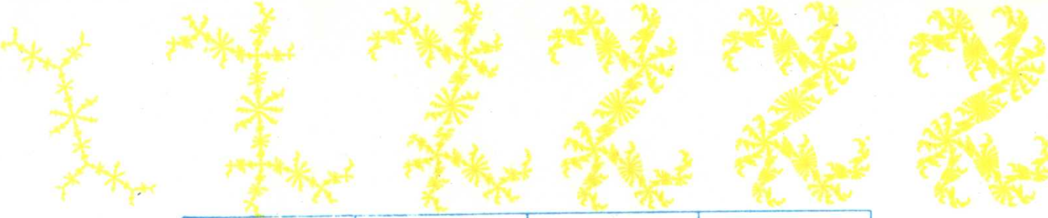


FRACTAL THEORY AND ITS COMPUTER SIMULATION

分形理论与分形的计算机模拟

曾文曲 王向阳 等编著

NEUPRESS
东北大学出版社

分形理论与
分形的计算机模拟

曾文曲　王向阳
刘　[illegible]　汪福龙　编著

东北大学出版社

（辽）新登字第 8 号

内 容 提 要

这是一本分形理论与计算机科学相结合的专著，它既有深刻的理论背景，又有较强的应用性。书中在近年来分形几何理论在国内逐步推广的形势下，重点介绍了分形几何的最新理论是如何应用到分形图象的计算机模拟上的。利用分形的性质，分析绘制分形图的各种算法的理论根据和程序的编制原理。编著者还根据几年来的工作，参考最新的文献，介绍了一系列行之有效的绘制分形的基本算法和程序，只要有初步计算机知识的读者，都可以利用本书提供的算法与程序，直接上机模拟各种美丽的分形图象。

本书可供高年级大学生、研究生、大学教师和其他科学工作者采用。它特别适合计算机工作者参考。有一定计算机理论水平的人，可以利用本书介绍的基本原理和分形理论，去研究更有效的计算机算法，开发新的软件；同时可以进一步的考虑，如何用更少的机储，去储存复杂的信号与图象，达到信息压缩的目的。

分形理论与分形的计算机模拟

曾文曲　王向阳　等编著

东北大学出版社出版（沈阳・南湖）　　东北大学出版社发行
清原县印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　　印张：6.125　　字数：159 千字
1993 年 9 月第 1 版　　1993 年 9 月第 1 次印刷
印数：1～5000 册

责任编辑：冯素琴　宣盍　　责任校对：张淑萍
封面设计：唐敏智　　版式设计：秦　力

ISBN 7－81006－623－4/O・36　　定价：4.50 元

前　言

我们面临的世界是多么丰富多采，天空中飘浮着变幻莫测的云彩，地球表面雄浑壮阔的地貌，海洋上风起云涌时的滔天巨浪，以及各种犬牙交错的边界线。对那么多奇形怪状的图形，多少年来，人们习惯于用传统的几何方法对它们进行描述，采用的主要手段是用直线段或圆弧对它们进行逼近，这种描述应该说与现实是有相当大的差距的。

从1975年以来，随着著名数学家B. B. Mandelbrot几本专著的出版，一种新型的几何语言诞生了，这就是分形几何。分形几何的出现可以看成是数学史上的一次重大变革，它可以用来有效的描述自然界中及科学研究中遇到的各种各样复杂的图形。一旦你掌握了分形几何这种语言，你就有了处理分析和绘制各种不规则图形的强有力的手段。

分形几何，这门新的数学分支一创立，就日益受到各国学者的重视，在过去十几年里，分形科学已有了很大的发展。她在纯数学、物理学、材料科学、地质勘探、疾病诊断、股价预测以及计算机和信息科学等许多领域中，都得到了广泛的应用。并且由于分形几何方法的引入，使一些原已死寂一般的老的学科方向焕发了新的生机，也使一些正蓬勃发展的新学科获得了巨大的推动力。分形几何与计算机科学的结合就是一个明显的例证。一方面，分形理论推动了计算机绘图方法的迅速发展，使计算机在信息压缩及模仿自然现象中的各种奇妙图形发挥了重要的作用；另一方面，计算机的应用也大大地推动了分形理论的发展，并且由于模拟分形图成功而展现出优美的分形图象，迅速提高了分形这门新兴科学的声望，扩大了她的影响。目前，用计算机绘制分形图象

是如此之流行，以致不仅使绘制分形的算法理论及程序设计已成为一独立的研究方向，同时绘制的分形图也已成了一种相当时髦的艺术形式。

近年来，国外相继出版了不少有关分形科学的专著，国内也有了几本这方面的译著和专著出版。这对推动分形理论与方法的普及与发展起了很好的作用。这些书中，像 Falconer . K. J 的〔4〕、〔7〕在理论上是比较深刻的，书中包括严格的数学处理和在各个学科方向上的应用原理。这类书无疑是对分形的数学机理的完整的描述，但对如何把分形的数学理论应用于分形图的计算机模拟则基本不涉及。另一类目前比较流行的书籍可以说是以 Heinz-Otto等主编的〔1〕为代表的，它主要从计算机绘图的观点来讨论分形，介绍基本的算法，叙述绘制和模拟分形图的基本方法与程序，并且给出了各种类型的优美而壮观的分形图象，这些图象能给读者留下深刻的印象。但是，对基本算法和程序与分形性质的联系，以及相应的理论根据介绍得不够充分，对读者进一步研究新的算法是不利的。

本书试图综合上面两类书的特点，结合几年来我们在教学和研究分形理论与利用计算机绘制分形图的经验，介绍分形最新理论是如何应用到计算机绘图上的，讲清绘制分形图的各种算法的理论根据和程序的编制原理，其中包括作者研究开发出来的有效的算法和省机时的软件。有助于读者进一步研究新算法，为绘制更高级更复杂的分形图创造条件。

我们编著本书的目的，是奉献给读者一本既有深刻的理论背景，又有较强的应用性的分形理论与计算机科学相结合的专著。

全书自然的分成两部分，前 4 章的理论部分，和第 5 章的算法理论与程序编制。重点介绍了绘制分形图象的几种算法，主要有字符串替换算法、确定性算法、随机迭代算法、逃逸时间算法、以及反函数迭代算法等。这些算法都是当前比较流行而且有效的计算机算法。同时我们对其中的一些关键步骤进行了改进，收到

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

分形理论发展极其迅速，新成果层出不穷，用计算机绘制分形的理论与算法也日新月异，但愿这本书能为提高和普及这方面的知识发挥一些作用。由于我们水平有限，书中难免存在缺点和不当之处，敬请读者批评指正。

本书由四人集体讨论定稿，具体由曾文曲和王向阳执笔，第5章的程序全都运行无误，并实际打印出第5章的全部图象。高占阳同志参加本书部分章节的讨论，并提出了许多宝贵建议，在此向他表示诚挚的感谢。

本书由国家自然科学基金资助。

最后，我们感谢东北大学出版社对本书的出版给予的大力支持。

作者

1992.12.5

书中应用的主要数学符号

$\varnothing$：空集。

$\exists$ ：存在。

$\in$：属于。

$\forall$ ：任意。

$\Rightarrow$：导致，蕴含

$\subset$：包含于

$\cup$：并。

$\cap$：交。

$\simeq$：近似相等。

$\approx$同阶 $(f(x)\approx g(x))$，即存在常数 $c_1, c_2>0$ 使 $c_1g(x)\leqslant f(x)\leqslant c_2g(x)$。

$B(x,\varepsilon)$：以 x 为中心，以 ε 为半径的球。

$f\wedge g$ ：inf (f, g)。

$f\vee g$ ：sup (f, g)。

f^+：$f\vee 0$。

f^- $(-f)\vee 0$。

R^d：d 维实数集。

C：复平面。

Z^d：d 维格子点。

$\# F$：集 F 中元素的总个数。

目　录

1 分形与分形维数

为掌握计算机绘制分形的算法理论和制图技巧，首先需了解分形几何的一些最主要的概念及性质。本章从介绍分形的最基本定义入手，为后几章算法理论的导出和绘制方法的引入做一些必要的准备。有些是首次见书的，如关于离散豪斯道夫维数；也有一些是从新角度进行了阐述。

如果说，欧氏几何是研究规则图形的几何学，那么，分形几何则是研究“不规则”图形的几何学。这里的“规则”本质上指的是逐段可微或者更确切地说，是逐段光滑的图形。而所谓“不规则”图形应当是满足某些“新规则”的图形，这种“新规则”是什么呢？首先把这个问题说清楚。

1.1 分形的定义

分形几何是一门几何学，它研究的对象是欧氏空间的一类子集，这类子集结构较复杂。按一般方法，似乎应首先给分形下一个明确定义，对给定的图形，再根据它是否满足给出的定义，来断判它是不是分形。但经验已证明，这样的方法对分形几何这一新兴的数学分支有失之简单化的倾向。正象分形几何的创始人 B. B. Mandelbrot 本人开始时给分形几何下过两个定义，但经过理论与应用的检验，人们也发现这种简单的定义确难包括分形如此丰富的内容，因此这两个定义也逐渐的不被人们提及了。那么究竟什么是分形呢？它们所遵循的“不规则”的规则又是什么，我们采用的是一种与传统方法不同的方法。

原则地说：分形是一些简单空间上，如 R^d、C、$\hat{C}$ 上的一些“复

杂”的点的集合，这种集合具有某些特殊性质，首先它是所在空间的紧子集，并且具有下面列出的典型的几何性质：

(i) 分形集都具有任意小尺度下的比例细节，或者说它具有精细的结构。

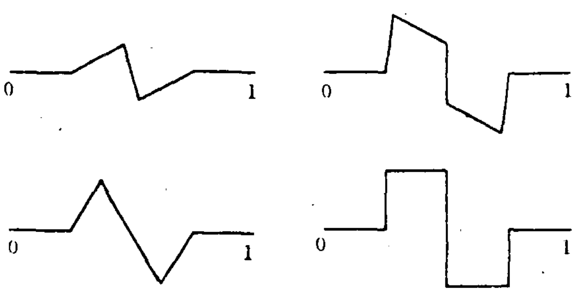
(ii) 分形集不能用传统的几何语言来描述，它既不是满足某些条件的点的轨迹，也不是某些简单方程的解集。

(iii) 分形集具有某种自相似的形式，可能是近似的自相似或者统计的自相似。

(iv) 一般，按本章中的方式定义的分形集的“分形维数”，严格大于它相应的拓扑维数。

(v) 在大多数令人感兴趣的情形下，分形集由非常简单的方

(a)：$D=\log_4 5\sim 1.16$　　(c)：$D=\log_4 7\sim 1.40$



(b)：$D=\log_4 6\sim 1.29$　　(d)：$D=\log_4 8=1.5$

图 1.1.1　(*a*)、(*b*)、(*c*)、(*d*)四个图分别表示 4 种广义 von Koch 曲线的生成元

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

法定义，可能以变换的迭代产生。

对于各种不同的分形，有的可能同时具有上述的全部性质，有的可能只有(i)－(v)中的大部分性质，而对某个性质有例外，但这并不影响我们把这个集合称为分形。应当指出，自然界和各门应用科学中涉及的分形绝大部分都是近似的。当尺度缩小到分子的尺寸，分形性也就消失了，严格的分形只存在于理论研究之中。

下面我们观察几个分形的例子。

例 1.1.1 广义 von Koch 曲线，见图 1.1.1 和图 1.1.2。图 1.1.1 中的(*a*)、(*b*)、(*c*)、(*d*)分别是四个广义的 von Koch 曲线的生成元，如果迭代都从 E_0，即长度为 1 的单位直线段开始，第一步

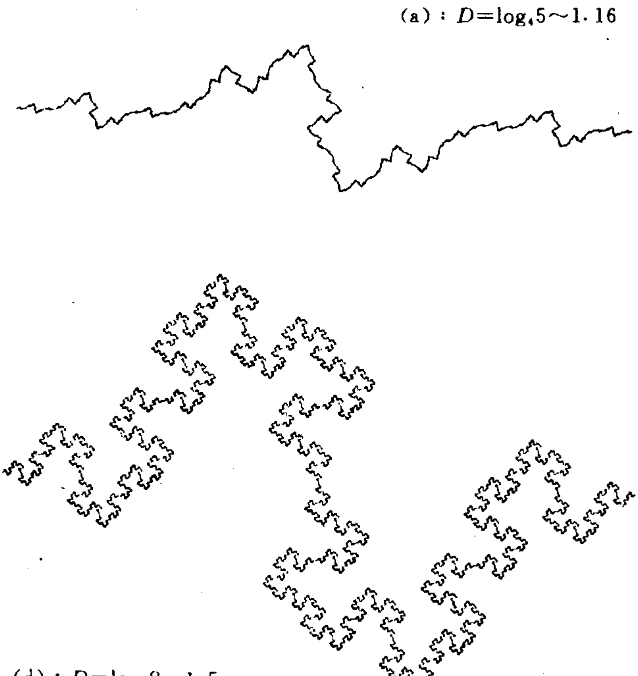


图 1.1.2 由图 1.1.1 中的生成元(*a*)和(*d*)生成的广义 von Koch 曲线

迭代成为 E_1，就是所谓的生成元。下一步迭代则是将各个 E_1 中的长度为 1/4 的小直线段，分别用缩小比例到原来的 1/4 的生成元取代而得到 E_2。依此类推，当 k 充分大时，E_k 与 E_{k-1} 只在精细的细节上不同。图 1.1.2 给出了 (a)、(d) 在 k 充分大时 E_k 的图形，它们可以作为 $k\to\infty$ 时，分形集下的近似图。这种分形集 F 显然满足性质(i)－(v)。这么复杂的曲线，却源出于一个简单的生成元，并且它最显著的特征是它的严格自相似性——图 1.1.2 中的两个图的任一小段放大适当的倍数，则可以与原图的某一大段完全重合。

例 1.1.2 图 1.1.3 表示的是在本书第 4 章将详细讨论的复变函数迭代产生的 Julia 集，这也是一种分形集。并且显然比广义 von Koch 曲线更错综复杂，它是单个复变量函数 $f(z)=z^2-\lambda$ 迭代出来的图象。从图上可以看到 Julia 集具有精细结构，但没有如广义 von Koch 曲线那样严格的自相似性，它具有"拟自相似性"，即这个集的任意小部分可以放大，然后平滑地变形使之与这个集合的某一较大部分相一致。

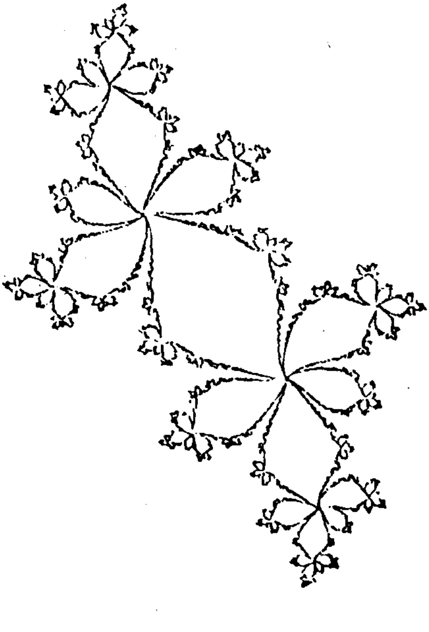


图 1.1.3 Julia 集

例 1.1.3 图 1.1.4 表示的是平面上的布朗运动的运动轨迹图。微粒间的分子碰撞的结果导致微粒沿随机的非常不规则的轨道运动，这种轨道没有上述两例中的集合的严格自相似性或"拟自

相似性"，但它具有统计自相似性，即轨道的某一小部分放大之后与某一较大的部分有相同的概率分布，这种分形可以称之为随机分形。

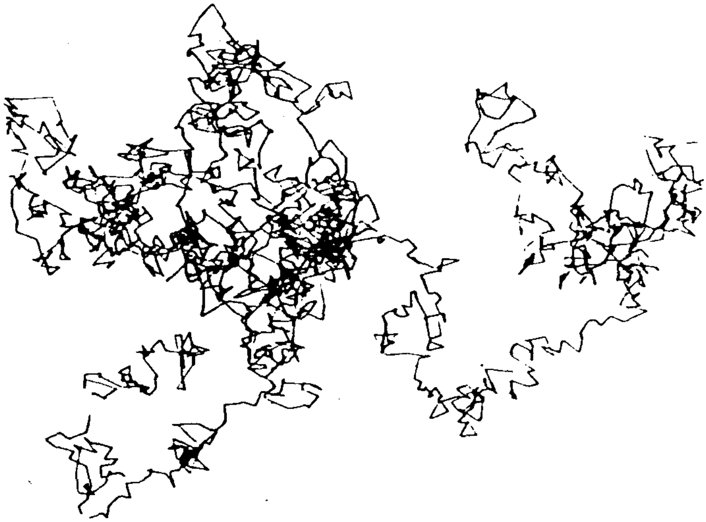


图 1.1.4 平面中的布朗运动轨道

例 1.1.4 图 1.1.5 表示的是挪威南部某段海岸线，粗略看起来，它也具有(i)－(v)中的大部分性质，但这只是在近似的意义下。图中的部分与整体只是"相像"，它反映出来的自相似性比上面几例中的相似性都要弱，只有"近似的自相似性"。自然界中许多物体的轮廓线都具有与例 4 相同的性质，如云彩的边界，流体的湍流，山地的轮廓等。在一定的尺度范围内，都可以把它们看成是分形，用充分小的尺度观测时，它们的分形特性就消失了。

总结以上四个例子，可以看出，分形集是一类不能用经典几何方法描述的"不规则"集，它们基本上满足条件(i)－(v)，但在自相似的程度上可以有很大的差别。而分形几何正是研究所谓"简单"

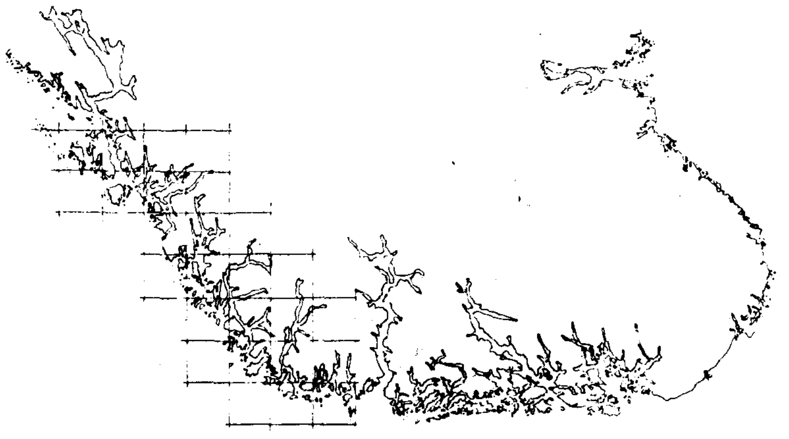


图 1.1.5 挪威南部某段海岸线，它具有精细结构及一定程度的自相似性，在一定的尺度范围内，可以把它看成是一个分形集

空间上这样一类“复杂”子集的一门新兴的数学分支。

1.2 分形维数

分形集的“不规则”性使它区别于经典的光滑点集，但是，如何来量度两个分形集的“不规则”的程度呢？分形维数提供了一种比较分形的客观工具。分形维数的重要性在于它们能够用数据定义，并且能通过实验手段近似地计算，分形维数已突破一般拓扑集的整数维的界线，引进了分数维，这也正是分形几何刚出现时最令人困惑的一点，从下面的例中可以看出这种维数概念延拓的合理性。

例 1.2.1 测量广义 von Koch 曲线的长度，按经典欧氏几何的方法，对任一拓扑一维的光滑的曲线，我们可以用折线段来逼近它，如图 1.2.1，欲测出 A、B 间的曲线的长度，在 A、B 上任取分点 $M_0=A$、M_1、$M_2\cdots M_n=B$，设 $|\overline{U}_i|=|M_{i-1}M_i|$ 表示相邻两分点的直

线段的长度，则

$$\overset{\frown}{AB}\text{的长度} = \lim_{\max|U_i|\to 0}\sum_i |U_i| \tag{1.2.1}$$

同样，对一个二维区域，如果是平面上具有光滑边界的区域，如图 1.2.2，正方形网格与二维区域 G 相交。

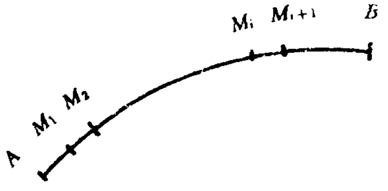


图 1.2.1 用折线逼近法求光滑曲线的弧长

则有

$$G\text{ 的面积} = \lim_{|U_i|\to 0}\sum_i |U_i|^2 \tag{1.2.2}$$

其中 $\sum_i$ 表示对所有与 G 相交的正方形求和，$|U_i|$ 表示正方形的边长。

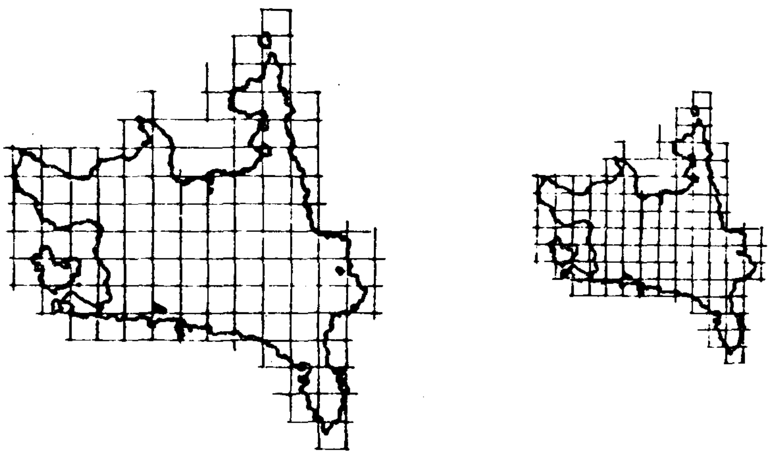


图 1.2.2 用正方形网格与二维区域 G 相交，求区域 G 的面积

而对例 1.1.1 中的广义 von Koch 曲线，我们只考虑(a)型广义曲线的长度，简单的计算表明，第 k 步迭代时，E_k 的长度为 $(5/4)^k$，令 $k\to\infty$时，即知，对(a)型广义 von Koch 曲线 F，有：

$$F\text{ 的长度} = \lim_{\max|U_i|\to 0}\sum_i |U_i| = \infty \qquad (1.2.1)'$$

另一方面，广义 von Koch 在平面内不占有面积，因此它的面积为零。所以用式(1.2.2)的形式计算，可以写成：

$$F\text{ 的面积} = \lim_{|U_i|\to 0}\sum_i |U_i|^2 = 0 \qquad (1.2.2)'$$

所以，一维度量长度，二维度量面积对广义 von Koch 曲线的“大小”都没能给出有效的描述，那么有没有一个合适的度量能给广义 von Koch 曲线这样的分形集予合理的描述呢？下面我们将会看到，如果在式(1.2.1)′和(1.2.2)′中$|U_i|$的指数不用 1 和 2，而改用某一个合适的 s，$1<s<2$，对广义的 von Koch 曲线，

$$\mathscr{H}^s(F) = \lim_{|U_i|\to 0}\sum_i |U_i|^s \qquad (1.2.3)$$

能趋于一个有限的值。也就是说，这个介于 1 和 2 之间的合适的数，能更好的反映广义 von Koch 曲线的几何特征，这个分数 s 更适合用来描述广义 von Koch 曲线。s 的值也就是下面要讲到的分形集 F 的分形维数。

上述讲解是相当粗略的，但至少直观地说明，通常所用的整数维概念已不足于用来描述分形集的复杂程度，或者说，不能很好地用来说明各种集合充满空间程度的不同，也不能很好地对比两个集合不同的粗糙程度。所以，下面引进的分形维数是很自然的。每一个分形集都对应一个以某种方式定义的分形维数，这个维数值一般是分数的，但正如将要看到的，也有整数维的分形集。

形形色色的分维已成为分形几何的主要工具，这些维数有的定义的比较科学，而另一些可能理论性差一些，但在应用上也许方便一点。本章主要介绍三种维数：自相似维数、豪斯道夫维数以及盒维数。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com