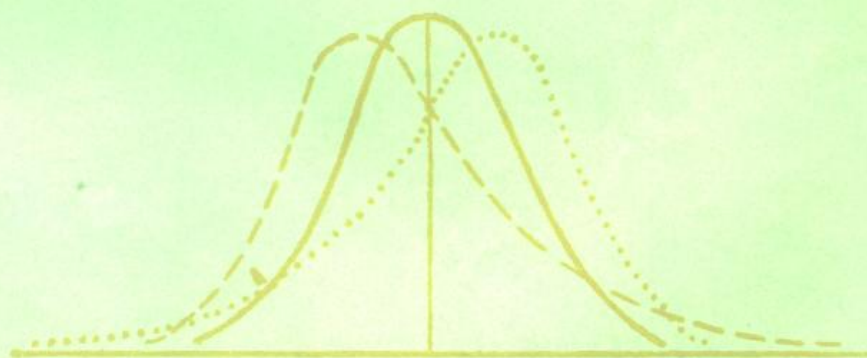


统计质量控制理论与应用

张维铭 著



浙江大学出版社

统计质量控制理论与应用

张维铭 著



浙江大学出版社

(浙)新登字10号

内 容 简 介

本书包括统计推断、生产过程控制和成批产品抽样检验三部分。介绍了各种常规生产过程控制图、灵敏度更高的控制图、小批量和大批量的计数抽样检验方案、连续计数抽样方案以及计数和计量抽样方案的国际标准等。其中正态分布的W检验、样本数较少时计量控制图、累积和控制图、多变量控制图、控制图的经济设计、贝叶斯抽样方案和抽样方案的国际标准等都是最近几年国内外发展的科研成果。

本书可作为工厂企业的质量管理人员、工程技术和检验人员、理工科大学的数理统计专业、管理工程专业和财经院校的统计专业的师生以及有关科研工作者的参考书。

2015/3/16

统计质量控制理论与应用

张维铭 著

责任编辑 平淳莲

* *

浙江大学出版社出版

江苏省武进第三印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

* *

开本787×1092 1/16 印张14.5 字数353千字

1992年1月第1版 1992年1月第一次印刷

印数0001—2000

ISBN7-308-00910-6/z·067 定价：9.30 元

序 言

数理统计是数学理论联系实际较密切的一门学科，而统计质量控制是数理统计在生产方面的应用。统计控制的方法是近代工业生产不可缺少的组成部分。不断提高产品的质量是工业生产中的一个重要问题。每个工业企业在完成产品数量指标的同时，还要保证产品质量完全符合国家规定的标准。这是社会主义工业企业应该遵循的一个重要方针，也是实现四个现代化的一项基本要求。

随着现代化工业的发展，要想把产品质量提到更高的水平，必须有一套科学的质量管理方法。利用数理统计方法检查产品的质量，及时发现生产中存在的问题，是预防废品，提高产品质量的有效方法。实践表明，运用统计控制方法能够提高企业的劳动生产率，改善工艺，节约原材料，减少废品和提高机器及工具的可靠性等。

本书对各种不同生产技术问题中的统计质量控制的理论和方法作了较深入的研究和介绍，并以过去在实践中总结的资料说明这些方法的具体应用。书中系统地研究了生产过程控制、成批产品检验及与此有关的问题，包括了近年来国内外发展的一些成果，也包括作者的一些工作。可作为工厂企业的质量管理工作、检验人员、工程技术和统计人员在工作和学习中的参考书，也可作为理工科大学数理统计专业、管理工程专业和财经院校统计专业的教学参考书。在工厂企业中，如果应用本书的理论与方法能对改善生产过程和提高产品质量起着一定的作用，那么写这本书的目的就达到了。

本书第一部分介绍统计质量控制的概念，及与质量控制有关的数理统计的知识，第二部分研究生产过程的统计控制，第三部分研究成批产品的抽样检验。书末附有参考文献和统计表。

本书的手稿承蒙张皓同志审阅，孟普子、黄丽媛和张海洪同志协助绘图，在教学过程中，须亚平同志对讲义提了一些修改意见，谨此一并致以谢意。

由于作者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，希望读者批评指正。

张维铭

1990年2月于杭州

目 录

第一章 统计质量控制的概念	(1)
§ 1.1 质量控制的对象	(1)
§ 1.2 质量控制的任 务	(1)
§ 1.3 控制的 意义	(2)
§ 1.4 质量的 表示	(2)
§ 1.5 过程 控制	(3)
§ 1.6 验收 检查	(4)
§ 1.7 质量控制的 原则	(4)
第二章 样本与统计量的分布	(6)
§ 2.1 总体与 样 本	(6)
§ 2.2 数据的整理和 归 纳	(6)
§ 2.3 样本的数字 特 征	(8)
§ 2.4 统计量及其数字 特 征	(10)
§ 2.5 当总体为正态时样本方差和标准差的 分 布	(11)
§ 2.6 当总体为正态时司都顿比的 分 布	(13)
§ 2.7 顺序统计量的分布及其数字 特 征	(14)
§ 2.8 样本极差的 分 布	(16)
第三章 参数估计	(19)
§ 3.1 参数估计的 概 念	(19)
§ 3.2 无偏估 计 量	(19)
§ 3.3 有效估 计 量	(20)
§ 3.4 最大似然估 计 法	(23)
§ 3.5 参数的区间 估 计	(25)
第四章 假设检验	(27)
§ 4.1 假设检验的 概 念	(27)
§ 4.2 关于总体平均值的 检 验	(28)
§ 4.3 关于总体方差的 检 验	(29)
§ 4.4 总体分布的 χ^2 — 检 验	(29)
§ 4.5 小样本的正态性 检 验	(31)
§ 4.6 检验的功效 函 数	(35)
§ 4.7 似然比的 检 验	(36)
§ 4.8 同质(均匀)性的 检 验	(39)
§ 4.9 其它 检 验	(41)

第五章 分析用计量控制图	(46)
§ 5.1 控制图的意义	(46)
§ 5.2 控制限的计算	(46)
§ 5.3 被控制的生产过程	(50)
§ 5.4 工序能力	(52)
§ 5.5 存在系统性因素的检验	(55)
§ 5.6 容许限的确定	(58)
第六章 控制用计量控制图	(62)
§ 6.1 平均值和极差控制图	(62)
§ 6.2 发现控制不足的检验	(64)
§ 6.3 在给定复合概率下平均值和极差控制图	(65)
§ 6.4 中位值和极差控制图	(66)
§ 6.5 全距中值和极值控制图	(68)
§ 6.6 过程控制的抽样方法	(72)
§ 6.7 移动总和与移动极差的应用	(73)
第七章 样本数较少时的计量控制图	(75)
§ 7.1 常规控制图的控制限	(75)
§ 7.2 过程处于统计控制的检验	(75)
§ 7.3 $\bar{x}$ 图和R图的试验控制限	(80)
§ 7.4 $\bar{x}$ 图的试验控制限	(82)
§ 7.5 中位值和极差控制图的应用	(83)
第八章 计量控制图的效率	(86)
§ 8.1 标准差不变时平均值控制图的操作特性	(86)
§ 8.2 标准差控制图的操作特性	(88)
§ 8.3 极差控制图的操作特性	(90)
§ 8.4 标准差变化时平均值控制图的操作特性	(91)
§ 8.5 同时应用平均值和离散控制图的操作特性	(92)
§ 8.6 $\bar{x}$ -R图的操作特性	(94)
§ 8.7 极值图的操作特性	(96)
第九章 计量控制图的扩展	(98)
§ 9.1 具有警戒限的控制图	(98)
§ 9.2 链控制图	(99)
§ 9.3 链和控制图	(101)
§ 9.4 链和检验的一般描述和操作特性	(102)
§ 9.5 累积和控制图	(103)
§ 9.6 V模板的平均链长	(105)
§ 9.7 判决界限方案的理论	(105)
§ 9.8 判决界限方案的设计	(107)
§ 9.9 累积和图和常规的 $\bar{x}$ 图的比较	(108)

§ 9.10	累积和图的实例	(110)
§ 9.11	平均值接收控制图	(112)
§ 9.12	公差范围较宽时平均值接收图	(113)
第十章	多变量控制图	(117)
§ 10.1	平均值控制图	(117)
§ 10.2	利用变量变换制订 T^2 图	(118)
§ 10.3	离散控制图	(120)
§ 10.4	应用实例	(120)
§ 10.5	样本数较少时多变量控制图	(123)
第十一章	计数控制图	(125)
§ 11.1	计数控制图的编制原理	(125)
§ 11.2	分析用控制图	(126)
§ 11.3	控制用控制图	(128)
§ 11.4	控制性的 χ^2 -检验	(129)
§ 11.5	样本容量不同时的控制图	(130)
§ 11.6	小样本控制图	(130)
§ 11.7	操作特性	(133)
第十二章	计点控制图	(134)
§ 12.1	计点控制图的编制原理	(134)
§ 12.2	样本容量相同时的计点控制图	(135)
§ 12.3	样本容量变化时的计点控制图	(137)
第十三章	控制图的经济设计	(139)
§ 13.1	$\bar{x}$ 图最优设计准则的决定	(139)
§ 13.2	$\bar{x}$ 图经济设计的简化方案	(142)
§ 13.3	损失—费用的计算	(143)
§ 13.4	np 图最优设计的准则	(145)
§ 13.5	np 图经济设计的简化方案	(147)
第十四章	批量较小时计数抽样检验	(151)
§ 14.1	抽样检验的意义和功用	(151)
§ 14.2	较优抽样方案的要求	(152)
§ 14.3	按抽样方法分类的抽样方案	(153)
§ 14.4	按保障形式分类的抽样方案	(154)
§ 14.5	方案的选择	(155)
§ 14.6	计算一次方案的程序	(155)
§ 14.7	应用超几何分布制订方案的近似解	(158)
§ 14.8	操作特性曲线	(158)
§ 14.9	平均检验数量	(160)
§ 14.10	平均检出质量上限	(160)

第十五章 批量较大时计数抽样检验	(162)
§ 15.1 几种分布之间的联系	(162)
§ 15.2 应用泊松分布制订方案之一	(164)
§ 15.3 应用泊松分布制订方案之二	(166)
§ 15.4 应用二项分布制订抽样方案	(168)
§ 15.5 二次抽样检验	(172)
§ 15.6 二次抽样方案的制订	(174)
§ 15.7 连续抽样方案	(176)
第十六章 调整型抽样方案	(179)
§ 16.1 ISO2859方案的意义	(179)
§ 16.2 ISO2859方案的编制	(179)
§ 16.3 ISO2859方案的操作特性	(182)
§ 16.4 ISO2859抽样系统的复合操作特性	(184)
§ 16.5 ISO2859方案的使用	(186)
第十七章 计量抽样检验	(188)
§ 17.1 “s”法抽样方案——形式1	(188)
§ 17.2 “s”法抽样方案——形式2	(191)
§ 17.3 “ σ ”法抽样方案——形式1	(193)
§ 17.4 “ σ ”法抽样方案——形式2	(194)
§ 17.5 “ σ ”法双侧规格限的抽样方案	(195)
§ 17.6 “s”法双侧规格限的抽样方案	(198)
§ 17.7 国际标准ISO3951抽样方案	(200)
附 标准型计量抽样方案表	(203)
第十八章 根据费用和先验分布的计数抽样方案	(207)
§ 18.1 费用模型	(207)
§ 18.2 最优抽样方案的决定	(211)
§ 18.3 平均检出质量的期望	(213)
附录	(215)
参考文献	(222)

第一章 统计质量控制的概念

§ 1.1 质量控制的对象

由于近代科学技术的迅速发展,在生产斗争和科学实验中经常要用到与概率论及数理统计有关的知识。辩证唯物主义告诉我们,客观世界中任何事物都具有一定的规律——必然性规律和偶然性规律。概率论与数理统计是人们在不断的实践过程中对偶然现象规律性认识的结晶。在实践中,如果我们只孤立地看到了偶然现象的各个方面,就得出不出什么规律性。但是,当我们研究大量的偶然现象的时候,抓住了偶然现象的数学本质——量及其相互联系,考虑到现象的全体,就可以发现,偶然现象存在着必然的规律性。概率论是研究大量随机(偶然)现象的统计规律性的科学,而数理统计学是研究随机现象的某一类特殊的统计规律性。统计质量控制(简称质量控制)是数理统计学的一个分支,它是研究从总体中所抽样本的某些数字特征所表现的统计规律性,并从样本所遵循的规律性推断总体的规律。数理统计学的核心部分是统计推断,而统计推断是质量控制的理论基础。实际上,质量控制是统计推断的具体应用,它是在生产活动开始以后,如何根据统计推断的理论在活动的全过程中适时地用度量、比较、纠正和复证的办法来监督这种活动的进行。质量控制可以应用于任何重复的过程,它所研究的是在或多或少的固定条件下大量生产的产品。应用质量控制的方法不仅可以对将来生产的产品质量进行科学的预测,更重要的是用来控制和监督生产过程,限制和预防废品的出现,以达到改善生产过程和提高成批产品质量的目的。

§ 1.2 质量控制的任務

客观世界中的事物是矛盾着的,变异是客观矛盾的反映,所以变异是自然界固有的属性,也是所有产品所固有的。为了确定产品质量变异的容许范围,生产者或消费者常常规定某些标准。产品质量符合某一标准的,就认为是合格品。这些标准通常不仅按产品属性来划分,而且还规定产品质量的上限和下限。位于这两界限之内的,认为合格品。这个上限和下限通常称为规格限或公差限。

对产品质量实行统计控制时,生产者面临两个问题需要解决:一是如何稳定生产过程,使质量不合格的产品的百分数不过分大;二是如何使成批产品中不包括过多的不合格品。因此,质量控制应该研究同一任务的两个方面:生产过程的控制和成批产品的控制。前者是用统计方法监督产品质量的恶化,减少不合格品。它是估计生产过程将来的动作,通常叫做过程控制或工序控制。后者是在生产过程完毕后,鉴定一批产品的质量是否合乎要求。它是鉴定生产过程过去的动作,叫做验收检查。通过过程控制能及时发现过程中存在的问题,预防不合格品的出现,使过程保持稳定,产品质量均匀,从而提高产品的使用价值。通过验收检查可以鉴定一批产品是否合乎今后的再加工或消费者使用的要求,从而促进生产者不断提高产品质量。

如果生产过程纳入控制状态,则在销售或购买产品时不必过多地担心产品质量的低劣。

对于受控制的产品，检查成批的数量可以减少。

§ 1.3 控制的意义

质量差异或波动一般是由人、设备、原料、材料、操作方法和环境条件等因素的影响造成的。按照它们对产品质量的影响不同，可分为不可避免的和可避免的两类因素。前者是经常存在的，对产品质量影响较小，带有随机性，叫做随机或偶然因素；后者是突然发生的，对质量影响较大，而前后一致的，带有系统性，叫做系统性因素或异常因素。随机因素如车床的微小振动，材料的不均匀，空气中湿度的变化等等。系统性因素如工具的过度磨损，材料的不同质量，操作者的疏忽等等。这两种不同性质的因素可凭数理统计的理论和实际经验加以识别。若质量差异全是由随机因素所引起，则质量特征的分布一般形成正态分布。若质量特征的分布离开正态分布很远，我们就可断定对产品质量影响的因素里含有可以避免的部分。在获得足够的信息之后，就能够确定产生系统性因素的原因，并加以消除。

当由随机因素起作用的一系列原因影响生产过程时，便说过程是受控制的。因此，如果由系统性因素引起的质量影响被消除，则过程是趋近控制状态的，且可确定质量特征位于公差界限之间的概率。通常生产过程很少完全受控制，但可以实行有效的控制，使生产的产品质量能满足于实际需要。

统计质量控制的方法是同抽样相联系的。我们是根据从总体抽得的样本作出关于总体性质的结论。

质量控制关系着制订产品规格、实际制造和产品检查的整个生产活动，它有下列一些用途：

(1) 可以确定生产过程的进行是否满意。对处于统计控制的过程可认为是满意的或稳定的过程。这时虽然也可能有少量的不合格品，但对今后的加工和使用并无多大影响。

(2) 为制定产品规格提供合理的基准。如果查明正常情况下，质量特征值与公差限不符，则须合理地修订公差限。

(3) 如果生产过程处于控制状态，则可减少成批产品检查的费用。这时可以抽取小量样品和从经济观点确定最有利的方案。

(4) 为给产品设计、实际制造和产品检查三方面工作人员提供一种共同语言，使他们可以了解彼此间存在的问题，进而建立协同合作的关系。

§ 1.4 质量的表示

质量控制是通过单件产品的质量，研究生产过程中产品或成批产品的质量，因此可从单件产品和整批产品两方面来说明产品的质量。

表示单件产品的质量(简称产品质量)，有下列三种形式：

(1) 变量：变量是可测试的质量特征。例如弯轴的外径、皮带的拉力和灯泡的耐用时间等。通常所用的是连续尺度，用这种尺度测得的是连续(随机)变量。一般说来，它可以取某一实数区间内的任何值。

(2) 属性：通常产品可划分为合格品(好品)和不合格品(坏品)。质量特征符合某一标准的为合格品，不符合的为不合格品。例如打火机不着火的属于不合格品。虽然产品的质量特征是要经过测试的，但从经济观点出发，有时仅规定质量特征值位于规格限内的为合格品，不

位于其内的为不合格品。在任一情况下，每个产品属于两类中的一类。

(3) 表面的缺陷数：某些产品的质量特征还可用品表面的缺陷数来表示。例如一尺坯布或一只机翼表面的疵点数和一尺绝缘电线表面的小孔数等。缺陷数量是用某一整数来表示的。

表示一批产品的质量(简称批质量)，有下列几种形式：

(1) 不合格品率：是将一批产品中的不合格品数 M 除以该批产品的总数 N 所得的比率 p 。

(2) 每件产品的平均缺陷数：它是将一批产品表面缺陷总数 $\sum C_i$ 除以产品总数 N 所得的平均值。

(3) 变量的平均值和中位值：变量的平均值 m 是将表示一批产品某一特征的所有变量值 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 相加后再除以产品总数 N 所得的值。中位值就是依递增顺序排列的一系列变量值中位于正中间的那个数值，通常记作 $\zeta_{1/2}$ 。这两个数字特征能对一批产品的质量作出大概的估计，它们是用来刻画个别质量特征的集中程度的量。

(4) 变量的标准差和极差：标准差是变量的可能值和它的平均值离差的平方的平均值的平方根，即 $\sigma = \sqrt{\sum (x_i - m)^2 / N}$ 。极差是 N 个变量值中最大值和最小值之差。它们都是用来刻画个别质量特征值之间的分散程度的量。这两个数字特征的值越小，分散程度就越小，从而平均值的代表性就越大。

§ 1.5 过程控制

过程控制的主要目的是保证制造过程处于控制状态，预防废品出现。这种统计控制方法

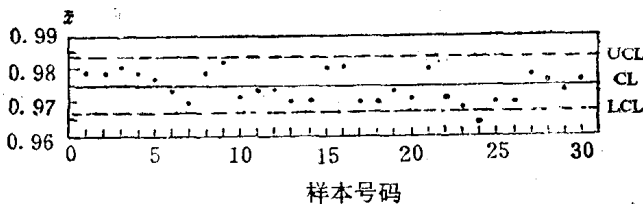


图1.1 轴直径的平均值控制图

的典型工具是控制图，在图上描绘出按一定时间间隔抽取的序列样本的数字特征。图1.1是表示轴直径的30个序列样本(其中每个样本由5件制品组成)的平均值控制图。样本是大约每隔一小时抽取的。此图表明，平均值

围绕中心线(CL)摆动，在大多数情况下，位于两条虚线UCL(控制上限)和LCL(控制下限)之间。当图上的点越出虚线时(在本例是24号样本)，应该认为生产过程偏离了标准。在此情况下，必须寻找破坏过程的原因，然后设法加以消除，从而将过程纳入稳定状态。

用统计方法确定的控制限，要使监督制造过程的工人在发现点子越出界限时通常能找到过程受到严重破坏的原因，可是又不浪费寻找过程并无破坏的时间。因此控制限的制订要保持下列两类错误之间的平衡：

(1) 当生产过程实际上并没有受到破坏时，错误地找寻了过程受破坏的原因。

(2) 当生产过程实际上已受到破坏时，控制图上没有示出过程受破坏的信号，从而没有找寻被破坏的原因。

这两类错误中任何一类都不应过分频繁地发生，且其中任一个的频数的降低不应当增大另一个的频数。换言之，这两类错误的概率都应该足够小。

控制图是过程控制中极有价值的工具。因为它既能预先发现过程的破坏，又是极灵活的。从图1.1看出，第24号是第一个超出控制限的样本。在这样本以前，按照样本平均值排列的点子下降的性质可以预测下一个点子有可能跑出下限。在中心线上方或下方接连出现过分多

点子可以作为生产有缺陷的预告。实际上，图上点子的任何异常排列都可以作为过程发生变化的征兆。

依照表示产品质量的三种形式，过程控制分为计量控制、计数控制(属性控制)和计点控制三类。依照批质量表示形式的不同，计量控制图又分为平均值、中位值、标准差和极差控制图等。这三类控制图的形式均与图1.1相类似。

§ 1.6 验收检查

验收检查的目的是根据从一批产品(亦称产品批)中抽取的一个或若干个样本的信息来确定这批产品的质量，并作出接收或拒收该批产品的决定。验收检查的工具是抽样验收方案(简称抽样方案)。这种方案的编制，至少要满足下列要求中的两个：

- (1) 好的产品批被拒收的概率不应大于某一确定的值 α 。这个值叫做生产者^①风险。
- (2) 坏的产品批被接收的概率应该小于某一个确定值 β 。这个值叫做消费者^②风险。
- (3) 经过抽样检验后，产品的平均不合格品率应低于某一值。
- (4) 被检验的产品数量应该最小。

须指出，在控制图上确定控制限的条件是与前两个要求相似的。在一般形式下，上述两类风险可以定义为：1)拒绝正确假设的错误，2)接受不正确假设的错误。这两类错误的大小要达到可接受的平衡。

虽然过程控制和验收检查的任务有本质上的不同，但是作为基础的统计研究方法却是相同的。如前所述，在生产过程处于控制状态的情况下，对批质量作判断时所需样本容量可以减少，且对批质量可作出较正确的估计。熟悉产品质量有助于选择最经济的检验方案。某些质量验收方案常常根据控制图上的点子规定样本容量的变化。

验收检查分为计数检查(包括计点检查)和计量检查两类。依照批质量的不同表示，计量抽样方案又可分为按平均值的和按不合格品率的方案两类。

§ 1.7 质量控制的原则

在质量控制中我们要采用一些基本原则，一切控制工具都是围绕着这些原则解决问题的。

1. 预防原则 质量控制的主要目的不是设立检查站或关卡去发现或者找寻不合格品，而是设法预防不合格品的产生。因为产品的质量是制造出来的而不是检查出来的，所以最有效的生产方针不是去找寻或去发现不合格品，而是如何设法使生产中不出或少出不合格品，这就是预防的原则。要预防就得考虑事件发生的概率和生产者或消费者承担的风险。所以质量控制同概率和风险有着密切的联系。

2. 经济原则 预防的深度可以是无止境的，但是这里所指的预防不是无条件的预防，而是在经济效益的前提下采取一切合算的预防措施。质量控制将提供我们许许多多锐利的预防性的控制工具和办法。这些工具的运用除了产品方面有特殊的要求以外，须从经济观点来选用这些工具。因此，有时我们也可以放松预防而采用事后抽查，这将取决于经济核算的原

^① 这里的生产者的意义是广泛的。生产者可以是工厂的生产者或供给半成品的工段，也可以是企业的供应部门和批发公司。

^② 这里的消费者的意义是广泛的。消费者可以是企业的销售部门、百货公司、工厂的检验科或接受半成品的工段等。

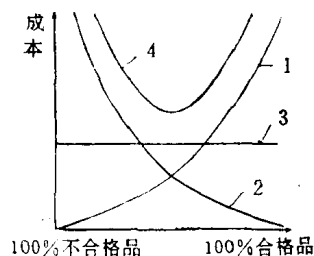


图1.2 质量控制的经济示意图

1—质量控制费用； 2—不合格品损失； 3—生产成本； 4—总成本

则。在图1.2示出的质量控制的经济示意图中，基本生产成本(直线3)不变；曲线1代表质量控制的费用在不同质量控制的松紧程度下升降的性质；曲线2代表因生产不合格品而造成的损失在不同质量控制的松紧程度下升降的性质；曲线4代表总成本的变化。从图不难看出，若把质量控制得严格，不合格品的损失固然减少，可是质量控制的费用则上升。反之，若担忧质量控制的费用太高，因之减弱各种质量控制措施，则不合格品增多，由此造成的损失也增大，这也无益于降低产品成本的要求。只有在曲线1和2交叉之处，也就是当不合格品的损失和质量控制的费用平衡时才能使总的生产成本达到最低点。因此，我们不能为控制而控制，或者为检查而检查，而不顾一切地来增加质量控制的费用。质量控制

是为生产服务的，必须在经济核算的原则下采取各种控制措施。以后所述各种控制和检查工具，每种都有它的经济使用价值，以供各种不同生产的需要。从图1.2可知，并不是说所有产品的质量都不需控制得100%合格，这要看产品的性质而定。有的产品，例如装配用的螺钉，因构造简单，造价低廉，就不必一关扣一关的逐件检查，以免质量控制的成本上升。对这类产品，在一批中包含一定数量的不合格品，并不影响今后的加工和使用。对于构造复杂、造价高昂而对整个产品的优劣有决定性作用的产品，例如机床上的丝杠、导轨、齿轮箱等就不能采取抽样检查。对这种产品须作全面检查，保证100%合格。这对于避免整个机床的退修或报废来说，仍是经济的。

3. 协作原则 现代化工厂的组织和分工是很细的，而提高和控制产品质量的责任又和许多部门的职责有关。要发挥控制产品的最大效能，不能单靠把关口、加压力等办法，而应设法把各部门有关产品质量的职能有机地结合起来，使各职能单位在各自的岗位上发挥积极的效能，共同为生产优质品而努力。

第二章 样本与统计量的分布

以概率论为基础,建立统计推断的理论和方法,就是如何从样本的有关信息有效地推断总体的某一特性。统计推断中的主要问题之一,就是要找出统计量的分布。本章先介绍与统计推断有关的总体和样本的概念及数据处理的方法,然后研究几个重要统计量的分布。

§ 2.1 总体与样本

总体是所要研究对象的全体,可以把它看成是由内部联系的、同质的、而在数量上有差异的许多个体所组成的集合。在质量控制中,总体可以是日常生产的数量众多的同类产品,也可以是成批产品中的一定数量的产品。我们所关心的不是总体中每一个体的具体性能,而是这些个体的某一数量特征值及其在总体中的分布情况。(例如寿命在900到1200小时之间的灯泡在整批灯泡中所占的比例)。对一个总体来说,特征值落在某一区间 (a, b) 内的比例是确定的,也是客观存在的。从总体中任取一个个体,称之为样品。样品的特征值是一个随机变量 X ,它在区间 (a, b) 内取值的概率是与总体特征值在该区间的比例相同的。(例如从一批灯泡中任取一个,它的寿命位于900至1200小时内的概率等于寿命在该区间内的灯泡在整批中所占的比例。)因此,我们可用随机变量 X 的分布来研究总体特征值的分布。这样,一个总体可用一个随机变量 X 来代表。总体可以看作随机变量 X 取值的全体(其个体就是一个实数),总体的分布就是随机变量 X 的分布。

从总体中任取 n 个个体,这 n 个个体(样品)所组成的集合叫做样本,样品的个数叫做样本容量。我们的目的是通过样本认识总体、了解总体,是从样本的信息推断总体的特性,因此所取的样本必须能充分地代表总体。为此,必须采用随机抽样法,亦即在每次抽取时要保证总体中每个个体被抽到的机会相等。如果抽样按照下列两种方式之一进行:(1)从有限总体中放回地抽取个体,(2)从无限总体中不放回地抽取个体,则能使每个个体被抽到的机会相同。按此抽样所得的样本叫做简单随机样本。统计推断是根据简单随机样本所提供的信息作出的。

在一个总体 X 中,抽取 n 个个体 $X_1, X_2, \dots, X_n$ (指个体的数量特征),这 n 个个体 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 叫做容量为 n 的简单随机样本。显然 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是相互独立的随机变量,如上所述,它们的概率分布是与总体 X 的分布相同的。在一次具体抽取(抽 n 个)之后,它们都是具体的数值,记作 $x_1, x_2, \dots, x_n$,叫做样本值或观测值,也就是一批数据。如果总体 X 的密度函数为 $p(x)$,则样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合密度函数为 $p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$ 。

样本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 所有可能取值的全体叫做样本空间,记作 Ω ,它是 n 维空间或其中的一个子集,样本值 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 就是 Ω 中的一个点。

§ 2.2 数据的整理和归纳

从总体中抽取某一样本,得到的 n 个数据是分散的、零乱的,必须经过整理和归纳,才能显示出一批数据的规律性。数据整理和归纳的方法有列表法和图像法两种。

对离散型随机变量而言，将所得的 n 个数据由小到大排列为

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p \leq \dots \leq x_n$$

在这样本中，当 $x_v < x \leq x_{v+1}$ 时，小于 x 的样本值的频率是 v/n 。因此样本分布函数可定义为

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ v/n, & x_v < x \leq x_{v+1} \\ 1, & x > x_n \end{cases} \quad (2.1)$$

显然，这分布被样本唯一确定。根据概率论中贝努里大数定理，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $F_n(x) = v/n$ 依概率收敛于 $p = F(x)$ 。故当 n 很大时，样本分布函数近似于总体分布函数。

样本分布函数图是一阶梯曲线。若样本值不重复。则每一跃度为 $1/n$ ；若有重复，则按 $1/n$ 的倍数跳跃上升。当 n 很大时，它能给出曲线 $y = F(x)$ 的良好近似。

对连续型随机变量，由于它可以取某一区间上的一切值，而实际观测次数有限，实际读数的精确度也有限，不可能计算每个样本值的数目。通常将样本值(数据)分成若干组(或区间)，用划记法数出各组内数据的数目，每组分摊到的数据不要小于4个或5个。例如100个数据，至多分成20组，在工业生产中常分成10至20组。当数据太少时，也可分5组。

某纺织机械厂生产细纱机的零件罗拉(即锭杆)，今从某一周生产的罗拉中抽取100件进行测量，得到100个罗拉的外径数据。将数据分成12组，所得频数分布如表2.1所示。组中最大值和最小值分别叫做组的上限和下限，上下限之差叫做组距，用 c 表示。上限和下限的平均值叫做组中值(x_j)。落在各组内的数据数目叫做组频数，用 v_j 表示。一般采取等组距分组，先找出一批数据的最大值和最小值，组距要取稍大于“(最大值—最小值)÷组数”的简单数值。为了避免数据正好落在分点(边界值)上，通常要使各组的边界值比原测定精度高半个最小测量单位。另一种方法是规定每组中的数据包括下限而不包括上限。组中值要落在简单易算的数字上。

表2.1 罗拉的频数分布表($c = 0.003$)

组 限 $\left(x_j - \frac{c}{2}, x_j + \frac{c}{2} \right)$	组中值 x_j	频数 v_j	组 限 $\left(x_j - \frac{c}{2}, x_j + \frac{c}{2} \right)$	组中值 x_j	频数 v_j
0.8535~0.8565	0.855	1	0.8745~0.8775	0.876	12
0.8565~0.8595	0.858	3	0.8775~0.8805	0.879	8
0.8595~0.8625	0.861	5	0.8805~0.8835	0.882	3
0.8625~0.8655	0.864	13	0.8835~0.8865	0.885	0
0.8655~0.8685	0.867	16	0.8865~0.8895	0.888	1
0.8685~0.8715	0.870	21			
0.8715~0.8745	0.873	17	合 计		100

注：为了简化计算，这里省略了罗拉外径两位整数15。

以组距为单位，以每组的边界值为横坐标，以相应的组频数为纵坐标，则表2.1的频数分布可以作成直方图，如图2.1所示。如果以组距为单位，以组频率为纵坐标，则图中矩形(底为1)的面积等于相应的组频率 v_j/n 。当 n 很大时，组频率近似地等于随机变量的取值落在该组中的概率。组概率就是密度函数 $f(x)$ 在该组区间上的积分。因此直方图上的周线给出密度

曲线的近似表示。图2.1还绘有相应总体的正态密度曲线。

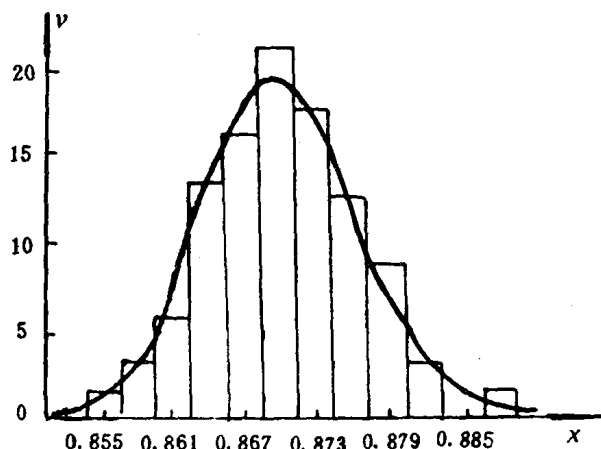


图2.1 罗拉外径的直方图和正态曲线

§ 2.3 样本的数字特征

对于给定的样本值 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 有了样本分布函数或频数分布后, 就可以按照规律计算各种数字特征, 如矩、偏度系数和峰度系数等。样本的第 ν 阶原点矩为

$$a_\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

它是样本值的第 ν 次幂的平均值。特别, 当 $\nu = 1$ 时就得样本平均值, 记为 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$; 同样, 样本的第 ν 阶中心矩为

$$m_\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

当 $\nu = 2$ 时, 得到样本方差, 记为 ξ^2 。

同样的规则可应用于从多维总体抽取的样本。例如从二维总体中取得 n 对观测值 $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, 我们记

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_i x_i, & \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_i y_i \\ m_{20} = \xi_1^2 &= \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \\ m_{11} = r \xi_1 \xi_2 &= \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ m_{02} = \xi_2^2 &= \frac{1}{n} \sum_i (y_i - \bar{y})^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

特别地, 由关系式

$$r = m_{11} / (\xi_1 \xi_2) \quad (2.5)$$

所定义的量 r 是样本的相关系数 ($-1 \leq r \leq 1$)。当所有的样本点 (x_i, y_i) 位于直线上时, $r = \pm 1$ 。

若样本值的范围较大且频数较多, 则应用以上公式计算样本的数字特征甚繁。这时可将样本值进行适当分组, 用组中值代替该组的所有样本值进行近似计算。例如将样本值分成 k

组, 则样本平均值和方差可用下式来计算:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k x_j v_j$$

$$\zeta^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x})^2 v_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k x_j^2 v_j - \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k x_j v_j \right)^2 \quad (2.6)$$

在等组距分组的情况下, 样本矩的计算还可简化。其法是引进新变量 u , 使该变量的取值 u_j 是以适当选择的组中值 x_0 为原点(通常选择接近于 $\bar{x}$ 的组中值作为 x_0), 以组距 c 为单位的数值, 即 $u_j = (x_j - x_0)/c$ 。将 $x_j = cu_j + x_0$ 代入(2.6)式, 得

$$\bar{x} = c\bar{u} + x_0, \quad \zeta^2 = c^2(\bar{u}^2 - \bar{u}^3) \quad (2.7)$$

这里 $\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k u_j v_j, \quad \bar{u}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k u_j^2 v_j,$

同样, 样本的三阶和四阶中心矩的计算也可分别简化为

$$m_3 = c^3(\bar{u}^3 - 3\bar{u}^2\bar{u} + 2\bar{u}^3)$$

和 $m_4 = c^4(\bar{u}^4 - 4\bar{u}^3\bar{u} + 6\bar{u}^2\bar{u}^2 - 3\bar{u}^4) \quad (2.8)$

由此即可计算样本的偏度系数和峰度系数分别为

$$g_1 = \frac{m_3}{\zeta^3} \quad \text{和} \quad g_2 = \frac{m_4}{\zeta^4} - 3 \quad (2.9)$$

现仍以表2.1的数据为例, 取 $x_0 = 0.870$, 这里 $c = 0.003$, 有关罗拉外径各阶矩的计算如表2.2所示。

表 2.2 罗拉外径各阶矩的计算

组中值 x	$u = \frac{x - x_0}{c}$	v	uv	u^2v	u^3v	u^4v
0.855	-5	1	-3	25	-125	625
0.858	-4	3	-12	48	-192	768
0.861	-3	5	-15	45	-135	405
0.864	-2	13	-26	52	-104	208
0.867	-1	16	-16	16	-16	16
0.870	0	21	0	0	0	0
0.873	1	17	17	17	17	17
0.876	2	12	24	48	96	192
0.879	3	8	24	72	216	648
0.882	4	3	12	48	192	768
0.885	5	0	0	0	0	0
0.888	6	1	6	36	216	1296
合 计		100	9	407	165	4943

经计算, 得到

$$\bar{x} = 0.003 \times \frac{9}{100} + 0.870 = 0.8703 \text{ (毫米)}$$