面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

高等数学

上册

侯云畅 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材

Textbook Series for 21st Century

高等数学

上 册

侯云畅　主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112 号

内容简介

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材和普通高等教育"九五"国家级重点教材，符合原国家教委颁布的工科本科《高等数学课程教学基本要求》．本书对传统高等数学教材的体系作了较大调整，使概念之间的内在联系更清晰；注意运用现代数学的语言和符号，增设展示现代数学内容的"窗口"；在介绍实数系的基础上，加强了极限论；运用向量和矩阵工具表述有关内容；加强数学建模训练，注重实际应用和创新能力的培养；习题分A、B两类，A类为使读者搞清概念、熟练掌握课文内容的习题；B类则为拓宽课文内容，并有一定难度且富有新意的习题，并附有提示和答案．

本书上册包括函数与极限、一元函数微积分学和向量代数与空间解析几何；下册包括多元函数微积分学、无穷级数和常微分方程，本书可作为普通高等院校工科本科教材，也可供理科各专业选用及社会读者阅读．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　上册/侯云畅主编．－北京：高等教育出版社，1999

面向21世纪课程教材

ISBN 7－04－007896－1

Ⅰ．高…　Ⅱ．侯…　Ⅲ．高等数学－高等教育－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第43967号

高等数学　上册

侯云畅　主编

出版发行　高等教育出版社

社　　址　北京市东城区沙滩后街55号　　邮政编码　100009

电　　话　010－64054588　　传　　真　010－64014048

网　　址　http://www.hep.edu.cn

经　　销　新华书店北京发行所

印　　刷　北京外文印刷厂

纸张供应　山东高唐纸业集团总公司

开　　本　787×960　1/16　　版　　次　1999年10月第1版

印　　张　20.5　　印　　次　1999年10月第1次印刷

字　　数　360 000　　定　　价　21.60元

面向21世纪课程教材

普通高等教育“九五”
国家级重点教材

序

当今，世界科技迅猛发展，数学已渗透到各个领域，数学的重要地位越来越为人们所重视，但是经典的《高等数学》教材与现代科学技术中数学的广泛应用，其间的差距越发加大，因此，《高等数学》教材的改革势在必行.

为了培养新时期需要的军事合格人才，深化军队院校的教学改革，总参军训部组织空军工程学院、信息工程学院、电子工程学院、国防科技大学、海军航空工程学院五所院校中热心教学改革、熟悉教学规律、教学经验丰富、勇于创新的教师，在研究了国内外教学改革的新形势，对高等数学课程的内容进行了全面的分析与研究的基础上，决心除旧布新，锐意改革，以空军工程学院所编已试用过两届的《高等数学》教材为基础，同心协力，共同编成此书.

阅后，感到该书有以下几个主要特点：

(1) 内容. 为了加强读者的数学能力和数学素养，编者在除旧布新思想的指导下，删除或削弱了一些陈旧的和与中学重复的内容，从简处理了一些公式的推导，减少了某些定理的证明，放低了对解题特殊技巧训练的要求，从而较多地压缩了这些内容所占的篇幅，为更新内容创造了必要的条件. 全书不仅能满足原国家教委颁布的工科本科《高等数学课程教学基本要求》，而且较大程度地高于《基本要求》.

在内容更新的同时，还注意渗透现代数学的概念、语言与方法，为现代数学提供了展示其内容的"窗口"，也铺展了向现代数学延伸和发展的"接口". 宽编窄用，在增加的内容中，有的打有 * 号，供不同的专业选用. 为了培养读者的应用能力，该教材特别重视理论联系实际. 一些重要的基本概念都能从实际问题中概括抽象提出，例题中应用题较多，涉及的面也较广，除传统的几何、物理等方面的应用外，尚有在目前十分活跃的经济学、生命科学方面的应用以及军事科学方面的应用，这些应用渗透在全书的各个部分，且有的问题饶有兴趣，可提高读者学习数学的积极性，通过这些应用，对数学建模能力的培养将大有裨益，自不待言.

(2) 体系. 全书在吸取传统教材优点的基础上，对体系进行了改革，虽然从章的名称与编排的前后次序来看，与现有的高等数学教材相比并无太大的变化，但从各章内容的布局看，结合内容与讲法的更新，体系上仍有很大的变化. 例如第一章，由于引入了集合、映射等现代数学语言、逻辑符号和实数系等，从而带动了体系的变化. 对数列极限作了比较详细的阐述，加强了极限论

的内容，叙述语言的更新，使之与现代数学科学文献的语言适当接近. 又如一元函数积分学，先讲定积分，再讲不定积分与积分法，最后讲积分应用，且合为一章，安排得比较紧凑，与现行的教材不同. 多元函数微分学部分，从引入 n 维欧氏空间开始，一切概念都推广到高维空间中，多元函数积分学分为数值函数积分和向量值函数积分两章讲授，从而使第一型线、面积分与第二型线、面积分的实质更加突出，是一种新的尝试，全书的体系与传统教材相比有一定的新意.

（3）习题. 书中所配习题分为 A、B 两类. A 类为使读者搞清概念、熟练掌握课文内容的习题；B 类则为拓宽课文内容，并有一定难度且富有新意的习题，其中包括一些定理与性质的证明、应用题、研究生入学试题以及数学建模方面的习题. 这些习题，读者通过思考或在教师指导下可以完成其中的一部分. 这既对培养读者自学能力、独立思考能力、建模能力与解题能力有一定的好处，而且可以获得不少实际知识.

综观该教材，对面向 21 世纪所需的教学内容有一定的反映，课程体系的结构有所创新，为培养新世纪人才的数学素养有一定的突破，迈出了教材改革可喜的一步，形成了一家之言.

高等数学是一门经典基础理论课，它的改革难度较大，不是能一蹴而就的. 在这门课程的改革面前，受习惯势力的影响，能知难而进者，屈指可数，侯云畅、盛立刚、杨士杰、符绩梲、翟景春等同志，不畏困难，以其丰富的教学经验，对国内外教材进行了悉心研究，分析了培养跨世纪人才需要的数学知识，编成了这本改革教材. 他们敢于创新、勇于攻坚的精神是难能可贵的，也是值得称颂的.

目前迈出较大步伐的高等数学改革教材并不多见，此书的出版，表明军事院校的教学改革与教材建设已走在全国的前列. 可以预期，该书不仅能提高全军的教学质量，而且对掀起教材改革的浪潮可增添一分力量，对全国《高等数学》的教材建设也将起积极的促进作用.

草此数行，言不尽意，权以为序.

陆庆乐

1996 年 5 月于西安交通大学

前　言

本书是面向21世纪课程教材，也是普通高等教育“九五”国家级重点教材，是在原军队院校工科本科《高等数学》通用教材试用多年的基础上修订而成的．本书旨在为适应科学技术的高速发展和数学地位的巨大变化，提高读者的数学素养和创新能力，为科教兴国，为我军打赢高技术条件下局部战争培养新世纪合格人才．

本书内容符合原国家教委颁布的工科本科《高等数学课程教学基本要求》．与传统教材相比，编写时着力于数学思想方法的阐述；注意运用现代数学的语言和符号，增设展示现代数学内容的“窗口”和延伸发展的“接口”；体系结构作了较大的调整，使概念之间的内在联系更加紧密；教材介绍了实数的完备性，对极限论有所加强；运用向量和矩阵工具讲解多元函数微积分学；注重联系实际，加强数学建模能力的训练，引进了经济、管理、人口、军事等方面的建模实例；习题分A、B两类梯次编排，题型有新意，配有拓宽正文内容的习题及具有启发性的研究生入学试题；教材编入了较深入的“*”号内容，可供不同专业选用；全书科学名词术语采用全国自然科学名词审定委员会1993年公布的《数学名词》．除“*”号内容外，全书可用180学时(含习题课)讲完；各章参考学时为一、22，二、14，三、14，四、22，五、14，六、22，七、18，八、16，九、16，十、22．

原军队院校工科本科《高等数学》通用教材主编为侯云畅，副主编为盛立刚．参加编写的有电子工程学院盛立刚，信息工程学院杨士杰、韩中庚，海军航空工程学院翟景春、张作钦，空军工程学院侯云畅、王乃鹏，国防科技大学符绩枕、罗建书．全书由侯云畅、盛立刚统编定稿．由全国高等学校工科数学课程教学指导委员会前主任、西安交通大学陆庆乐教授主审．

这次参加“九五”国家级重点教材《高等数学》修订工作的有侯云畅、王乃鹏、盛立刚、杨士杰、韩中庚、符绩枕、翟景春．由侯云畅修订定稿．根据国家对重点教材出版要求，教材修订后，又由全国高等学校工科数学课程教学指导委员会主任、西安交通大学马知恩教授和课委会委员、西安交通大学王绵森教授主审，参审的有张肇炽、王道钰、邹国源、陈占平和刘卫江等教授，他们给本书提出了许多宝贵的意见，对提高本书的质量起了重要作用；在编写过程中得到总参军训部、参编院校领导特别是空军工程学院各级领导和刘桂茂副院长的关心和支持，在此谨向他们致以衷心的感谢．

工科数学课程教学内容改革是个新的课题，由于编者水平有限，本书定有

许多不足甚至错误之处，渴望军内外专家、同仁批评指正.

编　者

1999年1月于西安

目　　录

第一章　函数　极限　连续函数

高等数学的主体是微积分学，它是一门研究变量的数学. 它的内容和方法在自然科学、工程技术，乃至社会科学的许多领域中都有着广泛的应用. 函数是变量之间相互关系的数学描述，是微积分学研究的主要对象；极限理论是微积分学的理论基础；连续函数是微积分学所讨论的主要函数类型. 本章主要介绍函数、极限和连续函数这些微积分学的基础内容.

第一节　集合　实数系

1-1　集合及其运算

一、集合的概念

集合是一个只能描述而难以精确定义的概念，我们只给出集合的一种描述：集合是指所考察的具有确定性质的对象的总体. 集合简称集. 组成集合的每一个对象称为该集合的元素，简称元.

例如，我军战士的全体构成一个集合；空军女干部的全体构成一个集合；某校一年级男大学生的全体构成一个集合. 又如，不超过自然数 N 的非负整数构成一个集合；平面上的所有直角三角形构成一个集合.

通常用大写字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 记集合，用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 记集合的元素. 若 x 是集合 A 的元素，则说 x 属于 A，记为 $x \in A$；若 x 不是集合 A 的元素，则说 x 不属于 A，记为 $x \overline{\in} A$ 或 $x \notin A$.

由有限个元素组成的集合称为有限集，由无限个元素组成的集合称为无限集. 一个无限集，如果其元素可用自然数编号，就称之为可数无限集，简称可数集或可列集. 如前面例中，平面上的所有直角三角形构成的集合是无限集，其余各例皆为有限集.

不含有任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. 空集在研究集合运算和集合之间的关系时，有其逻辑上的意义. 如，由方程 $x^2+1=0$ 的实根构成的集合，即为空集.

集合一般有两种表示方法.

一是列举法. 把它的所有元素一一列举在一个花括号内. 例如，集合 A 由

元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成，表示为$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；自然数集$\mathbf{N}$表示为$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 这种表示法一般适用于有限集和可数无限集.

二是描述法. 指明集合中元素所具有的确定性质. 一般形式为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }p\}.$$

例如，方程 $x^3+x-1=0$ 的解集，记为

$$S=\{x\mid x^3+x-1=0\}.$$

又如，平面上以原点为中心的单位圆内的点的全体组成的集合，记为

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}.$$

元素为数的集合称为数集. 通常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集和 $\mathbf{C}$ 表示复数集. 用下标加“+”表示集内排除 0 的集. 如 $\mathbf{N}_+$ 表示正整数集.

只有一个元素的集合，称为单元素集，记为$\{x\}$.

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读成 A 含于 B 或 B 包含 A. 显然有 $A\subseteq A$. 若 A 是 B 的子集，而 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subsetneqq B$，例如$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

空集$\varnothing$是任何集合的子集.

若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

二、区间、点的邻域

区间和一点的邻域是常用的一类实数集.

实数集$\{x\mid a<x<b\}=(a,b)$，称为开区间；$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]$，称为闭区间；$\{x\mid a\leqslant x<b\}=[a,b)$，$\{x\mid a<x\leqslant b\}=(a,b]$，称为半开半闭区间. a,b 称为区间的端点. 这些区间统称为有限区间. $\{x\mid a\leqslant x\}=[a,+\infty)$，$\{x\mid x\leqslant b\}=(-\infty,b]$，$\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=(-\infty,+\infty)$，都为无限区间.

实数集$\{x\mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$，称为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U_\delta(x_0)$. 它在数轴上表示以 x_0 为中心，长度为 2δ 的对称开区间，如图 1-1 所示.

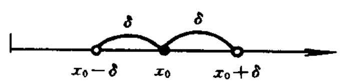

图 1-1

实数集$\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$，称为 x_0 的 δ 去心邻域，记为 $U_\delta^\circ(x_0)$.

实数集 $U_\delta^+(x_0)=\{x\mid 0\leqslant x-x_0<\delta\}$和$U_\delta^-(x_0)=\{x\mid 0\leqslant x_0-x<\delta\}$，分别称为 x_0 的右邻域和左邻域. $U_\delta^{\circ+}(x_0)=\{x\mid 0<x-x_0<\delta\}$和 $U_\delta^{\circ-}(x_0)=\{x\mid 0<$

$x_0-x<\delta\}$，分别称为 x_0 的去心右邻域和去心左邻域.

$U_M(\infty)=\{x\mid |x|>M\}$，$U_M(+\infty)=\{x\mid x>M\}$ 和 $U_M(-\infty)=\{x\mid x<-M\}(M>0)$，分别称为无穷邻域，无穷右邻域和无穷左邻域.

三、集合的运算

集合有三种基本运算，即并、交、差.

设 A,B 都是集 S 的真子集，则集合

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$
$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 但 }x\overline{\in}B\}$$

分别称为 A 和 B 的并集、交集、差集.

当 $A\subseteq S$ 时，$S\backslash A$ 称为 A 在 S 中的余集或补集，记为 $\complement A$，即

$$\complement A=\{x\mid x\in S,x\overline{\in}A,A\subseteq S\}.$$

集合 S 称为母集(或全集、基本集). 我们总是在母集中讨论问题.

集合的运算，可用文氏图(图 1-2)形象表示.

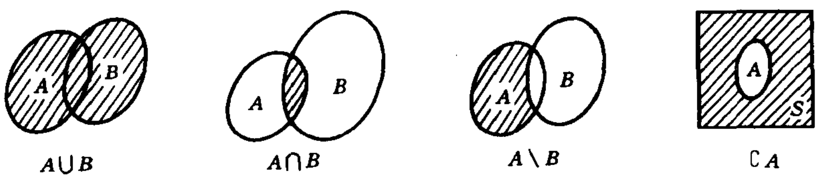

图 1-2

集合的这些运算具有以下性质：

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 幂等律 $A\cup A=A,A\cap A=A$.

(5) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A,A\cap(A\cup B)=A$.

(6) De · Morgan 定律(或称对偶原理) $\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$, $\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$. $(A\subseteq S,B\subseteq S.)$

性质(1)—(5)是显然的. 现仅证性质(6).

证 由 $x\in\complement(A\cup B)\Leftrightarrow x\overline{\in}A\cup B\Leftrightarrow x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B\Leftrightarrow x\in\complement A\cap\complement B$. 于是，有 $\complement(A\cup B)\subseteq\complement A\cap\complement B$，$\complement A\cap\complement B\subseteq\complement(A\cup B)$. 故有 $\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$. 同理可证

$\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$. 证毕

注 符号"$\Rightarrow$"表示"蕴含","$\Leftrightarrow$"表示"等价的".

集合的并、交运算,可推广到有限个和无限多个集合上.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为无限多个集合,且 $A_i\subseteq S,(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$,由至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中一个的元素所组成的集合,称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的并,记作

$$M=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{x\mid \text{存在 } A_i,\text{使 } x\in A_i\};$$

由属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中每一个的元素所组成的集合,称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交,记作

$$P=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{x\mid x\in A_i,i=1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

四、集族、笛卡儿乘积

以集合为元素的集合称为集族或集类.特殊地,由非空集合 A 的所有子集组成的集合是个集族,称为 A 的幂集,记为 $P(A)$或 2^A.

例如,集合 $A=\{a,b,c\}$由三个元素组成,它的幂集为

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}.$$

显然,有 n 个元素的集合 A,其幂集有 2^n 个不同的元素.

设有非空集合 A,B,若 $a\in A,b\in B$,则由 a,b 组成一个序偶,记为(a,b),a 称为第一元素,b 称为第二元素.两个序偶(a_1,b_1),(a_2,b_2)相等,当且仅当 $a_1=a_2,b_1=b_2$.所有序偶(a,b)组成的集合,称为 A,B 的笛卡儿(Descartes)乘积,记为

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

当 $B=A$ 时,笛卡儿乘积 $A\times A$ 简记为 A^2.

注意,笛卡儿乘积的元素是序偶(a,b),它不是两个元素的集合,且 $A\times B\neq B\times A$.

若用任意两个实数组成的序偶(x,y)表示平面直角坐标系中点的坐标,则 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$就是坐标平面上所有点的坐标的集合.

类似地,有限个非空集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡儿乘积为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}.$$

若 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$,则笛卡儿乘积记为 A^n.

1-2 实数系

高等数学是在实数系(又称实数集)中研究问题的,因此,有必要对实数系作进一步的介绍.

为叙述方便,以后常用逻辑运算符号"$\exists$"表示"存在"、"有"或"找到",称

为存在量词."$\forall$ "表示"对任意的"或"对所有的",称为全称量词.

一、实数系的完备性

众所周知,推动数系扩展的原因之一是数系的逆运算.自然数集 **N** 对加法和乘法运算是封闭的,即两自然数相加或相乘后仍为自然数,而对减法运算是不封闭的,如 $5+x=2$ 在自然数系中是无解的;为此将自然数系扩充为整数系 **Z**,而整数系对除法运算是不封闭的,如 $5x=2$ 在整数系中是无解的;由此又扩展为有理数系 **Q**,而有理数系对开方运算又是不封闭的,如 $x^2=2$ 在有理数系中无解,因此产生了无理数,有理数和无理数统称为实数.

在数轴上,自然数系和整数系中的相邻两数都可用间距为单位长的点表示,它们是一系列的离散点,这种特性称为**自然数系和整数系的离散性**;一个有理数也可用数轴上的一个点表示,这种点称为有理点,任意两个不同的有理点 r_1 与 r_2 之间必有另一个有理点,如 $r_3=\frac{r_1+r_2}{2}$.可见,任意两个有理点之间必有无穷多个有理点,这个特性称为**有理数系的稠密性**;但有理点并未充满整个数轴,还存在空隙,比如,还有与原点距离为 $\sqrt{2}$,π,e(在第三节将讨论到)的这样一些无理点存在.只有有理点和无理点的全体,也即只有实数系的全体实数才能连续地充满整个数轴,这个特性称为**实数系的完备性**.高等数学中的许多基本概念和理论与实数系的完备性是密切相关的,如确界概念等.

二、上界、下界

设 A 为非空数集,若$\exists\ M\in\mathbf{R}$,$\forall\ x\in A$,都有 $x\leqslant M$,则称 A 是有上界的,M 为 A 的一个上界;若$\exists\ m\in\mathbf{R}$,$\forall\ x\in A$,都有 $x\geqslant m$,则称 A 是有下界的,m 为 A 的一个下界;若$\exists\ m,M\in\mathbf{R}$,$\forall\ x\in A$,都有 $m\leqslant x\leqslant M$ 或 $|x|\leqslant M(M>0)$,则称 A 是有界数集,否则称无界数集.

显然,若数集 A 有上界,其上界是不唯一的.对下界亦然.如 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\cos t,0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$是一个有界数集,$M=1$ 是 A 的一个上界,$m=0$ 是 A 的一个下界,而任何大于 1 的实数都是 A 的上界,任何小于零的实数都是 A 的下界.

我们更关注的是在有上界的数集中,有无最小的上界;在有下界的数集中,有无最大的下界,这就是上下确界的概念.

三、上确界、下确界.确界公理

设 A 是一个非空数集,若 S 是 A 的一个上界,并$\forall\ \varepsilon>0$,都有$x\in A$,使 $x>S-\varepsilon$,则称 S 是 A 的上确界(Supremum),记作$\sup A$;类似地,若 S 是 A 的一个下界,并$\forall\ \varepsilon>0$,都有 $x\in A$,使 $x<S+\varepsilon$,则称 S 是 A 的下确界(infimum),记为$\inf A$.