

● 非线性科学丛书 ●

反应扩散系统中的 斑图动力学

欧阳颀 编著

上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

非线性科学丛书

反应扩散系统中的 斑图动力学

欧阳颀 著

夏蒙芬 漆安慎 郑伟谋 审阅

上海科技教育出版社

Advanced Series in Nonlinear Science

**Pattern Formation in
Reaction-Diffusion Systems**

Qi Ouyang

Department of Physics, Peking University,
Beijing, 100871, China

Shanghai Scientific and Technological Education
Publishing House, SHANGHAI, 2000

内 容 提 要

本书以化学动力学中的反应扩散系统为例,用非线性动力学的观点分析自然界中普遍存在的斑图自组织现象,讨论时空失稳过程的几种典型类型,并介绍在反应扩散系统中研究斑图动力学的实验。本书的讨论主要集中在如下几类斑图形成的动力学机制:图灵斑图,可激发系统中的螺旋波斑图,双稳系统中的时空斑图及化学法拉第斑图。本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读。

本书由夏蒙芬、漆安慎、郑伟谋审阅。

图书在版编目(CIP)数据

反应扩散系统中的斑图动力学/欧阳颀著. —上海:
上海科技教育出版社,2000.12

(非线性科学丛书/郝柏林主编)

ISBN 7-5428-2353-1

I. 反... II. 欧阳... III. 非线性-反应动力学-研究
IV. 0643

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第35106号

非线性科学丛书

反应扩散系统中的斑图动力学

欧阳颀 著

夏蒙芬 漆安慎 郑伟谋 审阅

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路393号 邮政编码200233)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/16 印张 6.5 字数 166 000

2000年12月第1版 2000年12月第1次印刷

印数: 1—2 000

ISBN 7-5428-2353-1/O·263 定价:(精装本) 16.00元

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：（按姓氏笔画为序）

丁鄂江	文志英	朱照宣
刘式达	刘寄星	孙义燧
杨清建	李邦河	张洪钧
张景中	陈式刚	周作领
赵凯华	胡 岗	顾 雁
倪皖荪	徐京华	郭柏灵
陶瑞宝	谢惠民	蒲富恪
霍裕平	魏荣爵	

出版说明

现代自然科学和技术的发展,正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科,与日新月异的高新技术相结合,使用数值、解析和图形并举的计算机方法,推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征,可以概括为“非”字当头,即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中,非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”,而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时,非线性还被人们当作个性极强,无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法,运用新颖的技巧。诚然,力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程,物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过,这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品,人们还没有悟出它们的普遍启示,也没有看到它们之间的内在联系。

20世纪60年代中期,事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面,描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算,揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径,即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念,反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了80年代,反散射方法推广到量子问题,发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理。于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域。虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的。

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例。这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识。原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测。然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构。

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象。从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律。如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程。标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用。

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题。物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用。“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和。非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法。

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人員,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人員和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人員更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者們将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我們衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前 言

自 1983 年师从李如生老师研究化学系统中的耗散结构 (dissipative structure) 理论以来, 作者在非线科学中的分支之一, 斑图动力学领域内做实验研究工作已有 17 年. 作为一名实验工作者, 体会比较深的一点是, 一个好的实验科学家应该对自己的研究领域中的理论有一个比较全面、深入的把握. 出于这样的想法, 作者在工作中一贯比较注意非线性理论研究(尤其是斑图动力学理论研究)的新动向, 并努力用这些理论来指导作者的实验工作. 十几年来, 作者在自己熟悉的科研领域, 即反应扩散系统中的斑图动力学方面, 不论在理论上还是在实验上都有了一些心得, 总想找时间整理出来, 以备在以后的研究工作中参考. 1998 年, 中国科学院理论物理研究所郝柏林教授与刘寄星教授希望我为非线性科学丛书写一本小册子, 介绍斑图动力学方面的工作. 这个建议正是我想办而没有办的事. 经过一年多的准备, 就有了这本书稿. 所以, 本书不但是给想要了解斑图动力学理论与实验研究工作的读者写的, 也是给作者自己写的.

斑图动力学是非线性科学领域内的一个重要分支. 作为一门横向科学, 它的研究内容涉及物理学、力学、化学、数学、生物学、生态学等各个领域. 它的研究目的是探索共同存在于诸系统之间的、具有普遍指导意义的斑图动力学基本规律. 作为一本入门性质的书, 不可能涵盖所有以上提及的各个方面. 作者的想法是, 通过比较系统地介绍反应扩散系统中斑图的自发形成、斑图的选择、斑图的失稳及时空混沌的产生, 使读者对斑图动力学这门科学有一个比较深入的了解. 如果读者能触类旁通, 在接触其他领域中的斑图问题时, 能从本书中得到一些提示, 作者的目的就达到了.

本书的另一特点是以一定篇幅介绍反应扩散系统中斑图动力学的实验方法与过程. 斑图动力学的进步, 尤其是在反应扩散系统中斑图动力学的研究, 到目前为止在很大程度上依赖物理实验及数值模拟的推动. 从这个角度讲, 它是一门实验科学. 因为数值计算受到计算机容量与速度的限制, 不可能研究大尺度、长时间的二维时空动力学渐近行为, 所以物理实验还是研究斑图动力学的最主要的手段, 也是推动该理论系统发展的根本动力. 了解一定的实验知识, 对于有兴趣从事这方面工作的读者来说是必要的.

从本书的结构上看, 第 1 章中的诸节介绍研究反应扩散系统中斑图动力学的基本要素. 其中 §3 介绍的线性稳定性分析, 是非线性科学入门的必备知识. 其余两节分别从理论 (§2) 与实验 (§4) 角度介绍反应扩散系统. 第 2 章、第 3 章通过讨论图灵斑图形成的机制及其演化, 介绍一类由于系统的空间均匀定态在相空间中局部失稳, 而引发的斑图形成. 其中第 2 章集中讨论图灵失稳的一级分岔问题, 失稳的结果是图灵斑图的产生. 第 3 章介绍图灵斑图的高级分岔. 图灵分岔机制是自然界广泛存在的一种斑图形成机制, 目前研究比较透彻的流体力学中的斑图形成与非线性光学中的斑图形成, 都与图灵分岔有关. 以后三章讨论由于系统在相空间中全局失稳导致的斑图形成. 第 4 章、第 5 章着重介绍可激发系统中螺旋波的斑图动力学. 其中第 4 章推导螺旋波的色散关系与本构关系, 这两个关系决定了稳定螺旋波的动力学行为. 第 5 章研究螺旋波的各类失稳途径及缺陷混沌的产生. 这部分工作有的已经有了定论, 大部分还是在不断地探讨之中, 有的问题还是非线性科学的前沿课题. 第 6 章探讨双稳系统中可能出现的非平衡相变. 在这一章里主要介绍两类失稳现象: 非平衡伊辛 - 布劳克 (Ising-Bloch) 相变与化学波锋的横向失稳 (transverse instability), 这两类失稳会导致系统发展出一系列时空斑图态. 第 7 章研究一个特殊的非自治系统中的斑图动力学, 即在周期外力扰动下系统的斑图自组织行为. 当周期外力扰动频率大约两倍于系统的本征

振荡频率时,驻波斑图会自组织形成. 这类斑图最早由法拉第于150年前在流体系统中观察到,现在许多实验系统中都被发现,例如振荡沙盘系统,反应扩散系统等.

作者感谢夏蒙芬教授、漆安慎教授、郑伟谋教授与郝柏林教授抽出时间认真阅读本书书稿,并从科学性方面、文章结构方面和文字表述方面提出许多非常有益的修改建议. 没有他们的工作,要让读者看懂本书将是一件困难的事情. 作者还要感谢北京大学1999年随作者学习斑图动力学课程的学生们. 他们对本书初稿的认真校对,使以后的读者少受了许多不必要的折磨. 另外,周路群博士花了大量时间为本书准备插图,在这里一并表示感谢.

作 者

2000年3月于北京大学

Abstract

Using reaction-diffusion systems in chemistry as examples, the general features of pattern formation in nature are studied from point of view of nonlinear dynamics. Several typical spatial temporal instabilities are discussed, and the experimental results of pattern forming experiments in reaction-diffusion systems are presented. The book focuses on the following pattern forming mechanisms: Turing Pattern, Spirals in an excitable medium, patterns in bistable media, and chemical Faraday patterns. Readership includes graduate students and scientist involved in nature science and engineering activities.

目 录

非线性科学丛书出版说明

前言

第 1 章 引论	1
§1 斑图动力学	2
§2 反应扩散系统	6
§3 线性稳定性分析	12
§4 反应扩散系统的斑图动力学实验	18
第 2 章 图灵斑图与斑图选择	21
§5 图灵斑图	21
§6 斑图选择与振幅方程	24
§7 图灵斑图的稳定性分析	30
§8 振幅方程系数的推导	36
§9 图灵斑图的实验观察	43
第 3 章 图灵斑图的二级分岔	51
§10 NWS 方程	51
§11 条状斑图的失稳	55
§12 具有旋转对称的包络方程	61
§13 菱形斑图	65
§14 图灵斑图的研究方向	69
第 4 章 螺旋波斑图	73
§15 螺旋波的产生	73
§16 色散关系	78
§17 本构关系	83
§18 螺旋波的实验研究	89

第 5 章	螺旋波的失稳	98
§ 19	螺旋波的爱克豪斯失稳.....	98
§ 20	对流失稳的实验观测.....	103
§ 21	漫游螺旋波.....	109
§ 22	螺旋波端点运动的正则方程.....	115
§ 23	周期螺旋波失稳的实验观察.....	122
第 6 章	双稳系统中的斑图形成	129
§ 24	双稳系统与化学波锋.....	130
§ 25	非平衡伊辛 - 布劳克相变.....	134
§ 26	横向失稳.....	139
§ 27	迷宫斑图.....	142
§ 28	螺旋波与振荡斑点.....	147
§ 29	双稳系统中斑图的实验观察.....	152
第 7 章	化学法拉第斑图	159
§ 30	周期外力扰动与锁频.....	160
§ 31	钟摆模型.....	163
§ 32	反应扩散模型.....	168
§ 33	化学法拉第斑图的实验.....	171
附录 A	斑图动力学理论研究中常见的反应扩散模型	175
附录 B	常微分方程不动点的分类及系统的动力学分岔	177
附录 C	弗来得霍姆定理	180
附录 D	非线性特征方程的解	181
参考文献		184
外国科学家中译名表		189

Contents

Preface

1. Introduction	1
§ 1 Pattern dynamics.....	2
§ 2 Reaction-diffusion system.....	6
§ 3 Linear stability analysis.....	12
§ 4 Pattern formation experiment in reaction-diffusion systems.....	18
2. Turing pattern formation and selection	21
§ 5 Turing pattern.....	21
§ 6 Pattern selection and amplitude equation.....	24
§ 7 Stability analysis of Turing pattern.....	30
§ 8 Derivation of coefficients of amplitude equation.....	36
§ 9 Experimental observations of Turing pattern.....	43
3. Secondary bifurcation of Turing pattern	51
§ 10 NWS equation.....	51
§ 11 Instability of stripe pattern.....	55
§ 12 Envelop equation with rotational invariance.....	61
§ 13 Rhombic patterns.....	65
§ 14 Future of Turing pattern research.....	69
4. Spiral wave pattern	73
§ 15 Emergence of spiral waves.....	73
§ 16 Dispersion relation.....	78
§ 17 Constitutive relation.....	83
§ 18 Experimental study of spiral waves.....	89

5. Instabilities of spiral waves	98
§ 19 Eckhaus instability of spiral waves	98
§ 20 Experimental observation of convective instability ..	103
§ 21 Meandering spiral	109
§ 22 Normal form of spiral tip movement	115
§ 23 Experimental observation of periodic spiral instability	122
6. Pattern formation in bistable systems	129
§ 24 Bistable system and chemical front	130
§ 25 Non-equilibrium Ising-Bloch transition	134
§ 26 Transverse instability	139
§ 27 Labyrinthine pattern	142
§ 28 Spiral and oscillating spot	147
§ 29 Experimental observation of pattern formation in a bistable system	152
7. Chemical Faraday patterns	159
§ 30 External forcing and phase locking	160
§ 31 Pendulum model	163
§ 32 Reaction-diffusion model	168
§ 33 Experimental observation of chemical Faraday pattern	171
Appendix A Some popular reaction-diffusion models for studying pattern formation theory ..	175
Appendix B Classification of fixed point in ordinary differential equation and bifurcation	177
Appendix C Fredholm theorem	180
Appendix D Solution of nonlinear eigenequation	181
References	184

第 1 章

引 论

斑图动力学是非线性科学领域内的一个重要分支. 作为一门横向科学, 它的研究内容涉及物理学、力学、化学、数学、生物学、生态学等各个方面. 斑图动力学探索诸系统之间共同存在的、具有普遍指导意义的斑图形成的基本规律. 目前, 斑图动力学理论与实验的研究对象, 主要是流体中的瑞利-贝纳德(Rayleigh-Bénard)系统, 非线性光学系统, 反应扩散系统及振荡沙盘系统. 人们对前三类系统的斑图形成的具体机制已经有了系统的了解, 后一类还只有一些阶段性成果, 没有形成统一的理论. 在现有介绍斑图动力学的专著中, 大部分作者是通过分析流体力学中的瑞利-贝纳德对流引出斑图动力学概念的. 这样做的优点是物理背景清楚, 控制参量少. 本书准备通过对反应扩散系统中不同斑图形成机制的描述与分析, 介绍斑图动力学的基本内容. 主要原因是对于这部分工作, 作者比较熟悉. 对流体系统中的斑图动力学感兴趣的读者可以阅读参考文献 [1]~[4]. 这里有必要说明的是, 不论从何种系统出发, 都可以得到共同的、具有普遍指导意义的斑图动力学基本规律.

本章的主要目的, 是介绍研究反应扩散系统中的斑图动力学的一些基本理论与实验知识. 在讨论了斑图动力学的基本概念以后, 对反应扩散系统、化学反应动力学、线性稳定性分析及实验系统将一一做简单介绍. 其中 §3 (线性稳定性分析) 是研究斑图动力学的核心数学工具, 对它的应用将出现在本书的各个章节.