

高等学校教学用书

大地重力学

武汉测绘学院天文与重力测量教研组编著



中国工业出版社

大地重力学是武汉測繪学院天文与重力測量教研組根据天文大地測量专业本科大地重力学教学大綱編写而成。本书在重力測量仪器、觀測方法、以及重力測量在大地測量中的应用等方面詳細地着重地作了叙述，力求說理清楚，而对地球形状理論方面，只作了一般介紹。本书可作为天文大地专业本科和函授教材以及重力測量工作者的参考书。

本书第二次印刷曾作了必要訂正，并增补一节，介紹了我国新設計的計算模板。

大地重力学

武汉測繪学院天文与重力測量教研組編著

*

国家測繪总局測繪书刊編輯部編輯（北京三里河国家測繪总局）

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 110 号

北京市印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本787×10921/16·印张14¹/₂·字数339,000

1961年7月北京第一版·1962年6月北京第二次印刷

印数1134—3203·定价（10-6）1.75元

*

統一书号：K15165·268(測繪-3)

118

12

83

目 录

第一章 緒論	7
复習題	9
第二章 絕對重力測量	10
§ 2-1 絕對重力測量的原理	10
§ 2-2 用振擺測定絕對重力的精度要求	14
§ 2-3 可倒擺	14
§ 2-4 符合法測定周期	17
§ 2-5 外界因素对周期的影响	18
§ 2-6 現代測定絕對重力的方法	21
§ 2-7 世界重力基点	24
复習題	25
第三章 用摆仪測定相对重力	26
§ 3-1 相对重力測量的原理	26
§ 3-2 摆仪的構造	27
§ 3-3 攝影記錄儀的構造	31
§ 3-4 攝影記錄儀的安置和調整	35
§ 3-5 量測周期	36
§ 3-6 外界因素影响的計算	42
§ 3-7 用光学符合儀測定周期	47
§ 3-8 精度估算及重力差的計算	50
§ 3-9 摆仪的檢定	51
§ 3-10 彈性摆	52
§ 3-11 摆仪的新發展	54
复習題	56
第四章 用重力仪測定相对重力	57
§ 4-1 重力仪的分类	57
§ 4-2 諾伽重力仪的原理	58
§ 4-3 諾伽重力仪的構造	61
§ 4-4 諾伽重力仪的計算公式和工作用表	65
§ 4-5 重力仪比例系数的檢定	72
§ 4-6 諾伽重力仪的溫度系数及零点重力值的測定	76
§ 4-7 重力仪的零点位移	77
§ 4-8 諾伽重力仪的水准管校正和測量范围的調整	78
§ 4-9 諾伽重力仪的野外觀測	80
§ 4-10 諾伽重力仪的觀測成果整理	82
§ 4-11 重力仪觀測成果的精度估算和重力網的平整	84
§ 4-12 CH-3 和 ГАЭ-3 重力仪	90

§ 4-13	ГAK-3M 重力仪	92
§ 4-14	ГВ-52 重力一测高仪	95
§ 4-15	GS-11 重力仪	97
§ 4-16	武登重力仪	99
§ 4-17	弦重力仪	100
§ 4-18	外界因素对重力仪的影响及其消除方法	101
§ 4-19	重力仪的灵敏度	103
	复習題	105
第五章	海洋重力測量	106
§ 5-1	一般概述	106
§ 5-2	用摆仪测定海上重力	106
§ 5-3	海洋重力測量中所用的重力仪	110
	复習題	112
第六章	引力位的理論基础	113
§ 6-1	引力及引力位	113
§ 6-2	引力位的物理性質	117
§ 6-3	引力位水准面	118
§ 6-4	球層对內部点及外部点的位	119
§ 6-5	球壳及球体对內部点及外部点的位	121
§ 6-6	平面層对外部点的引力	123
§ 6-7	空心圆柱体的引力	124
§ 6-8	拉伯拉斯及布阿柔方程式	125
§ 6-9	引力位性質的总结	126
§ 6-10	离心力及离心力位	127
§ 6-11	重力及重力位	128
	复習題	129
第七章	調整后地球形状的概念	130
§ 7-1	重力位的級数展开	130
§ 7-2	克萊饒定理	133
§ 7-3	正常重力公式	136
§ 7-4	斯托克司定理的一般概念	137
§ 7-5	求調整后地球形状的概念; 斯托克司及維宁·曼尼茲公式	138
§ 7-6	重力測量的归算	140
§ 7-7	各种重力归算的比較	146
	复習題	147
第八章	真正地球形状的原理	149
§ 8-1	研究真正地球形状的概念	149
§ 8-2	重力綫的弯曲	150
§ 8-3	正常重力場坐标及大地測量坐标系統	151
§ 8-4	正常高及高度異常	152
§ 8-5	垂綫偏差	154
§ 8-6	莫洛金斯基理論	156

§ 8-7	莫洛金斯基理論和斯托克司理論的比較	157
§ 8-8	利用人造地球卫星求地球形状的概念	158
	复习題	160
第九章	区域性地球形状的研究	161
§ 9-1	区域性地球形状的概念	161
§ 9-2	求大地高的方法	162
§ 9-3	根据几何水准計算正常高	164
§ 9-4	重力异常图和間接內插法	167
§ 9-5	正常高算例	168
§ 9-6	正高	172
§ 9-7	力高	175
§ 9-8	天文水准	176
§ 9-9	天文重力水准的原理	178
§ 9-10	天文重力水准的公式	180
§ 9-11	短距离天文重力水准的实用公式	180
	复习題	181
第十章	区域性重力測量的設計	183
§ 10-1	重力測量誤差	183
§ 10-2	天文重力水准对垂线偏差誤差的要求	184
§ 10-3	天文重力水准所需要的加密重力測量区域的半径	186
§ 10-4	均匀重力測量誤差对垂线偏差的影响	187
§ 10-5	加密重力測量的設計	189
§ 10-6	加密重力測量設計算例	195
§ 10-7	加密重力点的具体布置方法	198
	复习題	199
第十一章	重力測量的組織及点位測定	200
§ 11-1	重力点的分类和布置	200
§ 11-2	重力測量的組織及計劃的一般情况	201
§ 11-3	重力点点位的精度要求	202
§ 11-4	重力点平面位置的測定方法	203
§ 11-5	重力点高程的測定方法	206
	复习題	210
第十二章	垂线偏差及高度異常的計算	211
§ 12-1	計算垂线偏差的模板	211
§ 12-2	垂线偏差的算例	216
§ 12-3	內插垂线偏差的方法	219
§ 12-4	計算高度異常差的莫洛金斯基模板	221
§ 12-5	計算高度異常差的方俊模板	225
	复习題	227
第十三章	发展史	229

大地重力学是武汉測繪学院天文与重力測量教研組根据天文大地測量专业本科大地重力学教学大綱編写而成。本书在重力測量仪器、觀測方法、以及重力測量在大地測量中的应用等方面詳細地着重地作了叙述，力求說理清楚，而对地球形状理論方面，只作了一般介紹。本书可作为天文大地专业本科和函授教材以及重力測量工作者的参考书。

本书第二次印刷曾作了必要訂正，并增补一节，介紹了我国新設計的計算模板。

大地重力学

武汉測繪学院天文与重力測量教研組編著

*

国家測繪总局測繪书刊編輯部編輯（北京三里河国家測繪总局）

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

北京市印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本787×1092¹/₁₆·印张14¹/₂·字数339,000

1961年7月北京第一版·1962年6月北京第二次印刷

印数1134—3203·定价（10-6）1.75元

*

統一书号：K15165·268(測繪-3)

原
书
缺
页

81155

序

大地重力学的内容包括重力测量、地球形状理论基础和重力测量在大地测量中的应用三个方面，它和大地测量是密切相关的。

这是一本供高等学校天文大地测量专业本科学生和函授生用的教科书。本书是在1958年的教育革命运动以后，在党委的领导下，由天文与重力测量教研组管泽霖、方瑞首、宁津生等同志主编。在编写工作的开始先写成讲义，在天文大地专业本科四、五年級申边用边改；并在教学中广泛吸收了学生的意见，然后加以修改和补充，始成定稿。

在整个教科书中，我们根据党的教育方针，删去了陈旧而现在又不应用的理论，密切结合生产的需要，并注意到了这门学科新的发展方向。因此本书除了是一本教科书以外，还可作为重力测量工作者和科学研究人员的参考书。

我们考虑到这本书还可作为函授教材用，所以在文学叙述上力求详细和清楚。

由于我们的水平和人力有限，因此在本书中难免有疏忽遗漏甚至错误之处，我们诚恳地希望读者提出批评和指正，以便再版时修改补充。

編 著 者

1961年5月1日于武汉

目 录

第一章 緒論	7
复習題	9
第二章 絕對重力測量	10
§ 2-1 絕對重力測量的原理	10
§ 2-2 用振擺測定絕對重力的精度要求	14
§ 2-3 可倒擺	14
§ 2-4 符合法測定周期	17
§ 2-5 外界因素对周期的影响	18
§ 2-6 現代測定絕對重力的方法	21
§ 2-7 世界重力基点	24
复習題	25
第三章 用摆仪測定相对重力	26
§ 3-1 相对重力測量的原理	26
§ 3-2 摆仪的構造	27
§ 3-3 攝影記錄儀的構造	31
§ 3-4 攝影記錄儀的安置和調整	35
§ 3-5 量測周期	36
§ 3-6 外界因素影响的計算	42
§ 3-7 用光学符合儀測定周期	47
§ 3-8 精度估算及重力差的計算	50
§ 3-9 摆仪的檢定	51
§ 3-10 彈性摆	52
§ 3-11 摆仪的新發展	54
复習題	56
第四章 用重力仪測定相对重力	57
§ 4-1 重力仪的分类	57
§ 4-2 諾伽重力仪的原理	58
§ 4-3 諾伽重力仪的構造	61
§ 4-4 諾伽重力仪的計算公式和工作用表	65
§ 4-5 重力仪比例系数的檢定	72
§ 4-6 諾伽重力仪的溫度系数及零点重力值的測定	76
§ 4-7 重力仪的零点位移	77
§ 4-8 諾伽重力仪的水准管校正和測量范围的調整	78
§ 4-9 諾伽重力仪的野外觀測	80
§ 4-10 諾伽重力仪的觀測成果整理	82
§ 4-11 重力仪觀測成果的精度估算和重力網的平整	84
§ 4-12 CH-3 和 ГАЭ-3 重力仪	90

§ 4-13	ГAK-3M 重力仪	92
§ 4-14	ГВ-52 重力一测高仪	95
§ 4-15	GS-11 重力仪	97
§ 4-16	武登重力仪	99
§ 4-17	弦重力仪	100
§ 4-18	外界因素对重力仪的影响及其消除方法	101
§ 4-19	重力仪的灵敏度	103
	复習題	105
第五章	海洋重力測量	106
§ 5-1	一般概述	106
§ 5-2	用摆仪测定海上重力	106
§ 5-3	海洋重力測量中所用的重力仪	110
	复習題	112
第六章	引力位的理論基础	113
§ 6-1	引力及引力位	113
§ 6-2	引力位的物理性質	117
§ 6-3	引力位水准面	118
§ 6-4	球層对內部点及外部点的位	119
§ 6-5	球壳及球体对內部点及外部点的位	121
§ 6-6	平面層对外部点的引力	123
§ 6-7	空心圆柱体的引力	124
§ 6-8	拉伯拉斯及布阿柔方程式	125
§ 6-9	引力位性質的总结	126
§ 6-10	离心力及离心力位	127
§ 6-11	重力及重力位	128
	复習題	129
第七章	調整后地球形状的概念	130
§ 7-1	重力位的級数展开	130
§ 7-2	克萊饒定理	133
§ 7-3	正常重力公式	136
§ 7-4	斯托克司定理的一般概念	137
§ 7-5	求調整后地球形状的概念; 斯托克司及維宁·曼尼茲公式	138
§ 7-6	重力測量的归算	140
§ 7-7	各种重力归算的比較	146
	复習題	147
第八章	真正地球形状的原理	149
§ 8-1	研究真正地球形状的概念	149
§ 8-2	重力綫的弯曲	150
§ 8-3	正常重力場坐标及大地測量坐标系統	151
§ 8-4	正常高及高度異常	152
§ 8-5	垂綫偏差	154
§ 8-6	莫洛金斯基理論	156

§ 8-7	莫洛金斯基理論和斯托克司理論的比較	157
§ 8-8	利用人造地球卫星求地球形状的概念	158
	复习題	160
第九章	区域性地球形状的研究	161
§ 9-1	区域性地球形状的概念	161
§ 9-2	求大地高的方法	162
§ 9-3	根据几何水准計算正常高	164
§ 9-4	重力异常图和間接內插法	167
§ 9-5	正常高算例	168
§ 9-6	正高	172
§ 9-7	力高	175
§ 9-8	天文水准	176
§ 9-9	天文重力水准的原理	178
§ 9-10	天文重力水准的公式	180
§ 9-11	短距离天文重力水准的实用公式	180
	复习題	181
第十章	区域性重力測量的設計	183
§ 10-1	重力測量誤差	183
§ 10-2	天文重力水准对垂线偏差誤差的要求	184
§ 10-3	天文重力水准所需要的加密重力測量区域的半径	186
§ 10-4	均匀重力測量誤差对垂线偏差的影响	187
§ 10-5	加密重力測量的設計	189
§ 10-6	加密重力測量設計算例	195
§ 10-7	加密重力点的具体布置方法	198
	复习題	199
第十一章	重力測量的組織及点位測定	200
§ 11-1	重力点的分类和布置	200
§ 11-2	重力測量的組織及計劃的一般情况	201
§ 11-3	重力点点位的精度要求	202
§ 11-4	重力点平面位置的測定方法	203
§ 11-5	重力点高程的測定方法	206
	复习題	210
第十二章	垂线偏差及高度異常的計算	211
§ 12-1	計算垂线偏差的模板	211
§ 12-2	垂线偏差的算例	216
§ 12-3	內插垂线偏差的方法	219
§ 12-4	計算高度異常差的莫洛金斯基模板	221
§ 12-5	計算高度異常差的方俊模板	225
	复习題	227
第十三章	发展史	229

第一章 緒 論

大地重力學是由重力測量及其在大地測量中的應用所組成的一門科學，因此它是大地測量學中不可分割的一部分。由於它所研究的許多問題具有一些特殊性質，而且所涉及的範圍也較廣泛，例如說重力測量中的許多儀器和測量方法、地球形狀理論中所用到的數學中的位理論，儘管這些問題和大地測量之間都存在着內在的聯繫，但是它和大地測量的具體內容還是不同的，所以我們必須研究這些特殊的問題，從中探討出它們和大地測量之間的关系。為了學習和研究方便起見，就將它從大地測量中分出來，成為一門獨立的學科，稱之為大地重力學。

大地重力學主要研究以下幾個問題：

- (1) 重力測量的儀器和測量方法；
- (2) 地球形狀的基本理論；
- (3) 用重力測量的方法歸算大地測量數據的問題。

重力測量按照字義上來說就是“量測重力的數值”，所謂重力（用 g 來表示）就是地球的吸引力（用 F 來表示）和地球自轉而產生的離心力（用 P 來表示）的合力：

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{P}.$$

重力也和其他所有的力一樣，它的測量單位為達因，也就是使 1 克的質量得到每秒為一厘米加速度的力；力的因次為 [厘米][克][秒]⁻²，如果被吸引質點的質量為 1 克時，則重力在數值上等於重力加速度，以後我們說測定重力，就是指測定重力加速度而言；其單位為伽（1 厘米/秒²），這是為了紀念世界上第一個測定重力加速度的伽里略而命名的。由於伽的單位太大，應用起來不方便；因此，以後我們便採用千分之一伽為單位，稱為毫伽（或米厘伽）。

地球表面上某一點除了受重力的作用外，它還受着宇宙間其他星球的引力，同時地球的旋轉軸也不是固定的，因此重力還有一種廣義的定義：即宇宙間全部物質對單位質點所產生的引力和該點隨地球相對慣性運動而引起的作用力的合力。在這種定義下，地球上某一點的重力就隨着天體的相對於地球的位置不同、地球瞬時旋轉軸的不同、地球旋轉角速度的變化等等而在改變。

在一、二十年以前，這樣兩種定義的重力可以不加區別，因為它們之間的差值 $\frac{g_{II} - g_I}{g_{II} \text{ (或 } g_I)} \cong 3 \cdot 10^{-7}$ ，而當時測定重力的誤差（約為 $1 \cdot 10^{-6}$ ）大於這個差值，可是現在由於測量重力的精度已經提高，可達 $1 \cdot 10^{-7}$ 甚至更高一些，因此有必要將這兩種重力的定義加以區別。

可是在許多種科學中要用到的多半是前一種定義的重力，在要求量測重力的精度較高的情況下，必須消除宇宙間其他星體對重力的影響；不過其中太陽和月亮的影響最大，其他天體的影響以及地球旋轉軸變化的影響仍然在觀測精度以內；所以現在一般在重力觀測值中，只加上日月引力改正。由於地球在自轉，重力點相對於日月的位置隨着時間在改變，則日月引力改正也就是時間的函數，在求這個改正值時，可以以觀測時間（化為格林尼治

世界时) 为引数, 从日月引力改正諸模圖[50]中直接查得。

既然重力是地球吸引力和离心力的合力, 那么可以应用与重力有关的各种物理現象来测定重力的数值: 例如可以应用自由落体, 根据物体的下落时间和距离来决定某点的重力值; 应用振摆, 量测它的摆动周期和摆長来决定这一点的重力值; 或者在兩点上只量测它的摆动周期来决定兩点的重力差; 另外也可以利用負荷彈簧的伸長, 在兩点上比較彈簧伸長的差数, 求出兩点的重力差。这些都是通常用来测定重力較為准确的方法。

从以上所講的几种方法来看, 我們根据物体受力的性質和观测方法的不同, 可以將它們分为动力法和靜力法兩種。

所謂动力法测定重力, 就是观测物体的运动, 量测它的运动時間而求得重力, 例如自由落体和摆的摆动就屬于此类。

靜力法测定重力是观测物体受力的平衡, 量测物体的位移求出重力, 例如观测負荷彈簧的伸長等屬于此类。

根据我們所求得的重力数值, 重力测量又分为絕對重力测定和相对重力测定, 前者是测定某点重力的絕對值, 后者則测出兩点的重力差。靜力法只能用在相对重力测定上, 而动力法在兩種重力测量中均能应用。

自然界中的一切現象几乎都和重力有着密切联系, 因此重力测量的应用范围很广。例如在地球物理勘探中, 由于地球岩層質量产生了牛頓引力場, 所以可以根据地面上重力的变化情况去寻找矿床。在地球物理学中, 可以利用重力测量的数据去测定地球的彈性。密度以及地壳的構造。在天体力学中, 可以应用重力的数据去研究天体的运动。在大地测量中也要利用重力数据去归算观测成果和研究地球形状。在近代技术中, 計算火箭的运行軌道以及發射人造地球卫星, 均离不开重力場的数据。

在本課程中主要研究重力测量在大地測量中的应用; 我們知道, 大地测量的科学研究目的就是求得地球形状問題。在以前都是將地球表面当作一个不受任何扰动的靜止的海洋面, 称为大地水准面, 研究地球形状就是指应用位理論研究大地水准面的形状; 但是这种方法存在着許多不可克服的缺点, 因此在近百年来, 苏联又提出了一整套利用天文、大地和重力测量資料研究地球真正形状的先进理論。

不管是研究大地水准面, 还是地球真正表面形状, 均須解决兩個問題: 测定一个非常接近于大地水准面或地球真正表面的橢圓体(即根据面)的扁率及大小, 和它与地球的相对位置; 其次研究大地水准面或地球真正表面和橢圓体的相对关系。不过这些問題在本課程中只作一般性的介紹, 而在“地球形状学”中將詳細的研究。

大地测量的实用目的是建立高精度的天文-大地網作为各种用途測圖的控制。为此必須在地球表面上进行基綫、三角和水准測量。

在大地測量学中已經講过, 为了求得地球表面上的大地坐标差, 就必須在地球表面上进行基綫、三角和水准測量; 这些測量数据都是以地面鉛垂綫方向(即重力方向)为依据。但我們在計算时, 要选择一个根据面, 計算出各三角点相对这个根据面的坐标值, 實質上这就是测定地球某一部份表面形状的問題。

根据面的选择是按照所研究的区域的大小来决定的。在小区域內測量时, 可以以平面为計算根据面, 在較大区域內, 以球面或旋轉橢圓体为根据面。当进行大地位置計算时, 就以这些根据面的法綫为依据, 起初都假設鉛垂綫是它們的法綫, 但由于生产上对大地測

量精度的要求日益提高，同时量测的仪器也大大改进了，因此大地测量的观测结果并不受到它本身量测精度的限制，而是受到在计算方法中上述许多假设的影响。这样就提出了一个问题：如何在计算方法中不加任何假设，真正将观测成果根据法线来进行计算。

所以现在的問題就在于將大地測量观测結果（基綫和角度）正确地归算到参考橢圓体上，这就必須知道观测点上由地球表面到橢圓体的距离（称为大地高）和用于归算水平方向的垂綫偏差的数值，因此必須解决下面几个問題：

(1) 高程系統的問題：討論在精密水准測量中如何用重力測量資料將观测高度化算成正常高或正高（近似的）。

(2) 計算高度異常的問題：要將基綫归算到参考橢圓体上就必須求出大地高，而大地高是正常高和高度異常之和，因此就要討論如何求出高度異常的問題。

(3) 天文重力水准設計的問題：在計算高度異常时，需要重力測量的資料，所以就要討論如何最合理最經濟的布置重力点，同时又能达到精度要求。

(4) 垂綫偏差的計算問題：在前面已經講过为了將大地測量的观测結果归算到参考橢圓体上，必須求出垂綫偏差去改正观测方向，在有些三角点上(特别是山区)，这种垂綫偏差的数值是很大的。我們將要討論如何根据重力測量的資料求得垂綫偏差的方法和它的实际計算，以及如何布置为求垂綫偏差用的重力点。

(5) 重力点点位測定的問題：由于对于它們的精度要求不高，特别是在重力点上測定重力的時間不長，所以就要研究如何快速測定重力点的平面坐标及高程。

(6) 重力測量的計劃及重力队的組織問題。

在解决以上几个問題时，要布置一定密度和精度的重力測量；建立重力網的原則和建立大地控制網的原則一样，也是由整体到局部，先建立高精度的控制網，然后逐級加密，这样避免系統誤差的积累。

重力点分为下列几等：

基本点 (A 等点) 点間的距离为 500~1000 公里。它們相对于基准点的誤差不超过 ± 0.3 毫伽。

一等点 点間的距离为 200~300 公里，它們相对于基准点的誤差不超过 ± 0.5 毫伽。

二等点 点間距离为 100~150 公里，它們相对于基准点的誤差不超过 ± 1.0 毫伽。

二等点以下的重力点要根据不同的要求来布置和加密，它們的精度与距离也是根据实际需要而定。

复 習 題

1. 什么是重力？它的單位是什么？
2. 重力測量按其測量方法和測定結果可以分成几类？
3. 重力網的布網原則是什麼？

第二章 绝对重力测量

§ 2-1 绝对重力测量的原理

在緒論中已經講过，按照重力测量的結果可以將它分为兩类；一类叫绝对重力测量，它是直接測出地球表面上某一点的重力值；另一类叫相对重力测量，它是測出地球表面上某兩点之間的重力差。绝对重力测量只能采用动力学法來測定，在历史上有着許多測定的方法，但是較广泛采用的只是下面兩种：

(一) 利用自由落体的原理；

(二) 利用振摆的原理。

現在我們就分別地对这两种原理加以叙述。

(一) 利用自由落体的原理測定重力

在物理学中，自由落体的方程式为：

$$h_i = h_0 + v_0 t_i + \frac{1}{2} g t_i^2 \quad (2-1)$$

式中 t_i 为自由落体下落的某一時間；

h_i 为自由落体在 t_i 瞬間的下落距离；

v_0 为自由落体的下落初速度，它是常数；

h_0 为自由落体的起始高度，它是常数；

g 为自由落体的重力加速度。

根据自由落体在不同的時間 t_i 时所下落的距离 h_i ，列出一組方程 (2-1)，当方程式的个数多于未知数的个数时 (在这里是三个未知数 h_0 、 v_0 及 g)，可以用最小二乘法的原理解算出 g 的最或是值。

以上只是講了这种方法的原理，至于自由落体的下落時間及下落距离如何具体的进行量測，这是一个困难而又复杂的問題；在很早以前曾經有人采用过这种方法，但由于当时设备簡陋及不可能精确的測出很短的下落時間段，以后就漸漸地不用它了。但是在近代的绝对重力测量中，又对这种方法所用的仪器加以改进，同时現在已有可能很精确的測出很短的下落時間段，因此它又有着一定的發展前途，后面我們还要詳細的講到它。

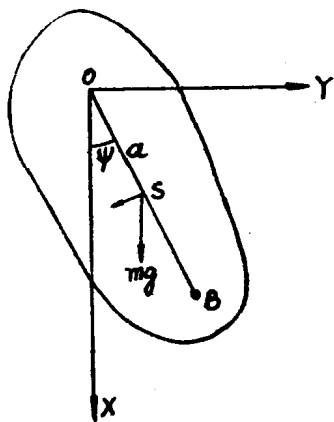


圖 2-1

(二) 利用振摆理論測定绝对重力

用来測定重力的振摆是物理摆 (又称为复摆)，它是一个剛体，悬挂在 O 点上 (圖 2-1)。設 S 为摆的重心， a 是重心到悬挂点 O 的距离， ψ 是任意时刻时 OS 与 OY 軸的夾角；称之为偏角， m 为振摆的質量。

这个物理摆在重力分力 $mg \sin \psi$ 的作用下，繞着过 O 点而与圖面垂直的固定軸摆动。在物理学中，物体繞固定軸摆

动的运动方程式为:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z \quad (2-2)$$

式中 J_z 为物理摆对固定轴 Z 的转动惯量;

ω 为旋转角速度, 即

$$\omega = -\frac{d\psi}{dt} \quad (2-3)$$

上式中的负号是因为物理摆偏离 x 轴越大 (即 ψ 增加), 角速度逐渐减小。

M_z 为重力分力对 Z 轴所产生的力矩, 即

$$M_z = mga \sin \psi \quad (2-4)$$

将 (2-3) 和 (2-4) 式代入 (2-2) 式, 则得

$$-J_z \frac{d^2\psi}{dt^2} = mga \sin \psi$$

用 l 来表示 $\frac{J_z}{am}$, 则上式可改写成

$$-\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{g}{l} \sin \psi \quad (2-5)$$

将上式左边乘上 $2 \frac{d\psi}{dt} dt$, 将右边乘上 $2d\psi$, 则

$$2 \frac{d^2\psi}{dt^2} \cdot \frac{d\psi}{dt} dt = -2 \frac{g}{l} \sin \psi d\psi$$

将上式两边同时积分, 得

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2 \frac{g}{l} \cos \psi + C \quad (2-6)$$

在上式中, 求积分常数 C 时, 设 $t=0$, 则 $\psi=\alpha$; α 即为 OS 相对于 X 轴的最大偏角,

称之为摆幅, 那么在这时的角速度 $\omega = -\frac{d\psi}{dt} = 0$; 将这些数值代入上式, 则常数 C 为

$$C = -2 \frac{g}{l} \cos \alpha$$

再将 C 的数值代入 (2-6) 式, 得

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2 \frac{g}{l} (\cos \psi - \cos \alpha) \quad (2-7)$$

我们知道, 角速度的平方是不会等于负值的, 因此只有在 $\cos \psi \geq \cos \alpha$ 时上式才有意义。

摆的摆幅由 $+\alpha$ 的位置摆动到 $-\alpha$ 的位置所需的时间 T , 称之为周期 (这里周期的定义与物理学中不同, 它比物理学中的周期小一半), 由 (2-7) 式可以求得

$$T = \int_0^T dt = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2g}} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \alpha}} \quad (2-8)$$

将上式中的 $\cos \psi$ 及 $\cos \alpha$ 化成半角正弦, 即

$$\cos \psi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\psi}{2};$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

并代入 (2-8) 式, 再将常数提到积分符号外面来, 则得

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2}}} \quad (2-9)$$

在计算上面这个积分时, 首先要将积分变数改变一下, 设

$$\begin{aligned} \sin \frac{\psi}{2} &= K \sin \varphi \\ K &= \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \quad (2-10)$$

因为当 ψ 角为最大值时, 它等于 α , 而在一般的情况下 ψ 总是小于 α , 也就是说 $\sin \frac{\psi}{2}$ 值最大等于 $\sin \frac{\alpha}{2}$, 一般都是 $\sin \frac{\psi}{2} < \sin \frac{\alpha}{2}$, 所以上面这样的假设是合理的, 我们将 (2-10) 式两边微分, 则得

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2} d\psi = K \cos \varphi d\varphi$$

即

$$d\psi = \frac{2K \cos \varphi}{\cos \frac{\psi}{2}} d\varphi = \frac{2K \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\psi}{2}}} = \frac{2K \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}}$$

将 (2-10) 式和上式一併代入 (2-9) 式中, 则得

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}}$$

在上式中, 积分上下限是这样改变的: 根据 (2-10) 式,

当 $\psi = -\alpha$ 时, $-\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi$, 则 $\sin \varphi = -1$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$;

当 $\psi = +\alpha$ 时, $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi$, 则 $\sin \varphi = +1$, 所以 $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ 。

将被积函数由 $-\frac{\pi}{2}$ 积到 $\frac{\pi}{2}$ 所得的积分值是由 0 积到 $\frac{\pi}{2}$ 所得的积分值的两倍, 故上面的积分可写为:

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2-11)$$

(2-11) 式称为第一类椭圆积分, 假设 α 是一个很小的数值, 那么可以将上式的被积函数展开成级数, 然后逐项积分, 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi}} &= 1 + \frac{1}{2} K^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} K^4 \sin^4 \varphi + \dots \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} K^{2n} \sin^{2n} \varphi \end{aligned}$$

又因为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (2n \text{ 是一个偶整数})$$