高等学校教学用书

大地重力学

武汉测绘学院天文与重力测量教研組編著

中国工业出版社

大地重力学是武汉測繪学院天文与重力测量教研組根据天文大地測量专业本科大地重力学教学大綱編写而成。本书在重力测量仪器、观测方法、以及重力测量在大地测量中的应用等方面詳細地着重地作了叙述，力求說理清楚，而对地球形状理論方面，只作了一般介紹。本书可作为天文大地专业本科和函授教材以及重力測量工作者的参考书。

本书第二次印刷曾作了必要訂正，并增补一节，介紹了我国新設計的計算模板。

大地重力学

武汉測繪学院天文与重力测量教研組編著

*

国家測繪总局測繪书刊編輯部編輯（北京三里河国家測繪总局）

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

北京市印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店經售

*

开本787×1092 1/16・印张$14^1/_2$・字数339,000

1961年7月北京第一版・1962年6月北京第二次印刷

印数1134—3203・定价（10-6）1.75元

*

統一书号：K15165・268(測繪-3)

目 录

大地重力学是武汉測繪学院天文与重力測量教研組根据天文大地測量专业本科大地重力学教学大綱編写而成。本书在重力測量仪器、观测方法、以及重力測量在大地測量中的应用等方面詳細地着重地作了叙述，力求說理清楚，而对地球形状理論方面，只作了一般介紹。本书可作为天文大地专业本科和函授教材以及重力測量工作者的参考书。

本书第二次印刷曾作了必要訂正，并增补一节，介紹了我国新設計的計算模板。

大地重力学

武汉測繪学院天文与重力測量教研組編著

*

国家測繪总局測繪书刊編輯部編輯（北京三里河国家測繪总局）

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

北京市印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本787×1092 1/16·印张$14^1/_2$·字数339,000

1961年7月北京第一版·1962年6月北京第二次印刷

印数1134—3203·定价（10-6）1.75元

*

統一书号：K15165·268(測繪-3)

原
书
缺
页

'fr155

序

大地重力学的內容包括重力測量、地球形狀理論基础和重力測量在大地測量中的应用三个方面，它和大地測量是密切相关的。

这是一本供高等学校天文大地測量專業本科学生和函授生用的教科書。本書是在1958年的教育革命运动以后，在党委的領导下，由天文与重力測量教研組管澤霖、方瑞首、宁津生等同志主編。在編写工作的开始先写成講义，在天文大地專業本科四、五年級中边用边改；并在教学中广泛吸收了学生的意見，然后加以修改和补充，始成定稿。

在整个教科書中，我們根据党的教育方針，刪去了陈旧而現在又不应用的理論，密切結合生产的需要，并注意到了这門学科新的發展方向。因此本書除了是一本教科書以外，还可作为重力測量工作者和科学研究人員的参考書。

我們考虑到这本書还可作为函授教材用，所以在文学叙述上力求詳細和清楚。

由于我們的水平和人力有限，因此在本書中难免有疏忽遺漏甚至錯誤之处，我們誠懇地希望讀者提出批評和指正，以便再版时修改补充。

編　著　者

1961年5月1日于武汉

目　录

第一章 緒 論

大地重力学是由重力測量及其在大地測量中的应用所組成的一門科学，因此它是大地測量学中不可分割的一部分。由于它所研究的許多問題具有一些特殊性質，而且所涉及的范圍也較广泛，例如說重力測量中的許多仪器和測量方法、地球形狀理論中所用到的数学中的位理論，保管这些問題和大地測量之間都存在着內在的联系，但是它和大地測量的具体內容还是不同的，所以我們必須研究这些特殊的問題，从中探討出它們和大地測量之間的关系。为了学習和研究方便起見，就將它从大地測量中分出来，成为一門独立的学科，称之为大地重力学。

大地重力学主要研究以下几个問題：

(1) 重力測量的仪器和測量方法；

(2) 地球形狀的基础理論；

(3) 用重力測量的方法归算大地測量数据的問題。

重力測量按照字义上来說就是"量測重力的数值"，所謂重力（用g来表示）就是地球的吸引力（用F来表示）和地球自轉而产生的离心力（用P来表示）的合力：

$$\bar{g}=\bar{F}+\bar{P}.$$

重力也和其他所有的力一样，它的測量單位为达因，也就是使1克的質量得到每秒为一厘米加速度的力；力的因次为[厘米][克][秒]$^{-2}$，如果被吸引質点的質量为1克时，則重力在数值上等于重力加速度，以后我們說測定重力，就是指測定重力加速度而言；其單位为伽（1厘米/秒^2），这是为了紀念世界上第一个測定重力加速度的伽里略而命名的。由于伽的單位太大，应用起来不方便；因此，以后我們便采用千分之一伽为單位，称为毫伽（或米厘伽）。

地球表面上某一点除了受重力的作用外，它还受着宇宙間其他星球的引力，同时地球的旋轉軸也不是固定的，因此重力还有一种广义的定义：即宇宙間全部物質对單位質点所产生的引力和該点随地球相对慣心运动而引起的作用力的合力。在这种定义下，地球上某一点的重力就随着天体的相对于地球的位置不同、地球瞬时旋轉軸的不同、地球旋轉角速度的变化等等而在改变。

在一、二十年以前，这样兩种定义的重力可以不加区别，因为它們之間的差值$\frac{g_{II}-g_{I}}{g_{II}(或g_{I})}\cong 3\cdot 10^{-7}$，而当时測定重力的誤差（約为$1\cdot 10^{-6}$）大于这个差值，可是現在由于測量重力的精度已經提高，可达$1\cdot 10^{-7}$甚至更高一些，因此有必要將这兩种重力的定义加以区别。

可是在許多种科学中要用到的多半是前一种定义的重力，在要求量測重力的精度較高的情况下，必須消除宇宙間其他星体对重力的影响；不过其中太陽和月亮的影响最大，其他天体的影响以及地球旋轉軸变化的影响仍然在观測精度以內；所以現在一般在重力观測値中，只加上日月引力改正。由于地球在自轉，重力点相对日月的位置随着时間在改变，則日月引力改正也就是时間的函数，在求这个改正值时，可以以观測时間（化为格林尼治

世界时）为引数，从日月引力改正諾模圖[50]中直接查得。

既然重力是地球吸引力和离心力的合力，那么可以应用与重力有关的各种物理現象来測定重力的数值：例如可以应用自由落体，根据物体的下落时間和距离来决定某点的重力值；应用振摆，量测它的摆动周期和摆長来决定这一点的重力值；或者在两点上只量测它的摆动周期来决定两点的重力差；另外也可以利用負荷彈簧的伸長，在两点上比較彈簧伸長的差数，求出两点的重力差。这些都是通常用来测定重力較为准确的方法。

从以上所講的几种方法来看，我們根据物体受力的性質和观测方法的不同，可以將它們分为动力法和靜力法兩种。

所謂动力法測定重力，就是观测物体的运动，量测它的运动时間而求得重力，例如自由落体和摆的摆动就屬于此类。

靜力法測定重力是观测物体受力的平衡，量测物体的位移求出重力，例如观测負荷彈簧的伸長等屬于此类。

根据我們所求得的重力数值，重力測量又分为絕对重力測定和相对重力測定，前者是測定某点重力的絕对值，后者則測出两点的重力差。靜力法只能用在相对重力測定上，而动力法在两种重力測量中均能应用。

自然界中的一切現象几乎都和重力有着密切联系，因此重力測量的应用范圍很广。例如在地球物理勘探中，由于地球岩層質量产生了牛頓引力場，所以可以根据地面上重力的变化情况去寻找矿床。在地球物理学中，可以利用重力測量的数据去测定地球的彈性。密度以及地壳的構造。在天体力学中，可以应用重力的数据去研究天体的运动。在大地測量中也要利用重力数据去归算观测成果和研究地球形狀。在近代技术中，計算火箭的运行軌道以及發射人造地球卫星，均离不开重力場的数据。

在本課程中主要研究重力測量在大地測量中的应用；我們知道，大地測量的科学研究目的就是求得地球形狀問題。在以前都是將地球表面当作一个不受任何扰动的靜止的海洋面，称为大地水准面，研究地球形狀就是指应用位理論研究大地水准面的形狀；但是这种方法存在着許多不可克服的缺点，因此在近百年来，苏联又提出了一整套利用天文、大地和重力測量資料研究地球眞正形狀的先进理論。

不管是研究大地水准面，还是地球眞正表面形狀，均須解决兩个問題：測定一个非常接近于大地水准面或地球眞正表面的橢圓体（即根据面）的扁率及大小，和它与地球的相对位置；其次研究大地水准面或地球眞正表面和橢圓体的相对关系。不过这些問題在本課程中只作一般性的介紹，而在"地球形狀学"中將詳細的研究。

大地測量的实用目的是建立高精度的天文-大地網作为各种用途測圖的控制。为此必須在地球表面上进行基綫、三角和水准測量。

在大地測量学中已經講过，为了求得地球表面上的大地坐标差，就必須在地球表面上进行基綫、三角和水准測量；这些測量数据都是以地面鉛垂綫方向（即重力方向）为依据。但我們在計算时，要选擇一个根据面，計算出各三角点相对这个根据面的坐标值，实質上这就是測定地球某一部份表面形狀的問題。

根据面的选擇是按照所研究的区域的大小来决定的。在小区域內測量时，可以以平面为計算根据面，在較大区域內，以球面或旋轉橢圓体为根据面。当进行大地位置計算时，就以这些根据面的法綫为依据，起初都假設鉛垂綫是它們的法綫，但由于生产上对大地測

量精度的要求日益提高，同时量测的仪器也大大改进了，因此大地測量的观測結果并不受到它本身量測精度的限制，而是受到在計算方法中上述許多假設的影响。这样就提出了一个問題：如何在計算方法中不加任何假設，眞正將观測成果根据法綫来进行計算。

所以現在的問題就在于將大地測量观測結果（基綫和角度）正确地归算到参考橢圓体上，这就必須知道观測点上由地球表面到橢圓体的距离（称为大地高）和用于归算水平方向的垂綫偏差的数值，因此必須解决下面几个問題：

（1）高程系統的問題：討論在精密水准測量中如何用重力測量資料將观測高度化算成正常高或正高（近似的）。

（2）計算高度異常的問題：要將基綫归算到参考橢圓体上就必須求出大地高，而大地高是正常高和高度異常之和，因此就要討論如何求出高度異常的問題。

（3）天文重力水准設計的問題：在計算高度異常时，需要重力測量的資料，所以就要討論如何最合理最經济的布置重力点，同时又能达到精度要求。

（4）垂綫偏差的計算問題：在前面已經講过为了將大地測量的观測結果归算到参考橢圓体上，必須求出垂綫偏差去改正观測方向，在有些三角点上(特别是山区)，这种垂綫偏差的数值是很大的。我們將要討論如何根据重力測量的資料求得垂綫偏差的方法和它的实际計算，以及如何布置为求垂綫偏差用的重力点。

（5）重力点点位測定的問題：由于对于它們的精度要求不高，特别是在重力点上測定重力的时間不長，所以就要研究如何快速測定重力点的平面坐标及高程。

（6）重力測量的計划及重力队的組織問題。

在解决以上几个問題时，要布置一定密度和精度的重力測量；建立重力網的原則和建立大地控制網的原則一样，也是由整体到局部，先建立高精度的控制網，然后逐級加密，这样避免系統誤差的积累。

重力点分为下列几等：

基本点（A 等点）　点間的距离为 500～1000 公里。它們相对于基准点的誤差不超过 ± 0.3 毫伽。

一等点　点間的距离为 200～300 公里，它們相对于基准点的誤差不超过 ± 0.5 毫伽。

二等点　点間距离为 100～150 公里，它們相对于基准点的誤差不超过 ± 1.0 毫伽。

二等点以下的重力点要根据不同的要求来布置和加密，它們的精度与距离也是根据实际需要而定。

复 習 題

1. 什么是重力？它的單位是什么？
2. 重力測量按其測量方法和測定結果可以分成几类？
3. 重力網的布網原則是什么？

第二章 絶对重力測量

§ 2-1 絕对重力測量的原理

在緒論中已經講过，按照重力測量的結果可以將它分为兩类；一类叫絕对重力測量，它是直接測出地球表面上某一点的重力值；另一类叫相对重力測量，它是測出地球表面上某兩点之間的重力差。絕对重力測量只能采用动力法来測定，在历史上有着許多測定的方法，但是較广泛采用的只是下面兩种：

（一）利用自由落体的原理；

（二）利用振摆的原理。

現在我們就分别地对这兩种原理加以叙述。

（一）利用自由落体的原理測定重力

在物理学中，自由落体的方程式为：

$$h_i=h_0+v_0t_i+\frac{1}{2}gt_i^2 \tag{2-1}$$

式中 t_i 为自由落体下落的某一时間；

h_i为自由落体在 t_i 瞬間的下落距离；

v_0为自由落体的下落初速度，它是常数；

h_0为自由落体的起始高度，它是常数；

g 为自由落体的重力加速度。

根据自由落体在不同的时間 t_i 时所下落的距离 h_i，列出一組方程（2-1)，当方程式的个数多于未知数的个数时(在这里是三个未知数 h_0、v_0 及 g)，可以用最小二乘法的原理解算出 g 的最或是值。

以上只是講了这种方法的原理，至于自由落体的下落时間及下落距离如何具体的进行量測，这是一个困难而又复杂的問題；在很早以前曾經有人采用过这种方法，但由于当时設备簡陋及不可能精确的測出很短的下落时間段，以后就漸漸地不用它了。但是在近代的絕对重力測量中，又对这种方法所用的仪器加以改进，同时現在已有可能很精确的測出很短的下落时間段，因此它又有着一定的發展前途，后面我們还要詳細的講到它。

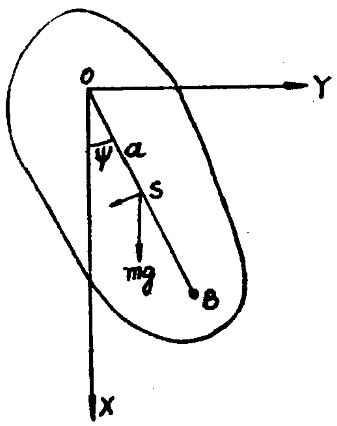

圖 2-1

（二）利用振摆理論測定絕对重力

用来測定重力的振摆是物理摆（又称为复摆)，它是一个剛体，悬掛在 O 点上(圖 2-1)。設 S 为摆的重心，a 是重心到悬掛点 O 的距离，ψ 是任意时刻时 OS 与 OX 軸的夾角；称之为偏角，m为振摆的質量。

这个物理摆在重力分力 $mg\sin\psi$ 的作用下，繞着过 O 点而与圖面垂直的固定軸摆动。在物理学中，物体繞固定軸摆

动的运动方程式为：

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z \tag{2-2}$$

式中 J_z 为物理摆对固定軸 Z 的轉动慣量；

ω 为旋轉角速度，即

$$\omega = -\frac{d\psi}{dt} \tag{2-3}$$

上式中的負号是因为物理摆偏离 x 軸越大（即 ψ 增加），角速度逐漸減小。

M_z 为重力分力对 Z 軸所产生的力距，即

$$M_z = mga \sin\psi \tag{2-4}$$

將（2-3）和（2-4）式代入（2-2）式，則得

$$-J_z \frac{d^2\psi}{dt^2} = mga \sin\psi$$

用 l 来表示 $\frac{J_z}{am}$，則上式可改写成

$$-\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{g}{l} \sin\psi \tag{2-5}$$

將上式左边乘上 $2\frac{d\psi}{dt}dt$，將右边乘上 $2d\psi$，則

$$2\frac{d^2\psi}{dt^2} \cdot \frac{d\psi}{dt}dt = -2\frac{g}{l} \sin\psi d\psi$$

將上式兩边同时积分，得

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l} \cos\psi + C \tag{2-6}$$

在上式中，求积分常数 C 时，設 $t=O$，則 $\psi=\alpha$；α 即为 OS 相对于 X 軸的最大偏角，称之为摆幅，那么在这时的角速度 $\omega = -\frac{d\psi}{dt} = 0$；將这些数值代入上式，則常数 C 为

$$C = -2\frac{g}{l} \cos\alpha$$

再將 C 的数值代入（2-6）式，得

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\psi - \cos\alpha) \tag{2-7}$$

我們知道，角速度的平方是不会等于負值的，因此只有在 $\cos\psi \geqslant \cos\alpha$ 时上式才有意义。

摆的摆幅由 $+\alpha$ 的位置摆动到 $-\alpha$ 的位置所需的时間 T，称之为周期（这里周期的定义与物理学中不同，它比物理学中的周期小一半），由（2-7）式可以求得

$$T = \int_0^T dt = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}} \tag{2-8}$$

將上式中的 $\cos\psi$ 及 $\cos\alpha$ 化成半角正弦，即

$$\cos\psi = 1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2};$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

并代入（2-8）式，再將常数提到积分符号外面来，則得

$$T=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\psi}{2}}} \tag{2-9}$$

在計算上面这个积分时，首先要將积分变数改变一下，設

$$\sin\frac{\psi}{2}=K\sin\varphi \tag{2-10}$$

$$K=\sin\frac{\alpha}{2}$$

因为当 ψ 角为最大值时，它等于 α，而在一般的情况下 ψ 总是小于 α，也就是說 $\sin\frac{\psi}{2}$ 值最大等于 $\sin\frac{\alpha}{2}$，一般都是 $\sin\frac{\psi}{2}<\sin\frac{\alpha}{2}$，所以上面这样的假設是合理的，我們將(2-10)式两边微分，則得

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\psi}{2}d\psi=K\cos\varphi\, d\varphi$$

即
$$d\psi=\frac{2K\cos\varphi}{\cos\frac{\psi}{2}}d\varphi=\frac{2K\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\psi}{2}}}=\frac{2K\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}}$$

將(2—10)式和上式一併代入（2-9）式中，則得

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}}$$

在上式中，积分上下限是这样改变的：根据（2-10）式，

当 $\psi=-\alpha$ 时，$-\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$，則 $\sin\varphi=-1$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$；

当 $\psi=+\alpha$ 时，$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$，則 $\sin\varphi=+1$，所以 $\varphi=+\frac{\pi}{2}$。

將被积函数由 $-\frac{\pi}{2}$ 积到 $\frac{\pi}{2}$ 所得的积分值是由 O 积到 $\frac{\pi}{2}$ 所得的积分值的两倍，故上面的积分可写为：

$$T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}} \tag{2-11}$$

(2-11)式称为第一类橢圓积分，假設 α 是一个很小的数值，那么可以將上式的被积函数展开成級数，然后逐項积分，即

$$\frac{1}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}}=1+\frac{1}{2}K^2\sin^2\varphi+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}K^4\sin^4\varphi+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}K^{2n}\sin^{2n}\varphi$$

又因为
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi d\varphi=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{\pi}{2}，（2n是一个偶整数）$$