高等数学

第四册

主　编　杜先能
副主编　顾荣宝　黄仿伦

安徽大学出版社

安徽大学重点建设课程教材

高等数学

（第四册）

主　编　杜先能

副主编　顾荣宝　黄仿伦

编　者　杜先能　顾荣宝

　　　　黄仿伦　雍锡琪

　　　　何江宏

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/杜先能主编. -合肥:安徽大学出版社,1999.9

ISBN 7-81052-276-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.杜…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 42581 号

高等数学(第四册)　　　　杜先能　主编

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号　邮编 230039)	**印　刷**	中国科技大学印刷厂
		开　本	850×1168　1/32
联系电话	总编室 0551-5107719	**印　张**	40.25
	发行部 0551-5107784	**字　数**	900 千
责任编辑	杨　冬	**版　次**	1999 年 9 月第 1 版
封面设计	孟献辉	**印　次**	1999 年 9 月第 1 次印刷
经　销	新华书店	**印　数**	1—5100 册

ISBN 7-81052-276-0/**O**·20　**全四册总定价**:52.40 **元**(**本册定价**:13.20 **元**)

内容提要

本书是综合性大学理工科非数学专业《高等数学》课程的通用教材，书中的内容系统、全面，定理的证明、公式的推导简洁、严谨。同时在每一章的最后，根据近几年的全国考研试题的类型与方向，精编了一部分综合习题作为提高之用。

全书分四册出版，第一册内容包括函数的极限与连续、一元函数微分学、积分学；第二册包括空间解析几何、多元函数微积分学；第三册包括无穷级数、线性代数；第四册包括常微分方程、概率论与数理统计。

本书可作理工科院校非数学专业或师范院校相关专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学。

编者的话

随着安徽大学进入全国二十一世纪重点建设的100所高等院校，安徽大学对基础教学提出了更高的要求，把《高等数学》作为学校重点建设课程之一。本书就是我们根据全国高等院校理工科《高等数学教学大纲》，并参考了《1999年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，为理工科院校非数学专业的学生而编写的。与国内、外同类教材相比，本书有如下特点：

1. 书中的内容系统、全面，书中定理的证明、公式的推导，我们总是尽可能地用最简洁、严谨的方法去证明，同时对于那些需要加深理解的概念及灵活掌握的方法，书中都配有大量的例题与习题。兼顾到一部分同学考研的需要，我们在每一章的最后，还根据近几年的全国考研试题的类型与方向，精编了一部分综合习题作为提高之用。初学时不必题题都做，更不要因为有几个题目做不出来而失去信心。

2. 我们把大多数理工科院校非数学专业《高等数学》五学期的课程(微积分(包括空间解析几何、常微分方程)三学期，线性代数、概率论与统计各一学期)压缩到四学期。本书分四册出版，每一学期讲授一册，第一册内容包括函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学；第二册包括空间解析几何、多元函数微分学、积分学；第三册包括无穷级数、线性代数；第四册包括常微分方程、概率论与数理统计。

3. 由于基本初等函数及性质在中学教材里已作详细讨论，所以我们只是简单提及一下，不再重复。

4. 我们以“有上界的实数集必有上确界”为公理建立极限理论，所涉及的定理（如Cauchy收敛准则，闭区间连续函数的性质，可积函数类的讨论等）都给以严格的论证。我们认为这些定理证明的方法对理解《高等数学》的内容是很有帮助的。

5. 为了加强学生综合运用所学的知识分析和解决实际应用问题能力，所以书中配有大量应用问题的实例与习题。

6. 根据国家标准对数学符号的统一要求，书中的正切函数、余切函数、反正切函数和反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示。

7. 在第四册的附录中编写了常用数学软件《Mathematica》、《Maple》和《Phaser》。

参加本书编写工作的有杜先能、顾荣宝、黄仿伦、雍锡琪、何江宏等。第一册由黄仿伦编写，第二册由顾荣宝编写，第三册的第7章由黄仿伦编写、第8章由杜先能编写，其余各章由雍锡琪编写，第四册常微分方程部分由顾荣宝编写，概率论与数理统计部分由何江宏编写，最后由黄仿伦协调统稿。另外，感谢盛立人教授为我们编写了第四册的附录《常用数学软件》。胡舒合教授审阅了全书。在编写本书的过程中，得到了安徽大学教务处和数学系的大力支持，许多教师对本书的写作提出了宝贵的意见，安徽大学出版社为本书的出版作了大量的工作，作者谨在此对他们表示诚挚的感谢。

在编写本书的过程中，我们参考了国内外许多同类教材，在此恕不一一列名致谢。

由于编者水平有限，加上编写时间仓促，书中一定存在不妥之处，敬请读者批评、指正。

编　者

一九九九年七月

目　次

编者的话 …… 1
第 11 章　常微分方程 …… 1
　§11.1　一阶常微分方程 …… 1
　　1. 微分方程的基本概念 …… 1
　　2. 可分离变量方程 …… 4
　　3. 齐次方程 …… 9
　　4. 一阶线性微分方程 …… 17
　　5. 全微分方程 …… 24
　　6. 一阶隐式微分方程 …… 30
　　7. 一阶微分方程的近似解法——欧拉折线法 …… 37
　　8. 解的存在唯一性定理 …… 43
　　习题§11.1 …… 49
　§11.2　高阶微分方程 …… 53
　　1. 可降阶的高阶微分方程 …… 53
　　2. 线性微分方程的一般理论 …… 62
　　3. 二阶线性方程的求解 …… 71
　　4. 二阶常系数齐次线性方程 …… 79
　　5. 常系数非齐次线性方程比较系数法 …… 84

6. 欧拉方程,质点的振动………………………… 90
7. 微分方程组 ……………………………………… 98
习题§11.2 …………………………………………… 105
第11章综合习题 ……………………………………… 109
第12章 随机事件与概率 …………………………… 113
§12.1 概率的基本概念…………………………… 113
1. 随机试验……………………………………… 114
2. 随机事件、样本空间 ………………………… 115
3. 频率与概率…………………………………… 118
习题§12.1 …………………………………………… 123
§12.2 古典型概率………………………………… 124
1. 古典型概率的计算…………………………… 126
2. 几何概率……………………………………… 132
习题§12.2 …………………………………………… 135
§12.3 条件概率、乘法公式、全概率公式及
贝叶斯公式……………………………………… 136
1. 条件概率与乘法公式………………………… 136
2. 全概率公式…………………………………… 139
3. 贝叶斯公式…………………………………… 140
习题§12.3 …………………………………………… 142
§12.4 事件的独立性……………………………… 144
习题§12.4 …………………………………………… 148
第12章综合习题 ……………………………………… 150
第13章 随机变量及其概率分布 …………………… 154
§13.1 一维随机变量及其分布函数……………… 154
1. 随机变量的定义……………………………… 154
2. 随机变量的分布函数………………………… 155
3. 离散型随机变量……………………………… 157

4. 连续型随机变量…………………………………… 164
5. 随机变量函数的概率分布……………………… 169
习题§13.1 ……………………………………… 173
§13.2 二维随机变量及其概率分布……………………… 178
1. 二维随机变量及其联合(概率)分布………… 178
2. 边际分布……………………………………… 183
3. 条件分布……………………………………… 186
4. 随机变量的独立性…………………………… 188
5. 二维随机变量函数的分布…………………… 189
习题§13.2 ……………………………………… 196
第13章综合习题 ……………………………………… 201
第14章 随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理 ………………………… 204
§14.1 随机变量的数字特征……………………………… 204
1. 随机变量的数学期望………………………… 204
2. 随机变量的方差……………………………… 210
3. 协方差及相关系数…………………………… 215
4. 矩、协方差矩阵 ……………………………… 220
习题§14.1 ……………………………………… 222
§14.2 大数定律和中心极限定理………………………… 227
1. 大数定律……………………………………… 227
2. 中心极限定理………………………………… 230
习题§14.2 ……………………………………… 235
第14章综合习题 ……………………………………… 237
第15章 数理统计初步 ……………………………… 240
§15.1 样本及其分布……………………………………… 240
1. 随机样本和统计量…………………………… 240
2. 抽样分布……………………………………… 245

习题 § 15.1 …… 253
§ 15.2 参数估计 …… 254
1. 点估计 …… 254
2. 估计量的评选标准 …… 261
3. 区间估计 …… 264
4. 单侧置信区间 …… 276
习题 § 15.2 …… 278
§ 15.3 假设检验 …… 283
1. 假设检验 …… 283
2. 一个正态总体的假设检验 …… 287
3. 两个正态总体的假设检验 …… 294
4. 大样本未知参数的检验 …… 298
5. 分布拟合检验 …… 302
习题 § 15.3 …… 305
第 15 章综合习题 …… 308
附表：
1. 几种常用的概率分布 …… 310
2. 标准正态分布表 …… 313
3. 泊松分布表 …… 314
4. t 分布表 …… 316
5. χ^2 分布表 …… 317
6. F 分布表 …… 319
附录：
数学软件 …… 328
习题答案 …… 343

第 11 章

常微分方程

微积分中所研究的函数是反映客观现实世界运动过程中量与量之间的一种关系.但是在大量实际问题中遇到稍微复杂一些运动过程时,反映运动规律的量与量之间的关系(即函数)往往不能直接写出来,却比较容易地建立起这些变量和它们的导数或微分之间的关系式,我们称之为微分方程.有了微分方程以后,我们通过某种方法求出未知函数,这就是解微分方程.

微分方程是数学的一个重要分支,是数学理论联系实际问题的一个重要途径.本章介绍微分方程的一些基本概念以及几类常见微分方程的基本解法.

§11.1 一阶常微分方程

1. 微分方程的基本概念

我们先来看几个具体的例子.

例 1 已知曲线通过点(1,2),并且在该曲线上任一点(x,y)处的切线的斜率为$2x$,求这曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为$y=f(x)$,根据导数的几何意义,所求曲线$y=f(x)$应当满足关系式

$$\frac{dy}{dx}=2x \tag{1.1}$$

即 $y'=2x$，通过积分求解

$$y=x^2+C \tag{1.2}$$

其中 C 是任意常数. 再由条件 $f(1)=2$ 求得 $C=1$. 于是得到所求曲线方程为

$$y=x^2+1$$

例 2 设一质量为 m 的物体在重力作用下自由下落. 已知初始速度为 v_0，求该物体下落的运动方程.

解 设 s 为物体下落的位置距起始位置之间的距离，t 表示下落的时间，根据牛顿第二定律知：$F=ma=m\frac{d^2s}{dt^2}$. 由于物体仅受重力 mg 的作用（不计空气阻力），于是物体下落距离 s 与时间 t 的关系 $s(t)$ 应满足

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g \tag{1.3}$$

此外，$s(t)$ 还应当满足初始状态的条件：

$$s(0)=0, \quad s'(0)=v(0)=v_0 \tag{1.4}$$

由(1.3)式，两边对 t 积分一次，得

$$v=s'=gt+C_1$$

再积分一次，得

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{1.5}$$

其中 C_1,C_2 是两个独立的任意常数.

根据(1.4)式求得 $C_1=v_0,C_2=0$. 于是所求物体下落的运动规律为

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t$$

在上面两个例子中，关系式(1.1)和(1.3)都含有未知函数的导数，它们都是微分方程. 一般地，我们把联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数的关系式称为**微分方程**. 如果未知函数是一

元函数，我们称其为**常微分方程**；如果未知函数是多元函数，我们称其为**偏微分方程**. 方程(1.1)和(1.3)都是常微分方程. 而方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

与

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

都是偏微分方程. 本章只讨论常微分方程. 以后我们把常微分方程简称为微分方程或方程.

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数，称为微分方程的**阶**. 例如方程(1.1)是一阶微分方程；方程(1.3)是二阶微分方程；而方程

$$y'''-2xy'+y=\sin x$$

是三阶微分方程.

一般地，n 阶微分方程具有如下形式：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.6}$$

这里 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$是 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$的已知函数，而且一定含有 $y^{(n)}$；y 是未知函数；x 是自变量.

如果把某个函数代入微分方程(1.6)后，能使它变为恒等式，则称这函数为微分方程(1.6)的**解**(**或积分**). 如果微分方程的解中含有独立的任意常数的个数等于这方程的阶数，则称此解为微分方程的**通解**(**或通积分**). 从通解中取定任意常数的一组值所得到的解，称为微分方程的**特解**. 例如，$y=x^2+C$ 和 $s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 分别是方程(1.1)和(1.3)的通解；$y=x^2+1$ 和 $s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t$ 分别是方程(1.1)和(1.3)的特解.

为了确定微分方程的一个特解，我们通常给出这个解所必需满足的条件，这就是所谓的**定解条件**. 常见的定解条件是**初始条**

件. n 阶微分方程(1.6)的初始条件是指如下的 n 个条件:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

其中 $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$是 n 个给定的常数.

求微分方程满足定解条件的解,就是所谓的**定解问题**. 当定解条件为初始条件时,相应的定解问题又称为**初值问题**.

微分方程特解的几何图形称为**积分曲线**. 通解的几何图形称为**积分曲线族**.

例 3 验证函数

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x \quad (C_1、C_2\ 是任意常数)$$

是方程

$$y''+y=0$$

的解,并求满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的特解.

解 求 y 的导数

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x$$
$$y''=-C_1\cos x-C_2\sin x$$

将 y 及 y''代入原方程,得

$$-(C_1\cos x+C_2\sin x)+(C_1\cos x+C_2\sin x)\equiv 0$$

所以,函数 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 是所给方程的解. 由于其中的 C_1、C_2 为任意常数,故它还是方程的通解. 由初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 得到 $C_1=1, C_2=0$. 因此所求的特解为

$$y=\cos t$$

2. 可分离变量方程

从本段开始,我们来讨论一阶微分方程的初等解法,即把微分方程的求解问题化为积分问题.

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0 \tag{2.1}$$

如果能解出一阶导数 y',则有形式

$$y' = f(x, y) \tag{2.2}$$

如果 $f(x,y)$ 可以表示成 x 的函数与 y 的函数的乘积，即 $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$，则一阶微分方程(2.2)有如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x)\psi(y) \tag{2.3}$$

称这一阶方程为**可分离变量方程**.

假设 $\varphi(x)$，$\psi(y)$ 分别是 x 和 y 的连续函数，如果 $\psi(y)\neq 0$，我们将(2.3)式改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\varphi(x)\mathrm{d}x$$

这样，就把微分方程化为一端只含 y 的函数与 $\mathrm{d}y$，另一端只含 x 的函数与 $\mathrm{d}x$. 于是两边分别求积分，得到

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\int\varphi(x)\mathrm{d}x+C \tag{2.4}$$

这里我们把积分常数 C 明确写出来，而把不定积分只表示其被积函数的某一个原函数.

把(2.4)式作为确定 y 是 x 的隐函数的关系式，它是方程(2.3)的隐式解，又由于关系式(2.4)中含有一个任意常数，因此(2.4)式所确定的隐函数是方程(2.3)的通解.

如果存在某 y_0，使得 $\psi(y_0)=0$，直接代入方程(2.3)验证可知，$y=y_0$ 也是方程(2.3)的解. 注意，这个解 $y=y_0$ 有可能不包含在方程(2.3)的通解(2.4)中，必须另外补上.

例 1 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}$$

解 当 $y\neq 0$ 时，方程可分离变量为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分，得

$$\ln|y|=\ln|x|+C_1,\quad (C_1\text{ 为任意常数})$$

或

$$\ln|y|=\ln|e^{C_1}x|$$

解出 y，得

$$y=\pm e^{C_1}x$$

若记 $C=\pm e^{C_1}$，则方程的通解为

$$y=Cx$$

其中 C 是不为零的任意常数.

此外，$y=0$ 也是方程的解. 在通解中若允许 C 取零则可得到解 $y=0$. 因此，方程的通解为 $y=Cx$，C 为任意常数.

例 2 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=y^2\cos x$$

并求满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

解 当 $y\neq 0$ 时，将方程变量分离，得到

$$\frac{dy}{y^2}=\cos x dx$$

两边积分，得

$$-\frac{1}{y}=\sin x+C$$

因此，方程的通解为

$$y=-\frac{1}{\sin x+C}$$

其中 C 是任意常数.

此外，$y=0$ 也是方程的解，它不包括在上述通解中.

为了确定所求的特解，将 $x=0$，$y=1$ 代入通解中，求得 $C=-1$，因此所求的特解为

$$y=\frac{1}{1-\sin x}$$

可分离变量方程常常以微分的形式出现，即有以下形式：

$$M(x)N(y)\mathrm{d}x+P(x)Q(y)\mathrm{d}y=0 \tag{2.5}$$

这时 x 与 y 的地位是“平等”的，既可以视 x 为自变量而 y 为函数，也可以视 y 为自变量而 x 为函数.

若存在 y_0 使得 $N(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 是方程(2.5)的解；若存在 x_0 使得 $P(x_0)=0$，则 $x=x_0$ 是方程(2.5)的解；当 $N(y)\neq 0$ 且 $P(x)\neq 0$ 时，方程(2.5)可分离变量为

$$\frac{M(x)}{P(x)}\mathrm{d}x+\frac{Q(y)}{N(y)}\mathrm{d}y=0$$

两边积分可得通解

$$\int\frac{M(x)}{P(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{Q(y)}{N(y)}\mathrm{d}y=C$$

例 3 求解方程

$$x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0$$

解 首先容易看出 $y=\pm 1$，$x=\pm 1$ 为方程的解. 当 $y\neq\pm 1$ 且 $x\neq\pm 1$ 时，方程可分离变量为

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x^2-1}+\frac{y\mathrm{d}y}{y^2-1}=0$$

两边积分，得

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=\ln|C|$$

其中 C 是不为零的任意常数. 因此，方程的通解为

$$(x^2-1)(y^2-1)=C$$

注意到，通解中当 $C=0$ 时，得到解 $y=\pm 1$ 和 $x=\pm 1$. 所以，方程的通解为

$$(x^2-1)(y^2-1)=C$$

其中 C 为任意常数.

例 4 考虑人口增长模型. 在生存环境和粮食供给无限制的条件下，人口增长的速率与人口数量成正比. 如果用 y 表示人口数量，那么我们有微分方程