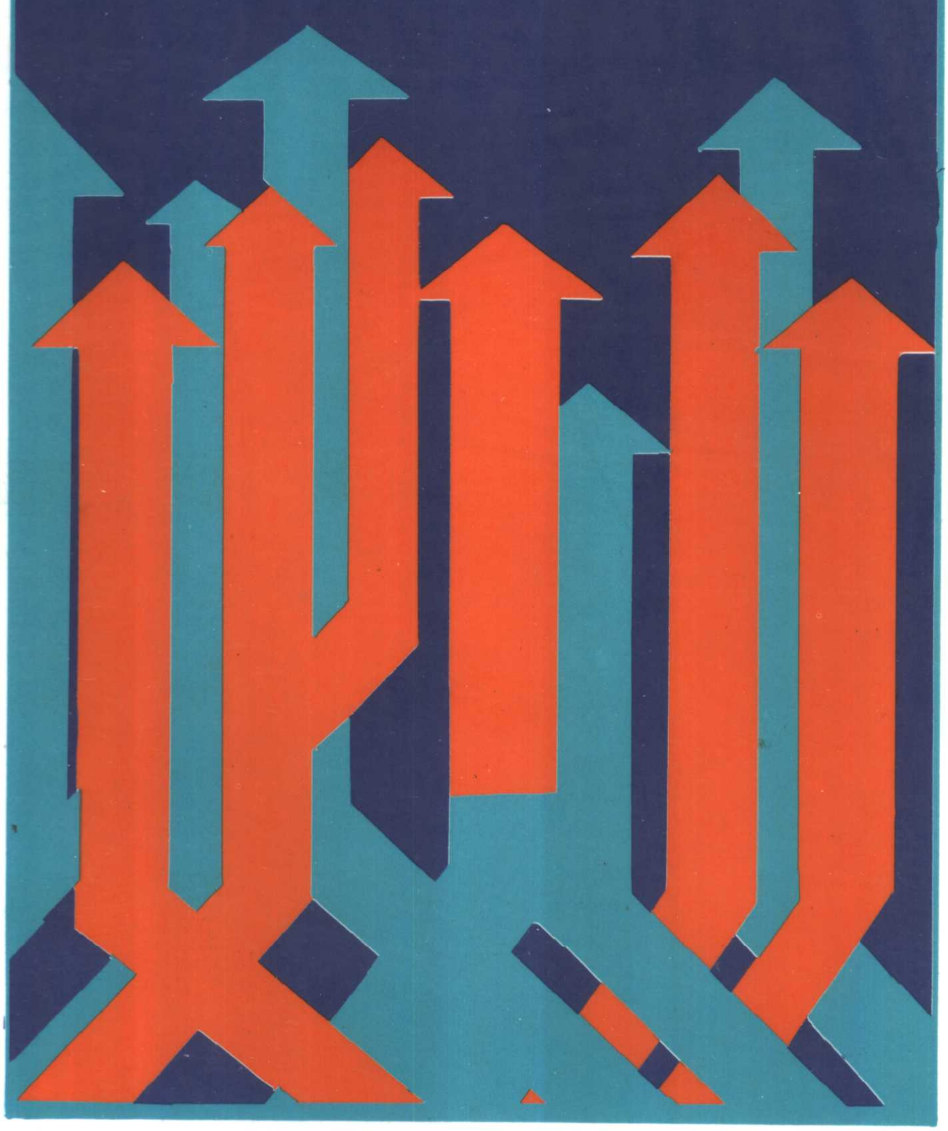
fei ji suan ji zhuan ye xi lie jao cai

非计算机专业系列教材

离散数学简明教程

LI SAN SHU XUE JIAN MING JIAO CHENG

王玉书　张伟　编著



大连理工大学出版社

内 容 简 介

本书用简明扼要的语言，系统地介绍离散数学的基本知识。全书共分为七章。第一章和第二章介绍集合论的基本知识；第三章和第四章介绍数理逻辑的命题逻辑和谓词逻辑；第五章和第六章介绍代数结构和布尔代数基本知识；第七章介绍图论基本知识。

本书可作为高校非计算机专业学生学习计算机理论与应用知识的教材和教学参考书，也可作为各类高校计算机专业的教材和教学参考书。

非计算机专业系列教材

离散数学简明教程

王玉书 张 伟 编著

* * *

大连理工大学出版社出版发行

（大连市凌水河 邮政编码 116024）

大连理工大学印刷厂印刷

* * *

开本：787×1092 1/16 印张：9.5 字数：219 千字

1996 年 11 月第 1 版 1996 年 11 月第 1 次印刷

印数：1－5000 册

* * *

责任编辑：郭学满 责任校对：寸 土

封面设计：孙宝福

* * *

ISBN 7-5611-1107-X / TP·98 定价：12.00 元

前　言

离散数学是计算机科学的理论基础之一，它研究的是离散量和离散量之间的关系。离散数学知识是从事计算机理论和应用工作者必备的数学知识。因此，它不仅是计算机专业的基础课程，而且也是从事计算机开发与应用工作的科技人员应该掌握的基础知识。

本书是为非计算机专业学生辅修计算机专业的课程而编写的教材。书中所涉及的内容也适合于计算机专业的大专、中专和成人高等教育的学生选作教材。书中带有 * 号的内容是供计算机专业讲授的。因为本书没有涉及更多的高等数学知识，所以本书不仅可作为各类高校的教材，也可作为具有高中以上文化程度的读者自学使用。

在编写本书过程中，作者除了考虑把离散数学的基本知识介绍给学生，为学生进一步学习其他计算机课程打下基础外，更考虑到，帮助读者提高概念理解能力和数学思维能力。正确推理和严密思维的能力，不仅是计算机理论工作者，也是从事计算机软件开发和硬件设计的人员必须具备的品质。因此，对书中的大部分定理，作者都给出了完整且严格的证明，没有因本书是非计算机专业教材，而简单地罗列定理，使学生知其然，不知其所以然。

本书阐述了离散数学的基本知识：

第一章和第二章介绍集合论中的集合、关系和影射等基础知识；

第三章和第四章介绍命题逻辑和谓词逻辑的基本知识；

第五章着重介绍近世代数的代数和群，也介绍了环和域；

第六章介绍布尔代数的基本知识；

第七章介绍了图论的基本知识。

书中各章具有相对独立性。第一章和第二章、第三章和第四章、第五章和第六章以及第七章分别各是一个整体，每一部分的知识和符号几乎不涉及其他部分知识内容。因此，读者不必读前面的章节，便可直接阅读所感兴趣的任何部分内容。

本书语言精炼，内容通俗易懂，深入浅出，是非计算机专业学生学习计算机专业课程的良师益友，也是计算机专业师生和工程技术人员的必备参考书。

本书第一作者曾在吉林大学王湘浩教授指导下攻读硕士学位，王湘浩教授严谨的治学态度、孜孜不倦的工作热情、为人谦和的优良品德，给作者留下了深刻的印象，并受益终身。借本书出版之际，谨向王湘浩教授表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中错误再所难免，希望广大读者不吝指正。

作　者

1996 年 11 月于沈阳

目　录

第一章　集合

集合论是现代各科数学的基础，它渗入于许多科学领域。本章和下一章将介绍集合论的基础知识。本章给出集合的基本概念。

1.1　集合的概念

集合是数学中最基本的也是不能精确定义的概念。通常人们把所关心的事物称作对象。直观地说，把一些不同的对象视为一个整体时，这个整体就是**集合**。组成集合的各个对象称作集合的**元素**。如，我们把一个班级的所有学生视为一个整体时，这个整体就是由学生构成的集合，学生是这个集合的元素；把平面上的所有点视为一个整体，这个整体就是由点构成的集合，平面上的点是这个集合的元素；如果把你拥有的东西视为一个整体，这个整体就是你的东西构成的集合，你的每一件东西就是这个集合的元素。

习惯上，用大写英文字母表示集合，用小写英文字母表示集合的元素。若某个对象 a 是集合 S 的元素，则说 a **属于** S，记作 $a \in S$；若某个对象 a 不是集合 A 的元素，则说 a **不属于** S，记作 $a \notin S$。如果一个集合是由有限个元素构成的，则称它为**有限集**(合)，否则称它为**无限集**(合)或**无穷集**。集合 S 中元素的数目称为集合 S 的**基数**或**元数**，记作 $|S|$。对于有限集合，集合中元素的数目就是集合 S 的基数。例如，若 $A=\{a,b\}$，则 $|A|=2$ 或 $|\{a,b\}|=2$。关于无限集的基数的规定和确定比较复杂，本书将不做介绍。

当集合不含任何元素时，即基数是 0 时，称它为**空集**，记作 $\varnothing$ 或 $\{\}$。例如，集合 $A=\{x|x<0 \text{且} x>1\}$ 就是一个空集。注意，空集也是集合。集合也可以作为集合中的元素。例如，$A=\{\{a\},\{a,b\},\{c,d,e\},\varnothing\}$。也要注意，$\varnothing$ 不同于 $\{\varnothing\}$。

一般地，表示集合的方法有两种。一种是**列举法**，将一个集合的所有元素按任意顺序列出来。例如，$A=\{0,a,5\}$，$C=\{1,3,5,7,\cdots\}$，$N=\{\cdots,-2,-1,0,1,2\cdots\}$。当集合是有限的或集合的元素有规律列出时采用这种方法。另一种是**描述法**，以这样的形式表示集合：$A=\{x|P(x)\}$，其中 $P(x)$ 表示属于集合 A 的对象（或别的集合中的元素）符合的条件或特征。例如，$P=\{x|x\text{是中国人}\}$，$S=\{y|2<y<3\}$。

本章和下一章中用 N 表示全体自然数，即非负整数构成的集合；P 表示全体素数构成的集合；I 表示全体整数构成的集合；Q 表示全体有理数构成的集合；R 表示全体实数构成的集合；C 表示全体复数构成的集合。

定义1.1.1 设 A,B 是集合。如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，或 B **包含** A，或 A **被** B **包含**，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$。如果 A 中至少有一个元素不是 B 的元素，则称 A 不是 B 的子集，或 B 不包含 A，或 A 不被 B 包含，记作 $A \not\subset B$。

例如，$A=\{a,b,c,d\}, B=\{c,d\}, C=\{d\}$，则 $B\subseteq A, C\subseteq A, C\subseteq B$。对于任意集合 A，由子集的定义，显然有 $A\subseteq A$，即 A 是其自身的子集。

定义1.1.2 如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不在 A 中，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$。

定理1.1.1 空集是任何集合的子集。

证明 反证法。若有集合，不妨设为 A，$\varnothing$ 不是它的子集。依据子集合定义，则 $\varnothing$ 中至少有一个元素 a，使得 $a\notin A$。但空集 $\varnothing$ 不含任何元素，因此这是不可能的。证毕。

通常把一个集合本身和空集称作集合的**平凡子集**。

定义1.1.3 如果集合 A 和 B 是具有相同的元素，则称 A 和 B **相等**，记作 $A=B$；否则，称 A 和 B **不相等**，记作 $A\neq B$。

例如，设集合 $A=\{1,-1\}$，　$B=\{x \mid x^2-1=0\}$，则 $A=B$。

定理1.1.2 设 A，B 是集合，则 $A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。

证明 必要性。假设 $A=B$，则对任意 $x\in A$，由集合相等的定义，有 $x\in B$。再由子集的定义，有 $A\subseteq B$。类似地能够证明 $B\subseteq A$。

充分性。若 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq A$。用反证法。若 $A\neq B$，则 A 中和 B 中元素不完全相同，不妨设 A 中有一个元素 x 不在 B 中，这与 $A\subseteq B$ 相矛盾。故 $A=B$。证毕。

定理1.1.3 空集是唯一的。

证明 任取两个空集 $\varnothing_1$ 和 $\varnothing_2$，由于空集是任意集合的子集，故 $\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$ 和 $\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$，由定理1.1.2，有 $\varnothing_1=\varnothing_2$，即空集是唯一的。

定义1.1.3 设 A 是集合。由 A 的所有子集构成的集合称为 A 的**幂集**，记作 2^A 或 $\rho(A)$。

例如，若 $A=\{a,b\}$，则 $2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$。

定理1.1.4 如果有限集 A 的基数是 n，则 $|\rho(A)|=2^n$。

该定理的证明留给读者。

习题1.1

1. 证明定理1.1.4。
2. 求下列集合的幂集：

(1) $\{\{a\},a\}$　(2) $\{\{1,\{2,3\}\}\}$　(3) $2^{\varnothing}$　(4) $\{\varnothing,1,\{2\}\}$

3. 用列举法表示下列集合：

(1) 偶数集合。

(2) 能被3整除的数的集合。

(3) 一年的月份集合。

4. 用描述法表示下列集合：

(1) 过平面点 (1, 1) 和 (−1, 4) 两点的直线上的点的集合。

(2) 中国18岁和18岁以上男性公民的集合。

(3) 能被3整除的数的集合。

5. 存在集合 A, B，使得 $A \subseteq B$ 且 $A \in B$ 吗？举例说明。

6. 对于任何集合 A, B, C，确定下列命题是否正确，并证之。

(1) 如果 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \in C$。

(2) 如果 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$。

(3) 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$，则 $A \in C$。

(4) 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$，则 $A \subseteq C$。

(5) 如果 $A \in B$ 且 $B \in C$，则 $A \subseteq C$。

1.2 集合的运算

在这一节将介绍集合上能够进行的一些运算，以及集合基数计算的包含排斥原理。

1.2.1 集合的运算

定义1.2.1 设 A、B 是两个集合，集合 $\{x|x \in A 或 x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A \cup B$。

例如，$A = \{a,b,c\}, B = \{b,c,d,e\}$，则 $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$。

定义1.2.2 设 A，B 是两个集合，集合 $\{x|x \in A 且 x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**)，记作 $A \cap B$。

例如，$A = \{1,2,3,4\}$，$B = \{2,4,6\}$，则 $A \cap B = \{2,4\}$。

如果 A 与 B 无公共元素，则 $A \cap B = \varnothing$，此时称 A 与 B **不相交**。

集合的并和交运算可以推广到多个（甚至无限个）集合上。

定义1.2.3 由同时属于 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 所有的元素组成的集合称作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交集，记作 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$。

定义1.2.4 由 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 所有的元素组成的集合称作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集，记作 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$。

定义1.2.5 设 A，B 是任意两个集合，称集合 $\{x|x \in A 且 x \notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**（简称**差**），记作 $A - B$。

例如，$A = \{2,5,7,9\}, B = \{1,2,3,7\}$，则

$$A - B = \{5,9\} \qquad B - A = \{1,3\}$$

在许多问题中，所考虑的集合常常是某个特定集合的子集。我们将问题中涉及的全部对象构成的集合称为**全集**，通常用 U 表示全集。于是，在讨论问题时涉及的每一个集合都是全集 U 的子集。

定义1.2.6 设 A 是一个集合。我们称全集 U 与 A 的差集 $U - A$ 为 A 的补集(简称补)，

记作 $\overline{A}$。

例如，设 $U=\{1,2,3,4,\cdots\}$, $A=\{1,3,5,\cdots\}$，则 $\overline{A}=\{2,4,6,\ldots\}$。

表1.2.1列出了集合并、交、补和差运算性质。

对于任意集合 A,B,C,D，下面的结论是显然的：

(1) $A\subseteq A\cup B$；

(2) 如果 $A\subseteq B$ 且 $C\subseteq D$，则 $A\cup C\subseteq B\cup D$ 和 $A\cap C\subseteq B\cap D$。

下面给出表1.2.1的4.(1)式的证明。

证明 设 A,B,C 是任意集合。对于任何 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$。不妨设 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$，$x\in A$ 且 $x\in B\cup C$。于是，$x\in A\cap(B\cup C)$。因此

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$$

对于任何 $x\in A\cap(B\cup C)$，则 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$。由于 $x\in B\cup C$，则 $x\in B$ 或者 $x\in C$。不妨设 $x\in B$，从而 $x\in A\cap B$，$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$。于是

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

综合上述，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。证毕。

采用类似4.(1)式的证明方法，不难证明表中其它各式。

表 1. 1. 2　集合运算性质

1.	(1)	$A\cup A=A$	(2)	$A\cap A=A$	幂等律
2.	(1)	$A\cup B=B\cup A$	(2)	$A\cap B=B\cap A$	交换律
3.	(1)	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$			结合律
	(2)	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$			
4.	(1)	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$			分配律
	(2)	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$			
5.	(1)	$A\cup\varnothing=A$	(2)	$A\cap U=A$	
6.	(1)	$A\cup\overline{A}=U$	(2)	$A\cap\overline{A}=\varnothing$	
7.	(1)	$A\cup U=U$	(2)	$A\cap\varnothing=\varnothing$	
8.	(1)	$\overline{\overline{A}}=A$			
9.	(1)	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	(2)	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$	摩根律
10.	(1)	$A\cup(A\cap B)=A$	(2)	$A\cap(A\cup B)=A$	吸收律
11.		$A-B=A\cap\overline{B}=A-A\cap B$			

集合之间的关系和集合的运算可以用文氏（John Venn，英国数学家，1844年～1883年）图来直观地表示。全集 U 用一个长方形区域表示，长方形中的任意一个圆内的所有点表示 U 的一个子集。例如图1.2.1中示出了集合间的关系和运算的一些文氏图。

使用文氏图用图解的方式分析集合运算性质，以及由运算得到的集合的元数。例如设 A,B 是两个有限集合，则根据文氏图不难得出下面的公式：

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

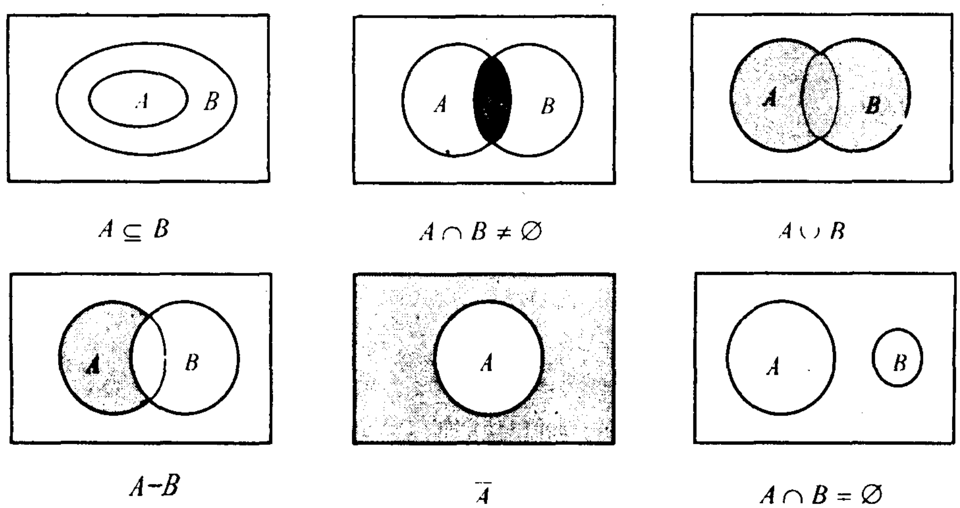


图 1.2.1 文氏图

1.2.2 包含排斥原理

对于有限集合，求运算得到的集合中元素的数目是经常遇到的问题，下面介绍计算的方法。

定理1.2.1 设 A,B 为有限集合，则

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1.2.1}$$

证明 显然，$A \cup B$ 由不相交的 $A \cap \overline{B}$，$\overline{A} \cap B$ 和 $A \cap B$ 三个集合的并构成。于是

$$|A \cup B| = |A \cap \overline{B}| + |\overline{A} \cap B| + |A \cap B| \tag{1.2.2}$$

由于 $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ 和 $B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$，其中 A 和 B 分别表示成两个不相交集合的并，因此

$$|A| = |A \cap \overline{B}| + |A \cap B| \quad 和 \quad |B| = |\overline{A} \cap B| + |A \cap B|$$

由这两个等式解出 $A \cap \overline{B}$，$\overline{A} \cap B$ 代入(1.2.2)式，整理可得(1.2.1)式。证毕。

定理1.2.2 对于任意三个有限集合 A,B,C，有

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

定理1.2.3 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为有限集合，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

定理1.2.3读者用归纳法可以证明。

定理1.2.1、定理1.2.2和定理1.2.3均称作**包含排斥原理**。

习题1.2

1. 已知$U = \{x \mid x \in N$ 且 $x \le 10\}$，$A = \{1,2,3,4,5\}$，$B = \{12,6,7\}$，$C = \{1,2,3,6,8,9,10\}$，写出下面各式的结果：

$A \cup B$、$A \cap B$、$A - B$、$\overline{A}$、$A \cap B \cap C$、$A - (B \cap C)$、$(B \cap C) - (A \cap C)$

2. 证明对于任何 A, B，有 $\rho(A) \cap \rho(A) = \rho(A \cap B)$。

3. 利用包含排斥原理对下面问题求解：

对某校学生进行调查，结果1500人爱好数学，1270爱好物理，836人爱好化学，983人爱好数学和化学，573人爱好数学和物理，420人爱好物理和化学，311爱好数学、物理和化学，问至少爱好这三门功课中一门的学生有多少人？

4. 证明表1.2.1中的6,9,10,11中各式。

5. 证明以下命题和等式：

(1) 如果 $A \subseteq B$，则 $A \cup B \subseteq B$。

(2) 如果 $A \subseteq B$，则 $A \cap B \subseteq A$。

(3) $A \cap (B - A) = \varnothing$。

(4) $A \cup (B - A) = A \cup B$。

(5) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$。

(6) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$。

6. 回答以下各题并说明理由：

(1) 假设 $A \ne \varnothing$ 且 $A \cup B = A \cup C$，那么一定有 $B = C$ 吗？

(2) 假设 $A \ne \varnothing$ 且 $A \cap B = A \cap C$，那么一定有 $B = C$ 吗？

(3) 假设 A, B 是集合，那么一定 $A - B \ne B - A$ 吗？

7. 设 A, B 是两个集合，我们称集合 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ 为 A 与 B 的对称差。证明：

(1) $A \oplus A = \varnothing$；

(2) $A \oplus B = B \oplus A$；

(3) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$；

(4) $A \oplus \varnothing = A$。

第二章　关系与函数

由于世间许多事物都有密切联系，因此事物之间就存在关系。如日常生活中"朋友"、"父子"、"师生"和"上下级"等关系；数之间的"大于"、"等于"和"小于"等关系。在本章将对关系给出一个形式化描述，研究常见一些关系的性质，最后给出映射的概念。

2.1　关系及表示法

2.1.1　笛卡尔积

定义 2.1.1 两个对象a和b组成的长度为2的序列称作**有序对**，**或序偶**，**或二元组**，记作(a,b)。规定两个有序对(a,b)和(c,d)相等当且仅当$a=c,b=d$。若(a,b)和(c,d)相等，则记作$(a,b)=(c,d)$。

有序对强调的是两个对象之间具有某种联系，并且这种联系是有顺序的。如果(a,b)表示a与b是夫妻，a是夫，b是妻，那么(b,a)表示b与a是夫妻，b是夫、a是妻。因此，一般说来，$(a,b)\neq(b,a)$。

定义 2.1.2 n个对象 a_1，a_2，…，a_n 组成的长度为n的序列称为**有序n元组**，用$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$表示，其中a_i称为该有序n元组的**第i个分量**。规定

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\Leftrightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n$$

其中$\Leftrightarrow$表示当且仅当。

在有序对的定义中，a和b泛指两个对象，不要求它们出自同一个集合。例如，a有5元钱，可以用有序对$(a,5)$表示。其中a属于人名的集合，5属于钱数的集合。

定义 2.1.3 设A和B是任意两个集合。全体有序对(a,b)，其中$a\in A,b\in B$，所构成的集合称为A和B的**笛卡尔积**，**或直积**，记作$A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A \text{ 且 } b\in B\}$$

例 2.1.1 设$A=\{0,1\},B=\{0,2\}$，那么

$$A\times B=\{(0,0),(0,2),(1,0),(1,2)\}$$

$$B\times A=\{(0,0),(0,1),(2,0),(2,1)\}$$

一般地，$A\times B\neq B\times A$。

定义 2.1.4 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为任意n个集合。全体有序n元组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中$a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n$，所构成的集合称为$A_1,A_2,\ldots,A_n$的**笛卡尔积**，**或直积**，记作$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，即

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

若 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$，将 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 缩写为 A^n。

定理 2.1.1 如果 A, B 是集合，那么

(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(3) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

(4) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

证明 仅对(1)给出证明。

任取 $(a,b) \in A \times (B \cup C)$，则 $a \in A$ 且 $b \in (B \cup C)$，即 $a \in A$ 且 $b \in B$ 或 $b \in C$，不妨设 $b \in B$。从而 $(a,b) \in A \times B$，$(a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$。这就证明了

$$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$$

另一方面，任取 $(a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$，则 $(a,b) \in A \times B$ 或 $(a,b) \in A \times C$，不妨设 $(a,b) \in A \times B$。于是，$a \in A$ 且 $b \in B$。从而 $a \in A$ 且 $b \in B \cup C$，即 $(a,b) \in A \times (B \cup C)$。这就证明了

$$(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$$

综上所述，有 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$。证毕。

2.1.2 关系的概念

定义 2.1.5 设 A 和 B 是两个集合，$A \times B$ 的子集 R 称为 A 到 B 的一个**二元关系**。当 $A = B$ 时，称 R 为 **A 上的一个二元关系**。若 $R = \varnothing$，则称 R 为 A, B 上的**空关系**。若 $R = A \times B$，则称 R 为 A 到 B 的**全关系**。若 $(a,b) \in R$，则称 a 与 b **有关系** R，记作 aRb。若 $(a,b) \notin R$，则称 a 与 b **没有关系** R，记作 $a\overline{R}b$。

例 2.1.2 设 $A = \{1,3,5,7\}, B = \{2,4,6\}$，定义二元关系 $R:(a,b) \in R \Leftrightarrow a < b$，称 R 为"小于"关系，R 也可记为 $<$。于是

$$< \ = \{(1,2),(1,4),(1,6),(3,4),(3,6),(5,6)\}$$

例 2.1.3 设 $A = \{1,2,3,4\}$，定义 A 上的二元关系 $R:(a,b) \in R \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{2}$ 是整数，称 R 为"模 2 同余"关系。$(a,b) \in R$ 也可记为 $a \equiv b(\mathrm{mod}\, 2)$。于是

$$R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,3),(3,1),(4,2),(4,4)\}$$

定义 2.1.6 设 R 是从 A 到 B 的二元关系，A 的一个子集

$$\{a \mid a \in A \text{ 且存在 } b\text{，使得 } (a,b) \in R\}$$

称作 R 的**定义域**，记作 Dom R。B 的一个子集

$$\{b \mid b \in B \text{ 且存在 } a \text{ 使得 } (a,b) \in R\}$$

称作 R 的**值域**，记作 Ran R。

例 2.1.2 中 Dom $R = \{1,3,5\}$，Ran $R = \{2,4,6\}$。

定义 2.1.7 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个集合，则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的任意子集 R 称作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 上的一个 **n 元关系**。当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ 时，则 R 称作 A^n 上的一个 n 元关系。

例 2. 1. 4 R 是实数集合，R^3 上的三元关系

$$R_1 = \{(x,y,z) | (x,y,z) \in R^3, 且 x + y = z\}$$

从解析几何知道，它代表一个过坐标原点的平面。

特别地，对于 A 上的二元关系 $I = \{(x,x) | x \in A\}$ 称作 A 上**恒等关系**。

由于一个集合上的二元关系是一个集合，因此关系有并、交、补和差的运算。

2. 1. 3　二元关系的矩阵和图形表示

集合上的二元关系除了能用有序对表示，还能用矩阵和图形表示。

定义 2. 1. 8 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$、$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 是两个有限集合，R 是从 A 到 B 的二元关系，称 $m \times n$ 阶矩阵 $M_R = [m_{ij}]$ 为 R 的关系矩阵，其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, 当 a_i R a_j \\ 0, 当 a_i \overline{R} a_j \end{cases} \qquad i = 1,2,\cdots m, \ j = 1,2,\cdots,n$$

例 2. 1. 5 下面的是例 2.1.2 中关系 R 的关系矩阵。

$$M_R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{array}$$

在矩阵 M_R 的上方和右侧分别标记出了集合 B 和 A 的元素。

有限集上的二元关系还可以使用直观的关系图来表示。这种图就是图论中所说的有向图。

设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$R$ 是 A 上的二元关系。对于元素 a_i，用加标 a_i 的小圆表示，称此点为顶点 a_i；如果 $a_i R a_j$，则画一条从顶点 a_i 到顶点 a_j 的带箭头的线，称此线为**弧**；如果 $a_i R a_i$，则画一条从顶点 a_i 到顶点 a_i 的带箭头的封闭弧，称该弧为**自环**。依据这样的规定，对于关系 R 画出的图称为 R 的**关系图**。

例 2. 1. 6 设集合 $A = \{1,2,3,4,5\}$ 和 A 上的关系

$$R = \{(1,4),(1,5),(2,3),(3,1),(3,4),(4,4)\}$$

试画出 R 的关系图。

解 图 2.1.1 是关系 R 的关系图。

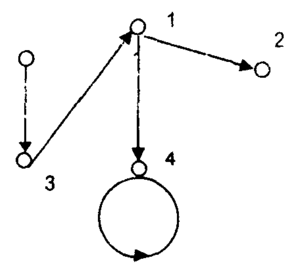


图 2.1.1

由于关系图具有直观和判断关系性质简捷的特点，它是分析关系性质常用的工具。当集合比较大时，需用关系矩阵表示关系，以便于计算机分析和判定关系具有的性质。

习题 2.1

1. 说出有序对 (a,b) 与集合 $\{a,b\}$ 有什么不同。

2. 设 $A=\{x|x\in R$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{y|y\in R$ 且 $1<y<2\}$。表示出 $A\times B$ 和 $B\times A$, $A\times B\times A$，并说明它们的几何意义。其中 R 为全体实数集合。

3. 证明定理 2.1.1 中各式。

4. 证明

(1) 若 $A\times A=B\times B$，则 $A=B$；

(2) 若 $A\neq\varnothing, A\times B=A\times C$，则 $B=C$。

5. 若 $A=\varnothing$，问 $A\times B$ 的结果是什么？

6. 设 $A=\{a,b\}, B=\{c,(d,e)\}$，计算出 $A\times B, B\times A$ 和 $A\times B\times A$。

7. 集合 $A=\{0,1,2,3\}$，A 上的关系 $R=\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(3,2),(3,3)\}$，写出 R 的关系矩阵和画出关系图。

8. 已知 $A\subseteq C$ 和 $B\subseteq D$，求证 $A\times B\subseteq C\times D$。

9. 已知 $A\times B\subseteq C\times D$，问一定有 $A\subseteq C$ 和 $B\subseteq D$ 吗？

10. 设 A,B,C,D 是任意集合，证明 $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

11. 设 A 和 B 为有限集合，其元数分别为 m 和 n。A 上的不同的二元关系有多少？从 A 到 B 的不同二元关系有多少？

12. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，集合 A 上的二元关系为

$$R_1=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,1),(2,4),(3,1),(3,2),(3,5),(5,1),(5,5)\}$$
$$R_2=\{(1,2),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,5),(5,2),(5,4)\}$$

求出 $R_1\cup R_2, R_1\cap R_2, R_1-R_2, R_2-R_1$。

2.2 关系的一些性质

集合上二元关系是最常见和最有用的，二元关系的一些性质在关系的研究中起重要作用。为了说话简便，当不加说明时所说的关系都是二元关系。

定义 2.2.1 设 R 是集合 A 上的二元关系。

(1) 如果对于任何 $a\in A$，均有 aRa，那么称 R 是**自反的**。

(2) 如果对一切 $a\in A$，均有 $a\overline{R}a$，那么称 R 是**反自反的**。

(3) 对任意 $a,b\in A$，如果 aRb，则 bRa，那么称 R 是**对称的**。$a\neq b$

(4) 对任意 $a,b\in A$，如果 aRb 且 bRa，则 $a=b$，那么 R 是**反对称的**。

(5) 对任意 $a,b,c\in A$，如果 aRb 且 bRc，则 aRc，那么称 R 是**传递的**。

例 2.2.1 设 I 为整数集。

(1) 整数集合 I 上的“小于”关系是反自反的、反对称的和传递的，但不是自反的，也不是对称的。现在解释为什么 I 上的“小于”关系是反对称的。在数学中，对于命题“如果 A，则 B”，当条件为假时，就认为命题是真的。例如，“如果太阳从西边出来，石

头就说话。"是一个真命题。因为在 I 中找不到 a,b，使得 $a<b$ 且 $b<a$，这意味着命题"如果 aRb 且 bRa，则 $a=b$"中的条件是假的，那么这句话"如果 aRb 且 bRa，则 $a=b$"本身就是真的，因此 I 上的"小于"关系是反对称的。

(2) I 上的"相等"关系是自反的，传递的和对称的，也是反对称的，但不是反自反的。

(3) I 上的"模 2 同余"关系是自反的，对称的和传递的，但不是反自反的，也不是反对称的。

例 2.2.2 在人的集合中，"父子"关系是反自反的和反对称的，不是自反的、对称的和传递的。"同姓"关系是自反的、对称的和传递的，不是反自反的和反对称。

例 2.2.3 设 $\rho(A)$ 为 A 的幂集，$\rho(A)$ 上的"包含"关系是自反的、反对称的和传递的，但不是反自反的，也不是对称的。

由于自反关系的否概念是"存在 a，有 $a\overline{R}a$"，因此反自反的不是自反的否概念，从而有的关系既不是自反的也不是反自反的。例如，

$$R=\{(1,1),(1,2),(3,2),(2,3),(2,3),(3,3)\}$$

一个集合上的二元关系的关系矩阵是方阵。表 2.2.1 列出了关系的性质、关系矩阵和关系具有的特征。

表 2.1.1 关系性质、关系矩阵和关系特征

性质	关系图	关系矩阵
自反的	每一个顶点处都有环	对角线元素都是 1
反自反的	每一个顶点处都无环	对角线元素都是 0
对称的	任意两不同点间要有弧，则弧是成对的	矩阵是对称的
反对称的	任意两不同点间要有弧，则弧不是成对的	除对角阵外，矩阵是不对称的
传递的	如果 a 到 b 有弧且 b 到 c 有弧，则 a 到 c 有弧	无明显特征

例 2.2.3 给定集合 $A=\{1,2,3\}$，及 A 上的五个关系，它们分别由图 2.2.1 中的五个关系图给出。下面是五个关系具有的性质：

(1) R_1 是自反的、对称的和传递的；

(2) R_2 是反自反的和反对称；传递的

(3) R_3 是对称的；

(4) R_4 是自反的、反对称的和传递的；

(5) R_5 是自反的、反自反的、反对称的和传递的。