

高等学校教学参考书

常微分方程讲义

王柔怀 伍卓群编

人民教育出版社

高等学校教学参考书



常微分方程讲义

王柔怀 伍卓群编

人民教育出版社

全书分为七章,各章内容是:结论(基本概念);初等积分法;线性方程组与方程;常系数线性方程与方程组;一般理论;定性理论与稳定性理论介绍;一阶线性与拟线性偏微分方程。在各章节之后都配备一定数量的习题。书中除了仔细论述综合大学数学专业与计算数学专业微分方程课程通常的材料外,也用小字为读者提供了一些进一步思考和学习的材料与线索。

本书可作为高等学校数学专业微分方程课程的教学参考书。对于其他希望比较深入地了解常微分方程这门学科的面貌的读者,它也可供作入门书之用。

3653/06

常微分方程讲义

王柔怀 伍卓群编

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0117 开本 $850 \times 1168 \frac{1}{8}$ 印张 $8 \frac{12}{16}$
字数 225,000 印数 18,100—83,100 定价(6) ¥ 0.65
1963年12月第1版 1978年5月北京第8次印刷

序

与微积分学一起成长起来的(常)微分方程論，它的重要性是早就被人們公認了的。这首先是由于，它是各种精确自然科学中表述基本定律和各种问题的根本工具之一，換句話說，只要列出了相应的微分方程，并且有了解(数值地或定性地)这种方程的方法，人們就得以預見到，在已知条件下这种或那种运动过程将怎样进行，或者为了实现人們所希望的某种运动应该怎样設計必要的装置和条件等等。总之，微分方程从它誕生起即日益成为人类認識并进而改造自然的有力工具，成为数学科学联系实际的主要途徑之一。早在十七至十八世紀，它就作为牛頓力学的得力助手，在天体力学和其他机械力学領域內显示了巨大的功能；这只要举出科学史上一件大事为证就够了：在海王星被实际观测到之先，这颗行星的存在就被天文学家用微分方程的方法推算出来了。时至今日，微分方程仍然是最有生命力的数学分支之一。在长期不断的发展过程中，它一方面直接从与生产实践联系的其他科学技术中汲取活力，另一方面又不断以全部数学科学的新旧成就来武装自己，所以它的问题和方法越来越显得丰富多彩。现今不仅专业研究微分方程的数学工作者愈加众多，而且力学、电子技术、自动控制、星际航行等各个学科或尖端技术領域內的研究工作者也都以它为必需的工具了。

以上只是非常粗略地提了一下常微分方程这一分支在一般科学中所起的作用。至于它在数学科学內部的地位，可以这样說，凡是采用无穷小分析方法研究任何对象，大抵都离不开使用微分方程。正是因为如此，所以它也是研究几何对象(曲綫、曲面以及更一般的空間形式)，以及某些代数对象(連續群等)的基本工具之一。另一方面，它的每一步进展，都离不开实变与复变函数論、拓

拓扑学以及代数几何等分支的支援。过去曾經由于微分方程发展的需要而产生了拓扑学与連續群論。可以預料，微分方程进一步发展的需要，还会推动其他分支的发展。

常微分方程在数学专业的教学計劃中是一門基础課。因而在教学中，除了应该在可能範圍內尽量让学生对本学科在一般科学中的作用与現时面貌获得一定的概括了解外，更主要的还是应该服从整个教学計劃的安排，把讲授重点限制在最基本的从而是比較經典和不太專門的部分。这部教材就是本着这种原則来編写的。书中着重讲述的是綜合大学在本課程中通常讲授的那些內容。我們也會力图通过这些內容的讲解反映这門学科所討論的問題在一般科学中的作用，以及某些重要的新动向。此外，我們认为一部教科书除了提供学生必須学习的主要內容之外，容納一些引导有兴趣的讀者进一步思考和学习的材料或綫索也是恰当的。因此，我們用小字在一些章节里添写了一些課堂上不必讲授只供参考的材料。

現在逐章簡單介紹全書的內容，并順帶說明我們編写时的某些考虑。

在第一章緒論中，讲解有关常微分方程的一些基本概念，更主要的是向初学者交代本課程所將討論的問題的意义和背景。我們自己的教学經驗是，从一开始就注意逐步深入地交代所將討論的主要問題的提法及其实际背景，关系到教学效果很大，因为对学生們說來，他們还是第一次接触到綜合性較大，实际背景也較深的問題。就是基于这点經驗，所以这一章写得較一般書籍的緒論要細致一些。但其中的某些部分完全可以移到以后适当地地方去讲。建議讀者最好在学习过程中随时回头来念念这一章，重新認識一下本課程的总的图景，这样是会有好处的。

第二章讲初等积分法。关于这一章的要領請看該章最后的

小結。

第三章讲綫性方程与方程組的一般理論。在这里我們首先針对所論特殊情况，給出了存在与唯一性定理的证明，然后在此基础上展开其余的討論。虽然这里讲述存在与唯一性定理和第五章有所重复，我們认为至少从教学法角度看是值得的。先就简单情形讲一次，并且立刻就接着讲它的成套的运用，这会为理解以后要讲的更一般的存在与唯一性定理的证明方法及其意义奠定很好的底子。而且这样安排也使得整个教材的系統性更强一些，至少我們自己的感觉是这样的。

第四章讲常系数綫性方程与方程組的解法。其中 § 3 比較一般同类性质的教本运用綫性代数知識稍多一点。但除化矩陣成 Jordan 标准形的定理假定为已知（证法不論学过哪一种）外，其余用到的不多一点，估計讀者有可能未学过的知識，书中都有詳細論证。采用本书的教师同志稍一細察就会发现，用本章 § 3 所述基本解組的結構定理的陈述方式，在讲授具体解題方法时会有一些方便。

第五章讲非綫性方程的基本理論。这包括存在与唯一性定理，延展定理，以及解对初值和参数的連續性和可微性定理。对于后二定理，我們給出的是在各种应用中实际需要的“整体”的形式。它們的证明并不比那种“局部”形式的困难，只不过定理的意思初学者可能理解起来要稍难一点。

鉴于定性与稳定性理論近来在应用上与理論上的重要价值，我們在第六章中对它們作了一个粗綫条的介紹。这章的内容讲多讲少，使用本书的教师同志完全可以灵活掌握。

第七章的内容是一阶偏微分方程。我們其实只讲了綫性和拟綫性方程。着重的是特征綫法的基本概念和初等解法。

本书各章都配备相当数量的习题。这些都是在吉林大学数学

系历年來微分方程習題課中積累起來的。其中有些加 * 號的習題是打算留給有興趣而又有多餘力和時間的那些學生去作的。

現在再提一下本書成書的經過。這本不可避免還會包含着許多缺點的書，乃是吉林大學(前名東北人民大學)數學系微分方程課程的教材在將近十年中經過不斷修改加工而成的。早在 1953 年王湘浩教授即為當時的數學系二年級寫過一份講義。其後王柔懷、伍卓群、李岳生、陳銘俊等相繼在王柔懷主持下不斷進行了改寫或加工。這回的最後定稿則主要是王柔懷與伍卓群執筆寫成的，陳銘俊也寫了其中一部分。習題的編選工作是由陳銘俊承擔的，還有周欽德同志亦為此作了好些準備工作。在本書原稿送審過程中，審查同志曾提出了不少改進意見，使得本書增色不少。編者謹向審查同志表示真誠的感謝。這裡順便向吉林大學數學系領導特別致以謝意，沒有他們對教材建設工作的一貫重視和支持，這本雖不成熟的書也是不能與讀者見面的。同時我們很誠懇地希望這本書出版以後，能得到各方的指教，俾便將來進行修改。

最後我們應向讀者聲明一點，即我們這部書由於其性質和篇幅的限制，不是關於常微分方程比較全面，對各種重要問題與方法都有所論述的書。例如關於邊值問題，按教學計劃是放到數學物理方程中去了，所以在本書中除了有意在習題內讓學生接觸一下之外，簡直就未論及。對於十分重要的漸近方法，由於其稍近專門，本書也未觸及。至於像復域中的微分方程的解析理論，由於需要復函數論的準備知識，也在本書的論列範圍之外。讀者學過本書以後，如欲進一步研讀，可以參考本書相應章節所提到的參考書。此外，我們願意向讀者特別推薦最近出版的意大利數學家 G. D. Tricomi 所著“Differential Equations(微分方程)”一書(系英譯本，1961 年出版)，此書的最大優點是能在不涉及高深數學準備的水平上，比較透徹地闡述了本書內沒有講到的部分的基本問題和基本方法。

編者 1962 年 8 月於長春

目 录

序v
第一章 緒論1
§ 1. 微分方程的例子1
§ 2. 一些一般概念8
§ 3. 化任一正規形微分方程和方程組为一阶正規形微分方程組15
§ 4. 几何解釋18
§ 5. 微分方程論的問題20
第二章 初等积分法23
§ 1. 分离变量法23
§ 2. 一阶綫性方程33
§ 3. 恰当方程·积分因子39
§ 4. 一阶隱方程47
§ 5. 高阶方程的几种可积类型60
§ 6. 小結65
第三章 綫性方程組与方程70
§ 1. 引言70
§ 2. 存在与唯一性定理73
§ 3. 关于齐綫性方程組的基本定理79
§ 4. Wronsky 行列式82
§ 5. 非齐綫性方程組·变动参数法85
§ 6. 高阶綫性方程89
§ 7. 降阶法与幕級数解法大意95
§ 8. 綫性方程組与方程的复值解106
§ 9. 二阶齐綫性方程的解的零点分布110
第四章 常系数綫性方程与方程組115
§ 1. 常系数齐綫性方程的解法115
§ 2. 常系数非齐綫性方程的算子解法与解方程組的消去法122
§ 3. 常系数齐綫性方程組的基本解組的结构142
第五章 一般理論157
§ 1. 引言157
§ 2. 基本存在定理158

§ 3. Picard 逐步逼近法	170
§ 4. 延展定理(和非局部存在定理)	175
§ 5. 唯一性定理	182
§ 6. Cauchy 存在定理	187
§ 7. 解对初值与参数的連續相依定理	192
§ 8. 解对初值与参数的可微性定理	201
§ 9. 对于 n 阶方程的推論	209
第六章 定性理論	211
§ 1. 引言	211
§ 2. 稳定性的概念	212
§ 3. 按第一近似决定稳定性	215
§ 4. Ляпунов 第二方法	221
§ 5. 一般定性理論的概念	227
§ 6. 奇点	233
§ 7. 极限圈	240
第七章 一阶偏微分方程	243
§ 1. 基本概念	243
§ 2. 齐綫性方程	249
§ 3. 拟綫性方程	259
习题答案	265

第一章 緒論

§ 1. 微分方程的例子

讀者已經熟悉像代數方程、三角函數方程等那樣一些方程。在那些方程中，作為未知而要去求的是一個量的某幾個特定值。但在自然科學的許多領域中，却常常需要研究另外一類性質上完全不同的方程。在這類方程中，作為未知而要去求的是整個函數。這類方程統稱為函數方程。讀者已經遇到過的隱函數方程就是這類方程中最簡單的一種。

我們這部講義所將論述的常微分方程可以說是最重要的函數方程的一種。顧名思義，所謂微分方程就是聯繫着自變量、未知函數以及它的某些微商的關係式。

下面就是一些微分方程的例子：

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = A \cos \omega t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dx}{dt} + \left(1 - \frac{h^2}{t^2}\right)x = 0 \quad (\text{Bessel 方程}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{熱傳導方程}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{波動方程}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Laplace 方程}).$$

在前三個方程中， x 表未知函數， t 表自變量；在後三個方程中， u 表未知函數，分別依賴于自變量 t 與 x ，或 x 與 y 。一微分

方程, 如果其中的未知函数只与一个自变量有关, 則称为常微分方程; 如果未知函数与几个自变量有关, 并且方程中出现未知函数对几个变量的微商, 則称为偏微分方程。上面前三个方程是常微分方程, 而后三个則是偏微分方程。我們这部讲义, 除了最后一章外, 所研究的都是常微分方程。

許多物理現象所服从的規律可以用微分方程表現出来, 因而許多物理和技术問題的研究在相当程度上归結到这类方程的数学研究。这就是微分方程的重大意义。例如借微分方程之助, 就可以依据熟知的牛頓定律来研究力学系統的运动。

現在用最简单的例子來說明这一点。設有一质量为 m 的质点在 x 軸上运动, 它的坐标用 x 来表示。在质点的运动过程中, 它的坐标 x 随時間 t 而变动。要知道质点是如何运动的, 就是要知道 x 对時間 t 的函数依賴关系。設运动是在力 F 作用下进行的, 又設力 F 与時間 t 、质点的位置坐标 x 和速度 $v = \frac{dx}{dt}$ 有关, 即 $F = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ 。按照牛頓第二定律, 力 F 应等于质量 m 乘以加速度 $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, 这就是說, 在任何时刻 t , 等式

$$(1.1) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

都应该成立。这便是描写所論质点运动的函数 $x(t)$ 所应滿足的微分方程, 它就是牛頓第二定律的数学表示。通过它, 确定质点如何运动的力学問題, 便化成了了解微分方程的数学問題。

很明显, 所論质点的运动方式, 不仅依賴于由方程(1.1)所表示的一般力学規律, 而且还依賴于它在什么时刻 $t = t_0$ 从什么位置 $x = x_0$ 起, 以什么样的初速度 $x'_0 = \frac{dx(t_0)}{dt}$ 开始运动。要确定所論质点的运动方式, 就是要求方程(1.1)之滿足“初始值条件”:

$$(1.2) \quad x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = x'_0$$

的特定解。从物理意义上看，这样的解一定存在而且唯一，即方程(1.1)有而且只有一个满足所說初始值条件(1.2)的解。

不管质点从哪一个初始位置以哪一个初速度开始运动，只要是在同一个函数 $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ 所表示的力的作用下，表示运动的函数 $x(t)$ 都必须满足方程(1.1)。于是因为对应于无穷多不同的初始位置与初速度，就有无穷多不同的运动，可見方程(1.1)不是只有一个或几个解，而是有无穷多个解。

微分方程理論在十七世紀末就开始发展起来，很快地成了研究自然現象的强有力的工具。远在十七、八世紀，在力学、天文、物理和技术科学中，就已經借助于微分方程，取得了巨大的成就。质点动力学和刚体动力学的問題很容易地化成微分方程求解的問題。1846年 Leverrier 根据这个方程預見到了海王星的存在，并确定出海王星在天空中的位置。到現在，这个数学工具在力学、物理以及工程技术各领域中，已經获得日新月异的应用。自动控制和各种电子学装置的设计，彈道的計算，飞机和导弹飞行的稳定性的研究，或者化学反应过程稳定性的研究等，都可以化归为求微分方程的解，或者研究解的性质。現在的情况是，一方面应用微分方程理論已經取得了許許多多成就，另一方面是現有的理論还远不能满足需要，对于工程师感到兴趣的很多有关微分方程的問題，研究微分方程的数学家却不能給出滿意的回答。

下面我們再举一些例子，說明各种不同物理过程的研究如何化为微分方程的研究。

例 1 已知放射性物质鐳的裂变規律是：裂变速度与存余量成比例。設已知在某一时刻 $t = t_0$ ，鐳的份量是 R_0 克，要确定鐳在任意时刻 t 的份量 $R(t)$ 。

由于 $\frac{dR(t)}{dt}$ 是鐳的增長速度，所以它的裂變速度應該是 $-\frac{dR(t)}{dt}$ ，從而按裂變規律，我們有

$$(1.3) \quad \frac{dR}{dt} = -kR,$$

其中 k 是比例常數。

要解決上述問題就是要由方程 (1.3) 確定出函數 $R=R(t)$ 。為此，注意由 (1.3) 可知 $R=R(t)$ 的反函數 $t=t(R)$ 滿足方程

$$\frac{dt}{dR} = -\frac{1}{kR}.$$

這裡解這個微分方程的問題，其實就是已知微商而要求原函數。因此兩端積分便得到

$$t = -\frac{1}{k} \log R + C,$$

從而

$$(1.4) \quad R = e^{-kt+kC} = C_1 e^{-kt},$$

其中 C 和 C_1 是任意常數。

還得從上面推出的 (1.3) 的所有解的通用表达式 (1.4) 中，提取出我們所要的特解，即滿足初值條件

$$R(t_0) = R_0$$

的解。為此，只須以 $t=t_0$ 代入 (1.4) 的右端並令所得結果為 R_0 以確定常數 C_1 。顯然 $C_1 = R_0 e^{kt_0}$ ，代入 (1.4)，最後便得到所要的解：

$$R = R_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

從數學上看，方程 (1.3) 所表示的乃是函數 R 的一個變化規律，即其減小速度 $-\frac{dR}{dt}$ 與它本身成比例。因此，雖然我們是由鐳的裂變這一特殊問題導出方程 (1.3) 的，但方程 (1.3) 的應用遠不止此。

事实上, 只要一物理量的变化服从同样的规律, 则它的变化显然也就可以用方程(1.3)来确定。

例 2 设质量为 m 的一质点沿水平轴 Ox 运动于有阻力的介质中, 例如在液体或气体中。设它所受的力类似于图 1 所示的按 Hooke 定律起作用的两个弹簧的弹性力。Hooke 定律是说, 弹性力指向平衡位置, 大小与质点离平衡

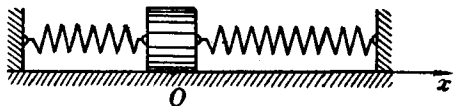


图 1.

位置的偏差成比例。设平衡位置在点 $x=0$ 。于是质点在点 x 处所受到的弹性力等于 $-bx$ ($b>0$), 这里负号表示力的方向与质点位移的方向相反。

设介质对质点的阻力 R 与运动的速度 $v = \frac{dx}{dt}$ 成比例, 即 $R = -a \frac{dx}{dt}$ ($a \geq 0$)。根据牛顿第二定律, 质点的质量乘以加速度应等于所受力的总和, 即

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -bx - a \frac{dx}{dt},$$

或

$$(1.5) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0 \quad (a \geq 0, b > 0).$$

这就是所论质点的运动方程。

如果除了上述的弹性力和阻力外, 质点还受到另一外力 $F = F(t)$ 的作用, 则运动方程是

$$(1.6) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = F(t).$$

无论方程(1.5)或(1.6)都有无穷多个解。所要求的乃是满足初值条件

$$x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = x'_0$$

的解。在一般情形下这样的特解怎么求，我们将在第四章里讲述。

例 3 在最简单的闭合电路(简称迴路)中，电流振荡的研究

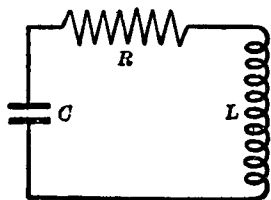


图 2.

也归结为形如 (1.5) 的方程。这样的迴路如图 2 所示。在图 2 中，左边代表电容为 C 的电容器，它的两极和自感 L 以及电阻 R 串联成闭合迴路。设在某一时刻将电容器充电使之得到一个电位差，以后便将电源切断。由于有自感 L 存在，迴路中产生振荡的电流。

为了推出振荡规律，以 $v(t)$ ，或简单地用 v ，表在时刻 t 电容器两极间的电位差，以 $i(t)$ 表电流强度，以 R 表电阻。由物理上熟知的电学定律，在任何时刻， $i(t)R$ 均等于迴路内的总电动势，而后者包括由电容器两极间电位差所产生的电动势 $-v(t)$ 以及自感电动势 $-L \frac{di}{dt}$ 。因此

$$(1.7) \quad iR = -v - L \frac{di}{dt}.$$

以 $Q(t)$ 表在时刻 t 电容器上的电量，则在迴路上每一时刻的电流强度 $i(t)$ 等于 $\frac{dQ(t)}{dt}$ ，而电容器两极间电位差 $v(t)$ 等于 $\frac{Q(t)}{C}$ 。因此

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dv}{dt}, \quad \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 v}{dt^2},$$

从而 (1.7) 可改写成

$$(1.8) \quad L \frac{d^2 v}{dt^2} + R \frac{dv}{dt} + \frac{1}{C} v = 0.$$

这就是所论迴路中的电振荡方程。

出现在上述各个例子中的微分方程，都只含有一个未知函数。

許多物理过程的研究常常提出一組微分方程，这些方程合在一起将若干个未知函数和它們的某些微商联系起来。

作为最简单的例子，我們来看质量为 m 的质点在 (x_1, x_2, x_3) 空間內的运动。质点的空間位置可用向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 来表示。設运动是在力 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ 作用下进行的，这里 F_1, F_2, F_3 表沿坐标軸方向的分力。又設力 $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ 与时刻 t 质点的位置 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 以及速度 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right)$ 有关。于是根据牛頓第二定律，

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \left(t, \mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right),$$

或

$$(1.9) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_1 \left(t; x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_2 \left(t; x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 x_3}{dt^2} = F_3 \left(t; x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right). \end{cases}$$

这便是联系未知函数 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 以及它們的一阶和二阶微商的一組关系式，称为一个微分方程組。

习 題

1. 求 (t, x) 平面上的一曲綫，使其上每点处的切綫与該点的向徑和 oy 軸构成一等腰三角形。
2. 已知一平面曲綫經過某定点 M_0 ，且曲綫上每一点 M (M_0 点除外) 的切綫与直綫 M_0M 的交角恒等于定数 α 。試求这曲綫所适合的微分方程。
3. 求以初速度 v_0 在空气中鉛直上抛的物体的运动方程，設該物体的质量为 m ，物体所受的阻力与速度的平方成正比例，比例常数为 k^2 。又問物体达到最高点的時間是多少？
4. 一质点在重力作用下沿某曲綫无摩擦地滑动，在水平方向成等速运动，試求这曲綫所适合的微分方程。

提示：利用能量不灭定律。

5. 求“物理”摆——圍繞水平軸自由旋轉的物体——在平衡位置附近微振动的微分方程。

§ 2. 一些一般概念

1 在 § 1 已經說过，所謂(常)微分方程就是联系自变量 t 与未知函数 x 和它的某些微商 $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}$ 的一个关系式

$$(2.1) \quad F\left(t; x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0,$$

其中 F 是它所依賴的 $n+2$ 个变量的已知函数。出現在方程中的未知函数的微商的最高阶数 n 称为方程的阶。§ 1 中的(1.3)是一阶方程，而(1.5)，(1.6)，(1.8)是二阶方程。上面的(2.1)便是 n 阶方程的一般形式。

微分方程的解(也常叫作积分)这个概念在 § 1 中已經用过了，現在来把它确切化。設 I 是 t 軸上某区間。函数 $\varphi(t)$ 称为微分方程(2.1)在区間 I 上的解，如果 $\varphi(t)$ 在区間 I 上有定义，具有从一到 n 阶微商 $\frac{d\varphi(t)}{dt}, \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}$ ，并且能使

$$F\left(t; \varphi(t), \frac{d\varphi(t)}{dt}, \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}\right) \equiv 0 \quad \text{对所有 } t \in I.$$

在 § 1 中就已經指出过，一个微分方程不只有一个或几个解，而有为数无穷的一整族解。在 § 1 还指出过，在应用上除了要知道这整族解的屬性外，并不要求求出其中的每一个来，而是要求求出其中滿足某种指定条件(通常称为定解条件)的解来。求滿足某种定解条件的解的問題称为定解問題。最重要的定解条件就是 § 1 中已經看到过的初始值条件，或簡称初值条件。

对于 n 阶方程(2.1)，初值条件就是