组 合 数 学 与 图 论

陈景林　阎满富　编著

中 国 铁 道 出 版 社

组合数学与图论

陈景林　阎满富　编著

中国铁道出版社

2001年·北京

(京) 新登字 063 号

内 容 简 介

组合数学与图论是研究离散数学的学科，有其广泛的应用。本书主要阐述了组合数学与图论的基本内容和方法，其主要内容有：抽屉原理、排列与组合、容斥原理、递归关系、母函数、图的基本概念、树、平面图、匹配理论、路径问题以及各类应用问题等。

本书条理清楚，层次分明，深入浅出，针对性强，并重点阐述了应用的内容。每章均配备了习题，书后附有解答或提示。本书可作为中学数学教师继续教育和师范院校数学专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

组合数学与图论/陈景林，阎满富编著. －北京：中国铁道出版社，2001.4 重印

ISBN 7－113－03854－9

Ⅰ.组… Ⅱ.①陈… ②阎… Ⅲ.①组合数学 ②图论 Ⅳ.0157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 42022 号

书　　名：组合数学与图论
作　　者：陈景林　阎满富
出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑：任军
印　　刷：遵化市胶印厂
开　　本：850×1168　1/32　印张：8.5　字数：212 千
版　　本：2000 年 9 月第 1 版　　2001 年 4 月第 2 次印刷
印　　数：2021～3020 册
书　　号：ISBN 7－113－03854－9/O·81
定　　价：16.70 元

前　言

组合数学是一个历史悠久又是近年来发展很快的数学分支。它与数论、线性代数、群论、域论、格论等有密切联系，而且有其广泛的的应用。

图论原本是组合数学这个“家族”的主要成员。它的起源可追溯到1736年欧拉关于哥尼斯堡七桥问题的研究。20世纪30年代后，由于科学技术发展促进离散数学模型的发展，使图论不断成长壮大，形成一门独立的学科。

组合数学与图论是大学数学专业普遍开设的课程，也是计算机科学等许多相关专业所需的课程。尤其是1999年教育部颁发的《中小学教师继续教育课程开发指南》已把《组合数学与图论》引入数学教师继续教育课程。为满足中学教师继续教育教学的需要和师范院校数学、计算机等专业开设选修课的需要，我们按《中小学教师继续教育课程开发指南》的要求，编写了此书。

编写这部教材，力求从我国社会发展的客观要求和继续教育的特点出发，体现时代的先进性和创新性；知识体系的科学性与系统性；数学教师继续教育的专业性和综合性；教材内容的应用性和针对性。在写作本书之前，我们认真地征求和吸收了各级教育行政部门主管继续教育的领导及部分省市教育学院的专家和一些中学教师对本书的编写意见，系统地查阅了国内外有关组合数学与图论方面的专著、教材、期刊杂志，注意消化、理解、吸收组合数学与图论新的研究成果，并尽可能地渗透到教材内容之中，考虑到中学数学教师和数学专业在校学生学完此门课程后，要应用到中学数学教学之中，所以本书特别在各章节中穿插了组合数学与图论应用的内容，因而使教材内容更具有实用性。

我们深知要写好一本教材绝非易事。虽然我们从事组合数学与图论的教学和研究工作十几年，也曾编写过相关学科的全国中小学教师继续教育教材，但是由于我们才力不逮，书中疏漏不当之处在所难免，恳请同行和读者不吝赐教。

在本书问世之际，对北京大学博士生导师徐明曜先生及各级教育行政部门的领导和有关院校的专家在我们编写的过程中，从编写思想到内容安排给予的热心指导、中国铁道出版社的鼎力支持，谨致谢忱！

作　者

2000 年 7 月

目　　录

第一篇　组合数学初步

第一章　抽 屉 原 理 ………………………………………………… (1)
　§1.1　集合的基本概念………………………………………… (1)
　§1.2　抽屉原理………………………………………………… (4)
　§1.3　应用举例………………………………………………… (6)
　习题一 ……………………………………………………… (11)
第二章　排列与组合 ………………………………………………… (14)
　§2.1　加法原理与乘法原理…………………………………… (14)
　§2.2　排列……………………………………………………… (17)
　§2.3　组合……………………………………………………… (25)
　§2.4　二项式定理……………………………………………… (32)
　习题二 ……………………………………………………… (37)
第三章　容 斥 原 理 ………………………………………………… (40)
　§3.1　引言……………………………………………………… (40)
　§3.2　容斥原理………………………………………………… (42)
　§3.3　应用举例………………………………………………… (46)
　习题三 ……………………………………………………… (53)
第四章　递 归 关 系 ………………………………………………… (55)
　§4.1　斐波那契(Fibonacci)数列 …………………………… (55)
　§4.2　常系数线性齐次递归关系……………………………… (60)
　§4.3　迭代和归纳……………………………………………… (68)
　§4.4　差分表…………………………………………………… (74)
　习题四 ……………………………………………………… (80)

第五章　母　函　数 …………………………………………………… (82)
§5.1　母函数…………………………………………………………… (82)
§5.2　其它递归关系…………………………………………………… (93)
§5.3　指数型母函数…………………………………………………… (99)
习题五…………………………………………………………………… (102)

第二篇　图　论

第一章　图的基本概念……………………………………………… (105)
§1.1　哥尼斯堡七桥问题 ………………………………………… (105)
§1.2　基本概念 …………………………………………………… (106)
§1.3　道路与连通性 ……………………………………………… (111)
§1.4　图的矩阵表示法 …………………………………………… (116)
§1.5　应用问题举例 ……………………………………………… (124)
习题一…………………………………………………………………… (131)
第二章　树…………………………………………………………… (135)
§2.1　树的概念 …………………………………………………… (135)
§2.2　树的基本性质 ……………………………………………… (140)
§2.3　割边与割点 ………………………………………………… (143)
§2.4　生成树及其求法 …………………………………………… (148)
§2.5　根树及其应用 ……………………………………………… (155)
习题二…………………………………………………………………… (164)
第三章　平 面 图 ……………………………………………………… (167)
§3.1　平面图的概念 ……………………………………………… (167)
§3.2　欧拉公式 …………………………………………………… (177)
§3.3　对偶图与五色定理 ………………………………………… (183)
习题三…………………………………………………………………… (187)
第四章　匹配理论、色数问题 ……………………………………… (191)
§4.1　最大匹配 …………………………………………………… (191)
§4.2　色数 ………………………………………………………… (201)

§4.3 独立集与色多项式 …………………………………… (209)
习题四…………………………………………………………… (213)
第五章　路径问题…………………………………………… (216)
§5.1　最短道路 …………………………………………… (216)
§5.2　中国邮路问题 ……………………………………… (224)
§5.3　最小树 ……………………………………………… (231)
§5.4　推销员问题与哈密顿回路 ………………………… (237)
习题五…………………………………………………………… (249)
习题解答与提示……………………………………………… (252)

第一篇　组合数学初步

第一章　抽屉原理

§1.1　集合的基本概念

集合是数学上不定义的概念，它是具有某种性质的一组事物的概念之抽象．对于集合(也可简称为集)，我们关心的是哪些属于它．我们称属于某个集合的事物为该集的元素或元，所谓给出一个集合即指明该集合所包含的元素．

当集合中元素的个数为有限时，则称该集合为有限集，否则称其为无限集．

具有某种性质 p 的元素所构成之集合 A 可表示为

$$A=\{x \mid x\ \text{具有性质}\ p\}.$$

例如，$A=\{x \mid x$ 是非负整数$\}$即表示所有非负整数构成的集合．也可用列出集合的所有元素的方式来表示一个集．

例如，$S=\{a,b,c,d,e\}$即表示有五个元素的集合．当集合中元素具有一定的规律时，也可以用列出其部分元素，然后用省略号表示其余元素．

例如，非负整数集 A 可表示为

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

我们强调指出，一个集合中的元素是确定的.也就是说，对于给定的一个集合 S 来说，任何一个对象或元素 a，它或者属于集合 S，或者不属于集合 S，二者必居其一.当 a 属于 S 时，则记作 $a \in S$；当 a 不属于 S 时，记为 $a \notin S$.如果一个集合 S 不包含任何元素，则称它为空集，并记为 $S=\varnothing$.只含一个元 a 的集 $\{a\}$ 称为单元集.

若 A,B 为两个集，且 B 中任一元都是 A 的元，则称 B 为 A 的子集，记作 $B \subseteq A$ 或记作 $A \supseteq B$.也可说 B 含于 A，或说 A 包含 B.若两个集 A 与 B 所包含的元相同，即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称两个集合 A 与 B 相等，并记作 $A=B$.

除集合的包含关系外，还可以建立集合之间的一些代数运算：

两个集 A 与 B 的并集合，指的是由集 A 和集 B 的所有元素所组成的集合，记作 $A \cup B$，即 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$；

两个集 A 与 B 的交集合，指的是由集 A 和集 B 的一切公共元素所成之集，记作 $A \cap B$，即 $A \cap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$；

两个集 A 与 B 的差集合，指的是由属于集合 A 但不属于集合 B 的元素所成之集，记作 $A \setminus B$，即 $A \setminus B=\{x \mid x \in A$ 但 $x \notin B\}$；.

特别当 $B \subseteq A$ 时，称 $A \setminus B$ 为 B 关于 A 的补集.而当 A 为所讨论的全集时，称 B 关于 A 的补为 B 的补集，并记 $A \setminus B=\bar{B}$.

关于集合的并、交、补运算，有如下的运算律：

(1) 结合律

$$A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C;$$
$$A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap C;$$

(2) 交换律

$$A \cup B=B \cup A;$$
$$A \cap B=B \cap A;$$

(3) 分配律

$$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C);$$

(4) 狄·莫根律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

下面只对$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$给出证明.

设 $x \in \overline{A \cup B}$,则 $x \notin A \cup B$,而 $x \notin A \cup B$ 等价于 $x \notin A$ 和 $x \notin B$ 同时成立,即 $x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$,即 $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$;

这表明 $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$,故

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \tag{1}$$

另一方面,设 $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$,$x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$,故 $x \notin A$ 且 $x \notin B$,这等价于 $x \notin A \cup B$,亦即 $x \in \overline{A \cup B}$.

这表明 $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$,故

$$\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \tag{2}$$

由(1)、(2)即得:$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

最后我们给出复合集(或称为重集)的概念.

复合集也是数学上不定义的概念,它与前面讨论的普通集合(我们在不加说明时提到的集合均指普通集合)的不同之处在于其成员不必互异.例如,我们将具有三个 a,两个 b,1 个 c 的集合 S 记为 $S = \{a, a, a, b, b, c\}$ 或 $S = \{3 \cdot a, 2 \cdot b, 1 \cdot c\}$,其中 3,2,1 分别称为元素 a, b, c 的重复数.

例如,$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, n_3 \cdot a_3, n_4 \cdot a_4\}$,其中 a_1, a_2, a_3, a_4 为不同的元素,n_1, n_2, n_3, n_4 为非负整数,则 S 是一个复合集,而当 $n_i = 0$ 时元素 a_i 的重复数为 0,此时显然表明 S 中不包含元素 a_i.特别当 $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$ 时,S 为通常的集合 $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.在这个意义上,若将复合集作为原始概念,则集合(即通常意义下的集合)就是可定义的:集就是其元素的重复数全部为 1 的复合集.

为了不限制元素的重复次数,可以允许重复数为∞(这里没有必要区分重复数为可数无穷或不可数无穷等等).

例如,设复合集 S 中,a, b 的出现次数不限,c 最多出现 4 次,d 最多出现 2 次,则可记作 $S = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, 4 \cdot c, 2 \cdot d\}$.

类似地可以定义复合集的包含关系,以及并、交及差的运算:

设 S_1 和 S_2 是两个复合集，若 S_1 中每一元素的重复数都不大于 S_2 中对应元素的重复数，则称 S_1 包含于 S_2，或称 S_1 是 S_2 的子集，并记为 $S_1 \subseteq S_2$.

两个复合集 S_1 和 S_2 的并集表示为 $S_1 \cup S_2$，它表示由 S_1 和 S_2 的所有不同元素所构成的复合集，且每个元素的重复数定义为该元素在 S_1 和 S_2 中重复数的最大者.

例如，设 $S_1=\{3\cdot a, c, 2\cdot d\}$，$S_2=\{2\cdot a, b, 2\cdot c\}$，则 $S_1 \cup S_2=\{3\cdot a, b, 2\cdot c, 2\cdot d\}$.

两个复合集 S_1 和 S_2 的交集也是一个复合集，它的每一个元素的重复数定义为该元素在 S_1 和 S_2 中重复数的最小者（当某个元素不在该集合中时，我们称它在该集中重复数为 0），并记为 $S_1 \cap S_2$，如上例中，有 $S_1 \cap S_2=\{2\cdot a, c\}$；

两个复合集 S_1 和 S_2 的差，记为 $S_1 \setminus S_2$，也是一个复合集，它的每一个元素的重复数等于它在 S_1 中的重复数减去在 S_2 中的重复数得到的差与数 0 这两个数中之最大者. 例如上例中 $S_1 \setminus S_2=\{a; 2\cdot d\}$.

一个复合集 S，如果 S 中每一个元素的重复数都是有限数，则称 S 为重复数有限的复合集；否则，称 S 为重复数无限的复合集.

§1.2 抽屉原理

把 $n+1$ 个或者更多的物体放到 n 个集合之中，那么至少有一个集合里要放进两个或更多的物体，这就是“抽屉原理”的最简单的形式. 抽屉原理也称之为鸽笼原理或鞋箱原理，虽然它的正确性十分明显，很容易被并不具备多少数学知识的人所接受，但是如果将其灵活地运用，即可得到一些意想不到的效果. 各种形式的抽屉原理，在初等数学乃至高等数学中经常采用.

定理 1.2.1 把多于 n 个的元素按任一确定的方式分成 n 个集合，则一定有一个集合中含有两个或两个以上的元素.

证明 若每个集合中所含元素的数目均不超过 1,则这 n 个集合中所含元素个数就不会超过 n,这与已知有多于 n 个的元素相矛盾.

例 1.2.1 在一个13人的小组中,至少有 2 个人的生日在同一个月.

例 1.2.2 同年出生的370个人中,一定有 2 个人是同月、同日出生的.

例 1.2.3 根据常识,一个人的头发根数不会超过 20 万.因此,在一个拥有 20 万以上人口的城市中,一定可以找到两个人,他们的头发根数相同.

例 1.2.4 抽屉里有10双颜色不同的手套,从中任意取出 11 只来,则这 11 只中至少有 2 只是完整配对的.

定理 1.2.1 还有以下更一般的形式.

定理 1.2.2 把多于 $m \times n$ 的元素按任一确定的方式分成 n 个集合,则一定有一个集合中含有 $m+1$ 或 $m+1$ 个以上的元素.

证明 假若每个集合中所含元素的数目均不超过 m,则这 n 个集合所含元素个数就不会超过 $m \times n$,显然题设矛盾.

定理 1.2.3 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正整数.若将 $a_1 + \cdots + a_n - n + 1$ 个元素分成 n 个集合,则或者第一个集合中至少有 a_1 个元素,或者第二个集合中至少有 a_2 个元素,…,或者第 n 个集合中至少有 a_n 个元素.

证明 若第一个集合中至多有 $a_1 - 1$ 个元素,第二个集合中至多有 $a_2 - 1$ 个元素,…,第 n 个集合中至多有 $a_n - 1$ 个元素,则 n 个集合中至多有:

$$
\begin{aligned}
&(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \cdots + (a_n - 1) = \\
&a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n < \\
&a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n + 1
\end{aligned}
$$

这与题设矛盾.

显然,当元素个数多于 $(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \cdots + (a_n - 1)$ 时,定

理1.2.3的结论成立.

在定理1.2.3中,若取$a_1=a_2=\cdots=a_n=2$,则可得定理1.2.1.若取$a_1=a_2=\cdots=a_n=m+1$,则可得定理1.2.2.

定理1.2.4 把无穷个元素按任一确定的方式分成有穷个集合,则至少有一个集合中仍含无穷个元素.

证明 假若每个集合中都只含有穷多个元素,则这有穷个集合只能包含有穷个元素,这与题设矛盾.

上面的四个定理,都称为抽屉原理,由我们的证明可知,它们都是非常简单的.可是,正是这样一些简单的原则,在初等数学乃至高等数学中,有着许多应用.巧妙地运用这些原则,可以很顺利地解决一些看上去相当复杂,甚至觉得简直无从下手的数学题目.

§1.3 应用举例

例1.3.1 在边长为1的正方形内任意放置五个点,求证:其中必有两点,这两点之间的距离不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

证明 将这个正方形的两对对边上的中点连接起来,把它分成4个大小相等的小正方形.在大正方形里任放5个点,就相当于把5个点以任一确定的方式投放在这4个小正方形中.于是由定理1.2.1知,必有一个小正方形,其中包含两个或两个以上的点,对于其中的两点,它们之间的距离不会超过小正方形对角线的长度(即大正方形对角线长度的一半),即不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例1.3.2 在边长为1的正方形中,任意放入9个点,求证:在以这些点为顶点的许许多多三角形中,必有一个三角形,它的面积不超过$\frac{1}{8}$.

证明 用三条平行于上下底边的直线,把正方形分成4个大小相等的长方形.9个点任意放入这4个长方形中,根据定理1.2.2,即

多于 2×4 个点放入 4 个长方形中，则至少有 $2+1$ 个点(即三个点)落在某一个长方形之内. 则以这三点为顶点的三角形的面积不会超过该长方形面积的一半，即小于等于 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

例 1.3.3 某次会议有 n 位代表参加，且每一位代表至少认识其余 $n-1$ 位代表中的一位. 求证：在这 n 位代表中，至少有两位认识的代表人数相同.

证明 构造 $n-1$ 个"房间"，使第 k 个房间中的人恰好认识 k 位代表，其中 $k=1,2,\cdots,n-1$. 现共有 n 位代表要"进入"这 $n-1$ 个房间，故由定理 1.2.1 即知：至少有两位代表进入同一个房间，即这两位认识的代表人数相同.

例 1.3.4 从全世界任选6个人，其中一定可以找出这样三个人，使得他们互相都认识，或者互相都不认识.

证明 在这 6 个人中任意指定一个人，记为 A，于是可将其余的五个人分为两类：一类中的人与 A 互相认识，另一类中的人与 A 互相不认识. 由定理 1.2.2 知，至少有一类的人数不小于三. 不妨设至少有三人与 A 互相认识，且假定 B、C、D 三人与 A 互相认识.

此时，必定会出现下列两种情况之一：

(1) B、C、D 三者之间至少有两人互相认识，且不妨设 B 与 C 互相认识. 这样，A、B、C 三人互相都认识，命题成立.

(2) B、C、D 三者之间互相都不认识，显然命题也成立.

例 1.3.5 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为给定的 m 个整数，证明：一定存在满足条件：$0\leqslant k<l\leqslant m$ 的整数 k,l，使得 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ 可被 m 整除.

证明 先作出 m 个和 $S_1=a_1,S_2=a_1+a_2,\cdots,S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m$.

显然，若有一个 S_i 可被 m 整除，则结论成立. 且此时 $k=0$，$l=i$.

如果用 m 去除上面任一个和所得的余数均非零，即余数分别为

$1,2,\cdots,m-1$ 中的一个数.但现在有 m 个和,而只有 $m-1$ 个可能的余数值,故由定理 1.2.1 知,其中至少有两个和,当它们被 m 除时具有相同的余数.这表明存在整数 k 和 l,满足 $0\leqslant k<l\leqslant m$,使得 $m\mid S_l-S_k$,,即 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ 可被 m 整除.

例 1.3.6 从由1到 $2n$ 的整数中任取 $n+1$ 个数,则这 $n+1$ 个数中至少有一对数,其中一个数是另一个数的倍数.

证明 首先注意到,一个正整数或者本身是一个奇数,或者是一个偶数.如果该数是一个偶数,则经过反复地提取因数 2 后,总可以表示为:奇数 $\times 2^s$ 的形式(其中 $s=1,2,3,\cdots$).并且,这个奇数决不会超过原数的一半.

若容许 $s=0$,则奇数也可写成 $2^s\times$ 奇数的形式.于是任一正整数均可写成 $2^s\times a$ 的形式,其中 a 为奇数,s 为非负整数.

下设所取的 $n+1$ 个数是:$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$.

将这 $n+1$ 个整数都表示成 $2^s\times a$ 的形式,则 a 为满足 $1\leqslant a\leqslant 2n$的奇数,但从 1 到 $2n$ 中只有 n 个奇数,于是由抽屉原理知:必存在 $a_i\neq a_j$,但 $a_i=2^s\times a$,$a_j=2^k\times a$,不妨设 $a_i<a_j$,即 $s<k$,这表明 $a_j=2^{k-s}\times 2^s\times a=2^{k-s}\times a_i$,故 a_j 是a_i 的倍数.

例 1.3.7 一个棋手用11个星期来准备参加一次大型比赛,为了准备的更充分些,他决定每天至少下一局棋.但是,又为了使自己不至于太累,他又决定在任何一周内下棋的总局数不超过 12.证明:一定存在着连续的若干天,在此期间内该棋手恰好下了 21 局棋.

证明 用 a_i 表示这位棋手第 i 天所下棋的局数,则由题设可知 $a_i\geqslant 1\quad(i=1,2,\cdots,77)$.再记 $x_i=\sum\limits_{k=1}^{i}a_k\quad(i=1,2,\cdots,77)$ 则有

$$1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{77}\leqslant 12\times 11=132.$$

又令 $y_i=x_i+21\quad(i=1,2,\cdots,77)$ 则

$$22\leqslant y_1<y_2<\cdots<y_{77}\leqslant 153.$$

于是 $x_1,x_2,\cdots,x_{77},y_1,y_2,\cdots,y_{77}$,这 154 个整数均为 1 至 153 中的数.由抽屉原理知,其中至少有两个数相等.显然这两个数不能

同时为 $x_1, x_2, \cdots, x_{77}$ 中的数,也不能同时为 $y_1, y_2, \cdots, y_{77}$ 中的数.从而必存在整数 s 和 t,满足:$1 \leqslant s \leqslant 77, 1 \leqslant t \leqslant 77$,使得

$$x_s = y_t = x_t + 21.$$

上式表明必有 $t < s$,于是 $x_s - x_t = 21$,即从第 $t+1$ 天至第 s 天这连续的 $s-t$ 天内,该棋手恰好下了 21 局棋.

例 1.3.8 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$ 是 n^2+1 个互不相等的实数,证明:一定可从这 n^2+1 个数中选出 $n+1$ 个数,使它们构成严格单调增序列或严格单调减序列.

证明 将以 a_i 为首项的,且项数最多的下降序列的项数记为 N_i.则因为单由一个 a_i 本身即可看作一个下降序列,故得 $N_i \geqslant 1$.这表明,$N_1, N_2, \cdots, N_{n^2+1}$ 是 n^2+1 个正整数,如果其中某一个大于或等于 $n+1$,则结论就已经成立了,因为这时即可找出一个含有 $n+1$ 项的严格单调减序列.所以,下面只须讨论另外一种情况,即 $1 \leqslant N_i \leqslant n (i = 1, 2, \cdots, n^2+1)$ 的情况.

当 n^2+1 个自然数 N_i 只能取 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个可能值时,由定理 1.2.2 知,它们之中至少有 $n+1$ 个数相等,不妨设:

$$N_{i_1} = N_{i_2} = \cdots = N_{i_{n+1}}$$

其中下标满足:

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1} \leqslant n^2 + 1.$$

现在我们证明:序列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{n+1}}$ 就是一个严格单调增序列.

用反证法.假若对某个 $s (s = 1, 2, \cdots, n)$ 有 $a_{i_s} > a_{i_{s+1}}$,则因 $i_s < i_{s+1}$,故将 $a_{i_{s+1}}$ 置于以 a_{i_s} 开头的项数最多的下降序列之前,即可得到一个以 $a_{i_{s+1}}$ 为首项的下降序列,这表明:$N_{i_{s+1}} > N_{i_s}$,这与所设 $N_{i_1} = N_{i_2} = \cdots = N_{i_{n+1}}$ 矛盾.从而必有 $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{n+1}}$.

这就是说:在原数列不包含由 $n+1$ 个数所组成的严格单调减序列时,必含有由 $n+1$ 个数所组成的严格单调增数列.

例 1.3.9 任意给定正整数 m,求证:一定存在正整数 n,使得 n 是 m 的倍数,且 n 完全由 0 和 1 两个数字组成.