调和分析讲义

(实变方法)

周民强 编

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

调和分析讲义:实变方法/周民强编. 一北京:北京大学出版社,1999.5

ISBN 7-301-04137-3

Ⅰ.调… Ⅱ.周… Ⅲ.调和分析-高等学校-教材 Ⅳ.O177.5

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第11860号

书　　名:调和分析讲义(实变方法)

著作责任者:周民强　编

责 任 编 辑:刘　勇

标 准 书 号:ISBN 7-301-04137-3/O·441

出　版　者:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm

电　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　理科编辑部 62752021

电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn

排　版　者:北京高新特公司激光照排中心

印　刷　者:北京飞达印刷厂

发　行　者:北京大学出版社

经　销　者:新华书店

850×1168　32开本　9印张　230千字

1999年5月第一版　1999年5月第一次印刷

印　　数:0001—4000册

定　　价:13.00元

内 容 简 介

本书是高等学校数学、应用数学及相关专业的《实分析》教材，着重以实变方法系统介绍近代调和分析的基本理论与方法。全书共分八章。内容包括：极大函数、算子内插理论，函数空间分解，奇异积分算子，加权模不等式，有界平均振动函数空间等。其应用涉及函数论、偏微分方程和概率论等领域。

《调和分析》作为一门数学专业的研究生课程早已在高校中开设，但国内出版的适用于教学的教材却不多。本书总结了作者多年来在北京大学数学系讲授该课的经验，在所用讲义的基础上经过补充、修改整理而成。书中特别注意与本科生所学内容的衔接，为此作者专门写有第一章“基础知识”，既方便读者学习，又提高了学习效率。每章末配置适量习题并列出参考文献，附录给出习题解答与提示，供教师和学生参考。

本书可供高等学校数学系数学专业及其相关专业的高年级大学生、研究生选作教材或教学参考书，也可供数学教师、科技工作者阅读。

写在前面

80年代以来,《实分析》首先是作为一门限制性选修课后又作为必修课,纳入了北京大学数学系硕士研究生的教学计划,内容以$\boldsymbol{R}^n$上的调和分析的基本理论为主。作者曾为此写过两次授课讲义,又在教学实践中,参考同类书刊作过修改和补充。特别是注意到与本科生课程的教学大纲相衔接,以及与学生的学习条件相适应,本教材还专门写了一章"基础知识"作为开篇,每章末尾还附有适当练习与文献。鉴于目前国内同类书籍为数较少。这次印刷出版可为有关专业提供一本试用教材或教学参考书。彭立中教授审阅了全稿,并提出了许多宝贵意见,在此表示感谢。

作　者

1996 年 8 月

引　言

（一）

Fourier 分析起源于对热传导方程的研究，1810年左右，J. B. J. Fourier 撰文认为任一函数均可展成三角级数，并以此给出了热传导方程的一般解. 这一事件在一定意义上可以说是近代分析的萌芽，它引发了 Cantor 集合论以及拓扑空间的理论，而且从 Lebesgue 积分论以及 Hilbert 积分方程论中开展出来的泛函分析也与 Fourier 分析有着密切关系，这也正是 von Neumann 量子力学的基础. 因此，调和分析前身 Fourier 分析与许多不同学科分支有着密切的联系.

Fourier 分析领域内的核心问题，粗略地说，就是一个函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$

以及 Fourier 逆变换积分

$$\int_{R^1} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi$$

在何种意义下可以收敛于 $f(x)$？函数 $f(x)$ 的某种光滑性对此有何影响？

对这些问题的深入研究，自然地导致对某些函数类上各种辅助算子的研究，并且在掌握这些算子及其推广情况后，又力图将它们应用于其他数学分支. 在这里，我们稍作简介，或许对本书所述内容的背景的了解有一定的帮助.

早在40年代，鉴于 Hardy，Littlewood，M. Riesz，Paley，Zygmund 以及 Marcinkiewicz 等人的工作，人们知道了函数类与

其 Fourier 级数的性质之间的联系.这些结果的证明方法之出发点,在于将 Fourier 级数的前 N 项部分和的 Dirichlet 公式写成

$$\begin{aligned} S_N(f,x) &\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nx}\int_{\boldsymbol{R}^1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}N(x-y)}f(x-y)\,\frac{\mathrm{d}y}{y} \\ &\quad - \mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}\int_{\boldsymbol{R}^1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N(x-y)}f(x-y)\,\frac{\mathrm{d}y}{y} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nx}H(\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ny}f(y)) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}H(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ny}f(y)), \end{aligned}$$

其中 $Hg(x)$是函数 g 的 Hilbert 变换,定义为

$$Hg(x) = \int_{\boldsymbol{R}^1}g(x-y)\,\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

应当说,这一思想是在上述方向上迈出的重大一步.因为它告诉我们:一个函数 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^1)(1<p<\infty)$的 Fourier 级数依 L^p 范数收敛的问题,重点在于探讨算子 H 在 $L^1(\boldsymbol{R}^1)$上的有界性.

Hilbert 变换还在复分析领域中出现,例如一个在 $\boldsymbol{R}_+^2$ 上具有良好性质的解析函数 $F=u+\mathrm{i}v$,必由边界 $\boldsymbol{R}^1$ 上的值决定,考虑它的实部和虚部的边值,则 v 是 u 的 Hilbert 变换;又如在 Littlewood-Paley 的一个深刻结果$\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\in L^p(\boldsymbol{R}^1),\ 1<p<\infty,\right.$ 则二进分段求和 $\left.\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}S_n\hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\in L^p(\boldsymbol{R}^1)\right)$的证明中,所用到(复分析中)的辅助算子与 Fourier 分析中的辅助算子之间的联系,也涉及 Hilbert 变换.

经典 Fourier 分析的研究至50年代初发生了深刻的变化,这是从 Calderón 和 Zygmund 的著名工作引发的.其中重要的一点是,由于在拓广 Hilbert 变换到高维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 时,原先所用的单复变函数论的某些方法(如 Blaschke 乘积等)不再在多复变函数领域中有效,因此(以及其他一些原因)人们不再应用复分析方法,而是寻求实分析的手段重新阐明这一领域中的许多结果.同时,这些手段以及由此拓广而得到的那些辅助算子在偏微分方程,多复变函数论,概率论以及位势论中也显示出重要的应用.

例如对 $\boldsymbol{R}^n(n>2)$上的 Laplace 方程

$$\Delta u = f,$$

用标准牛顿位势写出，则有

$$u(x) = C_n \int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} \mathrm{d}y,$$

现在问：如果函数 f 属于某个函数空间($L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$C(\boldsymbol{R}^n)$，$\mathrm{Lip}\alpha$ 等)，那么 u 的二阶导数是否仍属于同一函数空间?将上式在积分号下求微分，可得

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} = C_{j,k} f(x) + \int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{\Omega_{j,k}(x-y)}{|x-y|^n} f(y) \mathrm{d}y,$$

其中 $\Omega_{j,k}(x)$是零次齐次函数，且在除原点外处处为光滑的，还在单位球面上的积分为零.上述积分至少对具有良好性质的函数 f 来说，总可以定义为

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y) \mathrm{d}y,$$

从而导致一个在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的奇异积分算子.(如果 $n=1$，$\Omega(x)=\mathrm{sgn}x$，此即 Hilbert 变换.)

这就是说，Laplace 方程的正则性就化为某些特定的奇异积分算子在各类函数空间上的有界性问题了.

当 $\Omega(x)=x_j/|x|$ $(j=1,2,\cdots,n)$，Tf 记为 $R_j f$，并称为 Riesz 变换，它在高维 Cauchy-Riemann 方程的表示式中扮演着重要的角色.

在 Fourier 分析领域所研究的基本算子中，必须提到 Hardy-Littlewood 极大算子 M：

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \mathrm{d}y, \quad f \in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n),$$

其中的上确界是对 $\boldsymbol{R}^n$ 中一切包含 x 的方体(其边面平行于坐标轴)Q 而取的.有关这一算子的许多结果(如有界性，Lebesgue 微分定理等)，不仅本身具有重要意义，而且由于该算子在某种意义和方式下可控制许多不同型的算子，还使它在其他问题的研究中

发挥了有效的应用.

（二）

本书共分八章：第一章介绍算子在 L^p 空间上有界性的基础知识，以及积分的估算方法，还有卷积型算子以及 Fourier 变换的初等事实. 第二章论述 Hardy-Littlewood 极大算子的重要结果. 它们在逼近恒等理论方面的应用，主要涉及 Poisson 积分和分数次积分算子. 第三、四章谈到算子内插以及 Calderón-Zygmund 分解理论，这是常用的基本研究手段. 第五章讲述奇异积分算子，如本文开始所述，是研究的主要对象. 第六章讨论算子的加权模有界性估计，尤其是系统地陈述了 A_p 权理论，附带地列举在嵌入定理方面的应用. 第七章介绍有界平均振动函数，它在 L^p 空间系列构架中占有特殊的地位，至少对奇异积分算子来说是如此. 算子的向量值不等式推广是第八章的内容，其中谈到的 Littlewood-Paley 理论算是一个初步应用吧.

目　　录

第一章　基础知识

为了便于学习下面各章节的内容，本章先对有关的基本概念和知识作一般性介绍. 除了补充若干测度与积分的事实外，还引进了算子弱有界性概念，讨论了卷积算子的初步结果. 最后，扼要地陈述了 Fourier 变换的(L^1及 L^2)一般理论，以及 $\boldsymbol{R}^n$ 上调和函数的某些性质. 对于文中的各种算例，如能熟识，必将有所助益.

§1　积分公式与分布函数

本书所论述的课题主要是在 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 上进行，其上之测度为 Lebesgue 测度或 Borel 测度 μ. 但其中许多命题对一般测度空间(X,μ)均成立，此时总假定 μ 是可数可加的、σ-有限的正测度.

在计算或估计一个积分时，诸如换元、交换积分次序以及化为一元函数的积分等都是有效的方法，现将其中的一些内容介绍如下：

我们知道，利用 $\boldsymbol{R}^n$ 中的球坐标系可得积分公式

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f(rx')(\sin\varphi_1)^{n-2}(\sin\varphi_2)^{n-3}\cdots \\ &\qquad \times \sin\varphi_{n-2} r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi_1\cdots\mathrm{d}\varphi_{n-1},\end{aligned}$$

其中，$0\leqslant\varphi_k\leqslant\pi(k=1,2,\cdots,n-2)$，$0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant 2\pi$，$r=|x|$，$x'=(x_1',x_2',\cdots,x_{n-1}')\in\Sigma$($\Sigma$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中的单位球面)，这里采用球坐标：$x_1'=\cos\varphi_1$，$x_2'=\sin\varphi_1\cos\varphi_2$，$\cdots$，$x_{n-1}'=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}$，

$x_n' = \sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$. 若记

$$\int_0^\pi\int_0^\pi\cdots\int_0^{2\pi}(\sin\varphi_1)^{n-2}\cdots\sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_1\cdots\mathrm{d}\varphi_{n-1} = \int_\Sigma \mathrm{d}x',$$

则有
$$\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_\Sigma \int_0^\infty f(rx')r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}x'.$$

这一公式对于 f 是向径函数，即 $f(x)=f(|x|)$时的计算尤为方便.

例 记 ω_n 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中单位球面的面积，Ω_n 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中单位球体的体积，则 $n>1$时有

$$\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2), \quad \Omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2).$$

证明 一方面，我们有

$$I = \int_{\boldsymbol{R}^n} \mathrm{e}^{-|x|^2}\mathrm{d}x = \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x_k^2}\mathrm{d}x_k = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right\}^n = \pi^{n/2}.$$

另一方面，又有

$$I = \int_\Sigma \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}\omega_n\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\cdot t^{n/2-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\omega_n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

从而可知
$$\omega_n = 2\pi^{n/2}\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

此外，由于

$$\Omega_n = \int_{|x|\leqslant 1}\mathrm{d}x = \int_\Sigma \int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}x' = \frac{\omega_n}{n},$$

故得
$$\Omega_n = 2\pi^{n/2}\Big/n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \pi^{n/2}\Big/\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right).$$

对于积分交换次序，我们有比 Fubini 定理更广的 Minkowski 不等式：

定理 1 设(X,μ)，(Y,ν)是两个测度空间，$f(x,y)$在 $X\times Y$ 上是关于 $\mu\times\nu$ 的可测函数. 若对 a. e. $y\in Y$，函数 $f(\cdot,y)\in L^p(X,\mu)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，且

$$\int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}\mathrm{d}\nu(y) = A < \infty,$$

则 $$\left\|\int_Y f(\cdot,y)\mathrm{d}\nu(y)\right\|_{L^p(X,\mu)} \leqslant \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}\mathrm{d}\nu(y).$$

证明 $p=\infty$时结论显然成立.

设 $p<\infty$,且记 p'是 p 的共轭指标. 令
$$F(x) = \int_Y |f(x,y)|\mathrm{d}\nu(y).$$
从而只需指出:对一切满足$\|g\|_{L^{p'}(X,\mu)}=1$的简单函数 $g(x)$,有
$$\begin{aligned}&\sup_g\left|\int_X F(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x)\right|\\ &\qquad\leqslant \sup_g\int|F(x)||g(x)|\mathrm{d}\mu(x)\leqslant A.\end{aligned}$$
为此,应用 Fubini 定理以及 Hölder 不等式,有
$$\begin{aligned}&\int_X|F(x)||g(x)|\mathrm{d}\mu(x)\\ &\qquad\leqslant\int_X\left\{\int_Y|f(x,y)|\mathrm{d}\nu(y)\right\}|g(x)|\mathrm{d}\mu(x)\\ &\qquad\leqslant\int_Y\left\{\int_X|f(x,y)||g(x)|\mathrm{d}\mu(x)\right\}\mathrm{d}\nu(y)\\ &\qquad\leqslant\int_Y\|f(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}\|g\|_{L^{p'}(X,\mu)}\mathrm{d}\nu(y) = A.\end{aligned}$$
证毕.

下面我们引入分布函数的概念,并通过它将积分化为$(0,\infty)$上的 Riemann-Stieltjes 积分.

定义 设 $f(x)$是(X,μ)上的可测函数,记 $E_f(\lambda)=\{x\in X: |f(x)|>\lambda\}$,$\lambda>0$,并称
$$f_*(\lambda) = \mu(E_f(\lambda))$$
为 f 的**分布函数**.

关于分布函数,我们有下述初等性质:

(i) $f_*(\lambda)$是递减且右连续的函数.

(ii) 若$|f(x)|\leqslant|g(x)|$,则 $f_*(\lambda)\leqslant g_*(\lambda)$.

(iii) 若$\{f_n(x)\}$是非负可测函数列,且有

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant \cdots \to f(x) \quad (n \to \infty),$$

则

$$(f_1)_*(\lambda) \leqslant (f_2)_*(\lambda) \leqslant \cdots \leqslant (f_n)_*(\lambda) \cdots \to f_*(\lambda) \quad (n \to \infty).$$

(iv) 若 $|f(x)| \leqslant |g(x)| + |\varphi(x)|$,则

$$f_*(\lambda) \leqslant g_*(\lambda/2) + \varphi_*(\lambda/2).$$

(v) 对任意的 $0<p<\infty$以及 $\lambda>0$,有

$$f_*(\lambda) \leqslant \lambda^{-p}\int_{E_f(\lambda)} |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x).$$

(vi) 若 $f\in L^p$, $1\leqslant p<\infty$,则

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^p f_*(\lambda) = 0 = \lim_{\lambda\to 0}\lambda^p f_*(\lambda).$$

(vii) 若 $\int_0^\infty \lambda^{p-1} f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda<\infty$,则

$$\lambda^p f_*(\lambda) \to 0 \ (\lambda \to +\infty \text{ 或 } \lambda \to 0).$$

证明 (i) 设$\{\lambda_n\}$是递减正数列且以 λ 为极限,则

$$E_f(\lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_f(\lambda_n).$$

由于$\{E_f(\lambda_n)\}$是递增集合列,故知

$$\lim_{n\to\infty} f_*(\lambda_n) = f_*(\lambda).$$

这说明 $f_*(\lambda)$是右连续函数.

(vi) 从不等式

$$\lambda^p f_*(\lambda) \leqslant \int_{E_f(\lambda)} |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)$$

可知 $\mu(E_f(\lambda))=f_*(\lambda)\to 0$ $(\lambda\to+\infty)$. 因此可推有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{E_f(\lambda)} |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

从而又知 $\lambda^p f_*(\lambda)\to 0$ $(\lambda\to+\infty)$.

取定 $\sigma>0$且 $\lambda<\sigma$,我们有

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^p f_*(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^p (f_*(\lambda) - f_*(\sigma))$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \lambda^p \mu(\{x \in X: \lambda < |f(x)| \leqslant \sigma\})$$

$$\leqslant \int_{\{x \in X: |f(x)| \leqslant \sigma\}} |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x).$$

由 σ 的任意性可知 $\lambda^p f_*(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to 0)$.

(vii) 从不等式

$$f_*(\lambda)\lambda^p(1 - 2^{-p}) \leqslant p\int_{\lambda/2}^{\lambda} t^{p-1} f_*(t)\mathrm{d}t$$

可知结论成立.

定理 2 设 $f(x)$是(X,μ)上的可测函数,且$1 \leqslant p < \infty$,则

(i) $\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = p\int_0^{\infty} \lambda^{p-1} f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda$;

(ii) 若 $f(x)$是有限值的,且对一切 $\lambda > 0$有 $f_*(\lambda) < \infty$,则

$$\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = -\int_0^{\infty} \lambda^p \mathrm{d}f_*(\lambda).$$

证明 先证明(ii). 由条件知右端的积分是有意义的,而左端的积分可按下述方式表成 Lebesgue 积分和:令 $0 < \varepsilon < 2\varepsilon < \cdots < m\varepsilon < \cdots$,以及

$$E_j = \{x \in X: (j-1)\varepsilon \leqslant |f(x)| < j\varepsilon\}, \quad j = 1, 2, \cdots,$$

则 $\mu(E_j) = f_*((j-1)\varepsilon) - f_*(j\varepsilon)$,且有

$$\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{+\infty} (j\varepsilon)^p \mu(E_j)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{+\infty} (j\varepsilon)^p [f_*(j\varepsilon) - f_*((j-1)\varepsilon)]$$

$$= -\int_0^{\infty} \lambda^p \mathrm{d}f_*(\lambda).$$

其次证(i). 若等式两端的积分值是无限的,则等式显然成立. 若其中的一个积分是有限的,则显然 $f_*(\lambda) < +\infty$,而且 $f(x)$ 是几乎处处有限的. 从而知(ii)中积分等式成立. 再由 $\lambda^p f_*(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to 0$或$+\infty)$以及分部积分公式即知