四则运算法则,会应用两个重要极限;
9. 理解函数连续性的概念(包括左连续与右连续);
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值与最小值定理和介值定理)及其简单应用.

二、复习要点

(一) 重要定义、定理及公式

1. 函数的概念和几种特性

(1) 函数定义

定义 1.1 设 D 是一个给定的数集,如果对于每一个数 $x \in D$,变量 y 按一定法则总有一个确定的数值与之相对应,则称变量 y 是变量 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$, x 称作**自变量**, y 称作**因变量**,

数集 D 称作函数 $y=f(x)$ 的**定义域**.

当 x 取值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的**函数值**, 当 x 取遍 D 的每一个数值, 对应的函数值的全体 $Y = \{y | y=f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

(2) 反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 Y , 如果对于每个 $y \in Y$, 存在唯一的 $x \in D$, 使 $f(x)=y$, 当把 y 看作自变量, x 看作因变量时, 则 x 是一个定义在 $y \in Y$ 上的函数, 记为

$$x=f^{-1}(y) \quad (y \in Y),$$

称为 $y=f(x)$ ($x \in D$) 的**反函数**.

习惯上把 x, y 互换, 写成

$$y=f^{-1}(x) \quad (x \in Y).$$

(3) 复合函数

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f , 值域是 Y . 函数 $u=g(x)$ 的定义域是 D_g , 值域是 G . 如果 $G \cap D_f \neq \emptyset$, 则称函数

$$g=f[g(x)], \quad x \in D = \{x | y(x) \in D_f\}$$

是 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**, u 称为**中间变量**.

(4) 初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数等六种函数称为**基本初等函数**.

基本初等函数经过有限次四则运算和复合而得到的函数称为**初等函数**

初等函数是微积分的重要研究对象, 此外还有隐函数、分段函数等.

(5) 函数的几种特性

1° 单调性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上, 对 I 中任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加** (**单调减少**). 它们统称为**单调函数**.

2° 有界性

定义 1.5 若存在 $M > 0$, 使得对任意 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 是 I 上的**有界函数**, 否则称函数 $f(x)$ 在 I 上**无界**.

3° 奇偶性

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对任意 $x \in D$, 有

$$f(-x) = f(x) \quad \text{或} \quad f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**或**奇函数**.

4° 周期性

定义 1.7 设函数 $f(x)$ 定义在 I 上, 若存在常数 $T \neq 0$, 满足对任意 $x \in I$, 有 $x \pm T \in I$, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**周期函数**, 满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

2. 极限的概念与性质

(1) 极限的定义

定义 1.8

1° $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists$ 自然数 N , 当 $n > N$ 时就有 $|x_n - A| < \epsilon$. 若 x_n 存在极限(有限数), 称 $\{x_n\}$ **收敛**, 否则称 $\{x_n\}$ **发散**.
↗ 视作无穷为“任意”

2° $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.
↘ 视作无穷为“任意”

(类似可定义 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.)

3° $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

(类似可定义: $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A, f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.)

(2) 极限的基本性质

数列极限的基本性质

\rightarrow 一些不规则的点, 但如果极限存在总可以找到 N , 使得 $n > N$ 时所有点落在某条曲线内

定理 1.1 (极限的不等式性质) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$.

若 $a > b$, 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $x_n > y_n$;

若 $n > N$ 时, $x_n \geq y_n$, 则 $a \geq b$.

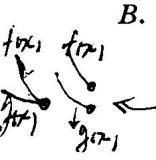
定理 1.2 (极限的唯一性) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$, 则 $a = b$.

收敛数列的有界性

若 x_n 收敛, 则 x_n 有界 (即 \exists 常数 $M > 0, |x_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$).

函数极限的基本性质

定理 1.3 (极限的不等式性质) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$.



若 $A > B$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > g(x)$;

若 $f(x) \geq g(x) (0 < |x - x_0| < \delta)$, 则 $A \geq B$.

定理 1.4 (极限的保号性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 若 $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$. 若 $f(x) \geq 0 (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow A \geq 0$.

定理 1.5 (极限的唯一性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, 则 $A = B$.

定理 1.6 (存在极限的函数局部有界性)

设函数 $f(x)$ 存在极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域 $U_0(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界, 即 $\exists \delta > 0, M > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x)| \leq M$.

(3) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

读者特别要牢记: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 且 $\lim_{n \rightarrow 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}} = e$

(4) 数列敛散性的判别定理

定理 1.7(夹逼定理) 若 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $y_n \leq x_n \leq z_n$. 又若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A, \quad \text{则} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$

定理 1.8(单调有界数列必有极限准则) 若数列 x_n 单调上升有上界, 即 $x_{n+1} \geq x_n (n=1, 2, \dots)$, 并存在一个常数 M , 使得对一切 n 有 $x_n \leq M$, 则 x_n 收敛, 即存在一个数 a , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \text{且有} \quad x_n \leq a \quad (n=1, 2, \dots).$$

若数列 x_n 单调下降有下界, 即 $x_{n+1} \leq x_n (n=1, 2, \dots)$ 并存在常数 m , 使得对一切 n 有 $x_n \geq m$, 则 x_n 收敛, 即存在一个常数 b , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b, \quad \text{且有} \quad x_n \geq b \quad (n=1, 2, \dots).$$

(5) 极限的四则运算

定理 1.9 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

3. 无穷小及其阶

(1) 无穷小、无穷大定义

定义 1.9 在某一极限过程中以零为极限的变量称为**无穷小量**.

定义 1.10 x_n 为**无穷大量** ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$) $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists$ 自然数 N , 当 $n > N$ 时, $|x_n| > M$.

$x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 为**无穷大量** ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $|f(x)| > M$.

$x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 为**无穷大量** ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$) $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| > M$.

(2) 无穷小与极限、无穷小与无穷大的关系

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$. 在同一极限过程中,

$$\begin{cases} f(x) \text{ 为无穷小, } f(x) \neq 0, \text{ 则 } \frac{1}{f(x)} \text{ 为无穷大,} \\ f(x) \text{ 为无穷大, 则 } \frac{1}{f(x)} \text{ 为无穷小.} \end{cases}$$

(3) 无穷小的阶

特殊情况:
 $\beta = 0$ (以) 则 $\frac{0}{\alpha} = 0$

定义 1.11 设在同一极限过程中 $\lim \alpha(x) = \lim \beta(x) = 0$. 若

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l, \quad \text{阶}$$

当 $l \neq 0$ 时, 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 为同阶无穷小;
 当 $l = 1$ 时, 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 为等价无穷小, 记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;
 当 $l = 0$ 时, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小.

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低价的无穷小.

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在 (也不为 ∞), 称 $\alpha(x), \beta(x)$ 不可比较.

常用的等价无穷小量

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \arctan x \sim x, \\ \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a, \\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2, \quad (1+x)^a - 1 \sim ax. \quad \sqrt{4x} - 1 \sim \frac{1}{2} x \end{aligned}$$

(4) 无穷小的运算性质

- 1° 有限个无穷小的代数和仍为无穷小.
- 2° 无穷小量乘有界变量仍为无穷小量.

4. 函数连续性的概念

(1) 连续函数的定义

定义 1.12 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,

- 1° 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续.
- 2° 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 右连续;