高等学校试用教材

化工容器及设备

天津大学等院校合编

余国琮 主编

化学工业出版社

高等学校试用教材

化工容器及设备

天津大学等院校合编

余国琮 主编

化学工业出版社

内 容 提 要

本书是根据1978年2月在上海召开的教材编写会议通过的《化工容器及设备》编写大纲而编写的。

全书除绪论外共分十一章，分别介绍了：弹-塑性理论分析方法；厚壁圆筒的设计；旋转薄壳的基本理论及设计；平板理论及设计；容器零、部件的设计计算；外压容器的稳定性及设计；化工容器设计的其它问题；有限单元法的应用；换热器；塔设备；化工设备的腐蚀及防腐蚀。书后有附录，包括有例题、常用金属材料的有关数据、计算程序及单位换算表等。

各章编写人为：绪论、第十章是天津大学余国琮；第一、二章是南京化工学院戴树和；第三章是大连工学院贺匡国；第五章是大连工学院贺匡国、张才蕙；第四、九章是山东化工学院张石铭；第六章是天津大学连华英；第七章是天津大学聂清德；第八章是南京化工学院钱惠林；第十一章是天津大学李儒。全书主编为余国琮。

本书经主审人上海化工学院吴泽炜，审稿人成都科学技术大学古大田、华南工学院陈国理、浙江化工学院张康达审阅。

本书作为高等院校化工机械专业的教材，也可供有关的工程技术人员参考。

高等学校试用教材
化工容器及设备
天津大学等院校合编
余国琮 主编
*
化学工业出版社出版
（北京和平里七区十六号楼）
通县曙光印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
开本787×1092 1/16 印张32 字数807千字 印数17,171-29,190
1980年11月北京第1版 1985年3月北京第3次印刷
统一书号15063·3211(K--220) 定价4.05元

目 录

绪论……………………………………………………………… 1

第一节 化工设备的基本要求……………………………………… 1

一、技术经济指标……………………………………………… 1

二、结构上的要求……………………………………………… 2

第二节 化工设备常用金属材料的基本性能……………………… 3

第一章 弹-塑性理论分析方法 ………………………………… 4

第一节 弹性理论基本方程综述…………………………………… 4

一、应力、形变及位移………………………………………… 4

二、平面问题…………………………………………………… 7

三、弹性理论问题的求解方法………………………………… 9

四、轴对称问题………………………………………………… 12

五、解题方法举例……………………………………………… 17

第二节 塑性理论分析方法简述…………………………………… 24

一、最大剪应力和八面体剪应力……………………………… 25

二、塑性条件…………………………………………………… 26

三、加载定理和卸载定理……………………………………… 28

第二章 厚壁圆筒的设计………………………………………… 30

第一节 概述……………………………………………………… 30

第二节 高压厚壁圆筒设计的理论基础…………………………… 30

一、整体式厚壁圆筒的弹性应力分析………………………… 31

二、整体式厚壁圆筒的塑性应力分析………………………… 32

三、整体式厚壁圆筒的爆破压力……………………………… 35

四、整体式厚壁圆筒的热应力………………………………… 37

第三节 厚壁圆筒的自增强………………………………………… 39

一、自增强处理方法…………………………………………… 39

二、自增强处理的压力………………………………………… 40

三、经自增强处理的筒壁应力………………………………… 41

第四节 多层热套和多层包扎式厚壁圆筒………………………… 47

一、多层热套厚壁圆筒………………………………………… 47

二、多层包扎式厚壁圆筒……………………………………… 56

第五节 绕带式及其它型式的厚壁圆筒…………………………… 57

一、型槽绕带式厚壁圆筒……………………………………… 58

二、扁平钢带缠绕式厚壁圆筒………………………………… 58

三、绕板式厚壁圆筒…………………………………………… 59

四、几种新型超高压厚壁圆筒………………………………… 59

第六节 高压厚壁圆筒的设计……62
一、强度条件……62
二、我国现行高压容器设计规范计算方法简述……66
第三章 旋转薄壳的基本理论及设计……69
第一节 旋转薄壳的基本方程……69
一、几何概念……69
二、基本假设……70
三、外力与内力……71
四、平衡方程……73
五、变形的几何关系与物理方程……76
六、关联方程式……82
第二节 旋转薄壳的无力矩理论……85
一、无力矩理论的一般方程……85
二、无力矩理论在几种旋转壳中的应用……86
三、无力矩理论的条件……96
第三节 旋转壳体的边缘问题……96
一、边缘力和弯矩作用下的内力素与变形……97
二、边缘力与边缘弯矩求解……101
三、边缘附近的应力计算……108
四、边缘应力的性质及在设计中的考虑……116
第四节 薄壁容器的设计计算……117
一、受内压筒体及封头的计算公式……118
二、几个设计参数……123
三、封头选择……128
四、容器的压力试验……130
第四章 平板理论及设计……133
第一节 受轴对称载荷的圆板……133
一、薄板弯曲的基本受力与变形特征……133
二、受轴对称载荷圆板的弯曲微分方程……134
三、受均布载荷的圆板……138
第二节 平盖的设计……142
一、圆形盖……142
二、矩形盖……149
第三节 受轴对称载荷的环板……151
一、沿内外边缘分别受均布力矩的环板……151
二、沿内边缘受均布剪力的环板……152
三、应用叠加法求解环板变形及应力……153
第五章 容器零、部件的设计计算……156
第一节 容器的密封……156
一、密封原理和影响密封的因素……156

二、强制密封设计……………………………………………………………………158
三、自紧密封……………………………………………………………………173
第二节 法兰……………………………………………………………………181
一、法兰标准……………………………………………………………………181
二、法兰计算……………………………………………………………………185
第三节 容器的开孔与补强……………………………………………………202
一、开孔附近的应力分析……………………………………………………202
二、开孔后的补强……………………………………………………………210
第四节 容器支座………………………………………………………………219
一、立式支座……………………………………………………………………219
二、卧式支座……………………………………………………………………234
第六章 外压容器的稳定性及设计……………………………………………249
第一节 外压容器的失稳………………………………………………………249
第二节 临界压力的理论公式…………………………………………………250
一、长圆筒………………………………………………………………………250
二、短圆筒………………………………………………………………………255
三、刚性圆筒……………………………………………………………………256
四、临界长度……………………………………………………………………257
五、受有轴向压力的圆筒……………………………………………………257
第三节 外压圆筒及球壳的图算法……………………………………………257
第四节 加强圈设计……………………………………………………………264
一、加强圈的作用及结构……………………………………………………264
二、加强圈的计算……………………………………………………………265
第五节 外压端盖的设计………………………………………………………267
一、凸形端盖（包括半球形、椭圆形、碟形）………………………………267
二、圆锥形端盖…………………………………………………………………268
外压容器计算举例………………………………………………………………268
第七章 化工容器设计的其它问题……………………………………………272
第一节 应力分类………………………………………………………………272
一、应力分类……………………………………………………………………273
二、极限设计法…………………………………………………………………274
三、安定状态的概念……………………………………………………………277
第二节 压力容器的低循环疲劳………………………………………………279
一、疲劳曲线……………………………………………………………………280
二、平均应力对低循环疲劳的影响……………………………………………283
三、考虑平均应力影响后的疲劳寿命的计算…………………………………284
四、低循环疲劳曲线的修正……………………………………………………285
五、疲劳设计规范简介…………………………………………………………288
第三节 容器的高温蠕变………………………………………………………289
一、单向受力状态下的蠕变方程式……………………………………………290

二、复杂应力状态下的蠕变方程式…………………………………………292
三、厚壁圆筒的蠕变与破坏压力的计算………………………………………294
第四节 断裂力学在压力容器中的应用………………………………………297
一、容器的低应力破坏与断裂力学…………………………………………297
二、弹塑性断裂力学及其在压力容器上的应用………………………………299
第八章 有限单元法的应用……………………………………………………310
第一节 引言…………………………………………………………………310
第二节 轴对称问题…………………………………………………………310
一、基本概念…………………………………………………………………310
二、有限单元法分析过程概述………………………………………………312
三、单元特性分析……………………………………………………………313
四、载荷向节点移置…………………………………………………………316
第三节 实际应用中应注意的几个问题………………………………………317
一、合理划分单元……………………………………………………………317
二、正确地确定边界条件……………………………………………………318
第四节 计算程序和计算方法…………………………………………………319
一、有限单元法程序的基本框图……………………………………………319
二、总刚度矩阵的特点………………………………………………………319
三、刚度矩阵[K]的形成和存贮方式、线性代数方程组的求解…………320
附 关于轴对称问题的单元刚度矩阵[k]^{e}的积分方法 ……………………323
第九章 换热器…………………………………………………………………328
第一节 列管式换热器的结构…………………………………………………328
一、列管式换热器的结构形式………………………………………………328
二、管子在管板上的固定……………………………………………………328
三、管板与壳体的连接结构…………………………………………………331
四、热补偿装置………………………………………………………………332
第二节 管板的强度计算………………………………………………………335
一、固定管板式换热器………………………………………………………336
二、浮头式换热器(包括填函式换热器)……………………………………344
三、U型管式换热器…………………………………………………………345
四、换热器管板设计计算步骤………………………………………………346
五、管板另一种计算法………………………………………………………349
第三节 波形膨胀节的计算……………………………………………………353
一、管壁与壳壁温度差引起的温差应力……………………………………353
二、波形膨胀节的计算………………………………………………………355
三、波形膨胀节另一种计算法………………………………………………357
第四节 废热锅炉结构特点及典型零部件强度计算…………………………360
一、废热锅炉的结构特点……………………………………………………361
二、废热锅炉结构设计上的几个问题………………………………………365
三、废热锅炉零部件强度计算………………………………………………368

第十章　塔设备……………………………………………………372
第一节　概述……………………………………………………372
第二节　板式塔结构……………………………………………………373
一、总体结构……………………………………………………373
二、塔盘结构……………………………………………………373
三、大型塔盘的支承……………………………………………………378
四、裙座及其它……………………………………………………382
五、塔设备制造、安装的主要技术要求……………………………………………………383
第三节　填料塔结构……………………………………………………385
一、喷淋装置……………………………………………………385
二、液体的再分配装置……………………………………………………389
三、支承结构……………………………………………………389
第四节　塔设备在风力作用下的振动……………………………………………………391
一、塔的自振周期……………………………………………………391
二、塔的受风诱导振动……………………………………………………399
第十一章　化工设备的腐蚀及防腐蚀……………………………………………………409
第一节　金属的腐蚀……………………………………………………409
一、金属腐蚀的分类及评定方法……………………………………………………409
二、化学腐蚀……………………………………………………411
三、电化学腐蚀……………………………………………………414
四、金属的钝化……………………………………………………423
五、铁碳合金的耐腐蚀性能及其影响因素……………………………………………………425
第二节　合金的耐腐蚀理论……………………………………………………428
一、合金元素含量与耐腐蚀性能……………………………………………………428
二、不锈钢的耐腐蚀理论……………………………………………………430
第三节　非金属材料及特点……………………………………………………434
一、非金属材料的特点及性质……………………………………………………435
二、无机非金属材料……………………………………………………435
三、有机非金属材料……………………………………………………436
第四节　化工设备的防腐蚀措施……………………………………………………439
一、耐腐蚀材料的选择……………………………………………………439
二、设备结构的考虑……………………………………………………439
三、保护层……………………………………………………444
四、电化学保护……………………………………………………445
附录……………………………………………………447
附录一　例题……………………………………………………447
例(一)　高压容器……………………………………………………447
例(二)　列管式换热器……………………………………………………458
例(三)　减压精馏塔……………………………………………………470
附录二　常用金属材料机械性能及许用应力值……………………………………………………488

（一）钢材弹性模数值表…… 488
（二）平均线膨胀系数值表…… 488
（三）钢板许用应力值表…… 489
（四）锻件许用应力值表…… 492
（五）螺栓许用应力$[\sigma]_b^t$值…… 493
（六）钢板机械性能值表…… 495
附录三　轴对称应力分析程序…… 497
附录四　单位换算表…… 504

绪　　论

化学工业是将自然界的各种物质加以化学处理并配合以适当的物理处理以制成所需产品的工业。化学工业的发展与实现我国工业、农业、国防和科学技术四个现代化有着密切的关系。

化工设备一般是指在化工生产中用于传热、传质和化学反应等过程的装置，如换热器、塔器、反应器等。化工容器通常是用来贮存物料，但由于化工设备都用一个容器作外壳，所以它也是化工设备的一个基本组成部分。化工设备及化工容器都是化工生产中的重要生产工具，并在石油、轻工、冶金、国防以及农副业产品的生产中应用。

由于生产过程的多种需要，化工容器及化工设备的种类很多，具体的结构更是多种多样。但是，它们都有着一些共同的特征和规律。为了使我国化工生产早日达到现代化水平，必须注意加强与化工设备有关的科学理论基础。因此，本书首先阐述化工容器的设计理论与设计方法，然后以换热器和塔器作为典型化工设备阐明其基本结构与设计计算，为学生将来的工作打下一定的基础。

第一节　化工设备的基本要求

化工设备的类型及其主要尺寸的选择，决定于它们在整个生产中的地位、所担负的生产任务以及生产过程的条件（压力、温度、物态等）和方法；在近代设计中，还决定于整个生产过程的最优化条件。各部件的具体尺寸及结构不仅决定于生产的要求，而且也取决于所用的材料和其强度与刚度、制造与操作的方便、安全可靠性等一系列因素。

化工设备所应满足的基本要求大体上可分为技术经济指标和结构要求两类，而这些要求归根到底就是要力求使产品总成本为最低。

一、技术经济指标

主要技术经济指标有五项：单位生产能力、消耗系数、设备价格、管理费用和产品总成本。

（一）单位生产能力　化工设备不但要求处理量大而且要求效率高，而这二者常会发生矛盾，如处理量大的设备有时效率较低，或者效率很高的设备有时处理量却很低。单位生产能力实际上就是处理量与设备效率两者都同时考虑到的综合指标，是指化工设备每单位体积、单位重量或单位面积在单位时间内所能完成的生产任务，例如硫酸吸收塔（填料塔）的单位生产能力以每小时每立方米容积所处理硫酸的公斤数来表示，即 $kg/m^3 \cdot hr$。单位生产能力愈高愈好。

（二）消耗系数　消耗系数是指生产每单位重量或单位体积产品所需消耗的原材料及能量，包括原料、燃料、蒸汽、水、电能等。消耗系数不仅与所采用的工艺路线有关，而且与设备的设计很有关系。一般来说，消耗系数愈低愈好。

（三）设备价格　设备的价格影响到工厂投资的大小，因此采用价廉的设备是很必要的。但有时设备虽然复杂些，价格高一些，但却有较高的单位生产能力，能确保产品有较高的质量，并且操作控制现代化，则在进行全面经济合理性的核算后，也可能采用这种较昂贵

的设备。

（四）管理费用　管理费用包括劳动工资、维护和检修费用等。管理费用降低，产品成本也随之降低。但管理费用不是一个孤立的因素，例如有时采用高度自动化的设备，管理费用是降低了，但投资则会增加。

（五）产品总成本　产品总成本是生产中一切经济效果的综合反映。一般要求产品总成本愈低愈好。但如果一个化工设备是生产中间产品，则为了使整个生产的最终产品的总成本为最低，此中间产品的总成本就不一定选择最低的指标，而应从整个生产系统的经济效果来确定。

二、结构上的要求

除了技术经济指标外，化工设备还要满足下列各项结构上的要求。

（一）强度　化工设备的所有部件（包括壳体）都应有足够的强度，否则就不能保证生产和工人的安全。但为了保证强度而盲目地增加结构尺寸也是不合理的，这样会造成材料的很大浪费。一般在设计时常将各个部件做成等强度，这样最省材料。但有时故意使设备中的某一部件的强度特别低一些，当设备过载时这个部件首先破坏，使整个设备不受很大影响，这种部件称为保安部件。反应器上的防爆膜就是一个实例。

（二）刚度　刚度即构件在外力作用下保持原来形状的能力。有时设备构件的设计主要决定于刚度而不是决定于强度。例如塔设备的塔盘板，其厚度通常是由刚度而不是由强度来决定，因为塔盘板的允许挠度很小，一般在3mm左右。如果挠度过大，则塔盘上液层的深度就有较大差别，使通过液层的气流不能均匀分布，会大大地影响塔盘的效率。

（三）耐久性　化工设备的耐久性是根据所要求的使用年限来决定的。化工设备的使用年限一般为10～12年，但实际使用年限往往超过这个数字，其耐久性大多决定于腐蚀情况，在某些特殊情况下还决定于设备的疲劳、蠕变以及振动等。设备的使用年限设计得过长是不必要的，因为在技术飞速发展的今天，新型设备不断地出现，现有的设备很快就不合时代的要求。高压设备是一个例外，一般设计使用年限为20～25年，因为高压设备的外壳成本很高，通常只将内部装置加以改进和更换，而仍保留和使用原来的外壳。根据使用年限和腐蚀等情况，正确的选用结构材料，是保证设备耐久性的最重要措施。

（四）密封性　化工设备的密封性是一个十分重要的问题。设备密封的可靠性是保证安全生产的重要措施之一，因为化工厂所处理的物料中很多是易燃、易爆或有毒的，设备内的物料如果泄漏出来，不但在生产上会造成损失，更重要的是会使操作工人中毒，甚至引起爆炸；相反，如空气漏入负压的设备，亦会影响过程的进行以及可能引起爆炸事故。值得提出的是：在高压设备中，对密封一般是很注意的，但在低压或常压设备中，对密封性一般就不很重视，这是不对的。

（五）节约材料及制造方便　化工设备应在结构上保证最少的材料消耗，尤其是贵重材料的消耗。同时，在考虑结构时应使其便于制造，能保证质量。例如铸造的部件应考虑到造型的方便，且在铸造过程中不易产生缩孔、裂纹等现象。应尽量避免复杂的加工工序，并尽可能减少加工量。在设计时应尽量采用标准设计和标准部件，因化工设备多数是单件生产的，故标准化是降低设备成本的一个重要方法。

（六）操作方便　化工设备的结构还应当考虑到操作的方便。设备的自动化可以大大地简化操作，但要增加投资。此外，还要考虑安装、维护、检修的方便，例如人孔尺寸太小时就会影响到安装、维修工作的进行。

（七）运输方便　在化工设备的尺寸和形状上尚应考虑运输的方便。制造设备的工厂可能与使用设备的工厂相距很远，当由水路运输时，一般尺寸限制问题还不大，但由陆路运输时，就必须考虑到设备的直径、重量与长度是否符合铁路或公路运输的规定。

第二节　化工设备常用金属材料的基本性能

化工设备广泛使用的材料为金属材料，如普通碳钢、合金钢、铸铁及各种有色金属。随着近代化学工业的迅速发展，化工生产的工艺条件十分复杂，在不同情况下，对材料的要求是不同的。因此，我们必须掌握材料的各种基本性能，善于从使用、加工、经济等各方面作全面考虑，然后才能作出正确的选择。

一、机械性能

材料的机械性能包括机械强度、弹性强度及硬度等。

机械强度是决定许用应力数值的依据，设计中常用的是拉伸、压缩与弯曲的强度极限σ_b及屈服极限σ_s，高温时还要考虑蠕变极限σ_n和持久极限σ_D。应该注意的是：强度极限与屈服极限之间的比例对各种材料是不同的，即使是同一种材料，也随其热处理情况及工作温度的不同而有所变化。

在稳定性计算或动载荷的情况下，弹性强度是设计的主要依据。这方面主要的参数有：弹性模数E、延伸率δ、断面收缩率ψ、冲击韧性a_K及断裂韧度等几种。

硬度是说明材料的耐磨性及切削加工的可能性。金属材料中常用的是布氏硬度HB和洛氏硬度HR，非金属材料则常以摩氏硬度来表示。

选择材料时应结合化工设备的特点来作全面的考虑。例如强度极限虽高，但延伸率很小的材料不能用来制造压力容器，因为这种材料容易发生爆炸事故。

常用钢材的机械性能见附录。

二、耐腐蚀性能

化工生产中所处理的物料大多数是有腐蚀性的物质，故设计化工设备时，耐腐蚀材料的选择常起决定性的作用。材料的腐蚀速度可用重量损失率K（$g/m^2\cdot hr$）或腐蚀速度K_a（毫米/年）来表示。

常用材料的耐腐蚀性能见第十一章的有关表。

三、物理性能

材料的主要物理性能指标是：重度γ（kg/m^3），导热系数λ（$kcal/m\cdot ℃\cdot hr$），比热C（$kcal/kg\cdot ℃$），熔点t_m（℃），线膨胀系数α（1/℃）等。材料在不同的使用场合中，对其物理性能有不同的要求，如传热设备要求材料有较高的导热系数等。

几种主要金属的物理性能见附录。

四、制造工艺性能

材料的制造工艺性能是很重要的，否则设计出来的设备很难加工，甚至不能加工。对化工设备应该考虑的主要制造工艺性能是：可焊性、可铸性、可锻性、切削加工性、热处理性能以及冲压性能等。

五、组织与成分

材料的金相组织与化学成分对机械性能、耐腐蚀性能、热处理及制造方法均产生一定的影响，故选择材料时应对组织及成分与材料性能间的关系有足够的了解。

第一章　弹-塑性理论分析方法

随着化学工业、原子能工业以及空间与海洋科学等学科的发展，压力容器的应用范围正在日益扩大。新型材料的采用，低温、高温和高压与超高压的使用以及制造工艺的发展等，都对压力容器提出了新的要求。近年来，在压力容器设计、制造及检验方面的技术进展很快，"压力容器技术"正在形成一门较为复杂的、具有跨学科性质的独立学科。

在压力容器设计中，对承载时容器各部件作出理论或实验的分析，以便弄清这些应力或应变对容器失效（破坏）的影响，是十分重要的。现在，随着弹-塑性理论的发展，实验应力分析技术的进步以及制造工艺和检验水平的提高，特别是近年来对安全工程的重视，压力容器的设计已达到了新的水平。

本章主要阐述弹-塑性理论分析方法在压力容器设计中应用的有关基本知识。

在弹性理论中所研究的是理想弹性体，即其变形是应力的单值函数，在外载荷取消后变形即行消失。反之，在塑性理论中，所研究的是物体在足够大的应力作用下引起的残余变形，即使载荷卸除后也不消失。弹性理论的任务是研究理想弹性体中在外力作用下所产生的应力和形变，以及与形变有关的位移；而塑性理论则是研究物体处于全部或局部塑性状态时的应力和形变问题。

第一节　弹性理论基本方程综述

一、应力、形变及位移

弹性理论中常用的物理量有外力、应力、形变和位移。作用于物体的外力可以分为体力和面力。所谓体力，是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力；所谓面力，是作用在物体表面上的力，例如流体的压力和接触力。为了考察物体内某一点P的应力，在这一点从物体割取一个无穷小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴而长度为PA＝dx，PB＝dy，PC＝dz，见图1-1。将每一个面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用字母σ表示。为了表明这个应力的作用面和作用方向，再加上一个脚码。例如：正应力σ_x是作用在垂直于x轴的面上，同时也沿x轴方向作用的。剪应力用字母τ表示，并加上两个脚码。前一个脚码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个脚码表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如：剪应力τ_{xy}是作用在垂直于x轴的面上，而沿y轴方向作用的。

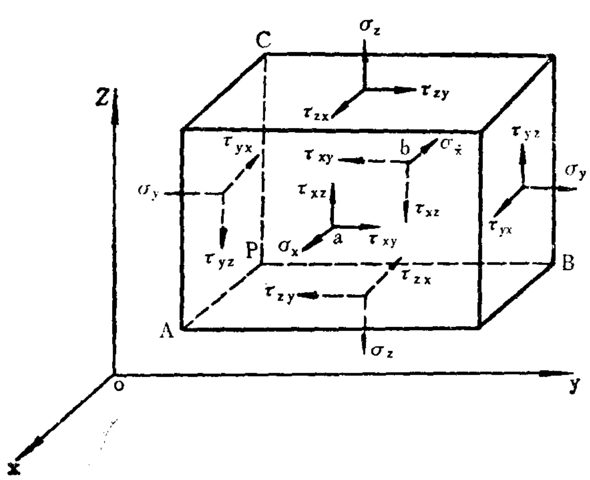

图 1-1　弹性体内某一点P的应力

如果某一个面上的外法线是朝着坐标轴的正方向，这个面上的应力就以沿着坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向

的为负。反之，如果某一个面上的外法线是朝着坐标轴的负方向，这个面上的应力就以沿着坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图 1-1 中所示的应力全都是正的。

一般而论，应力是位置坐标的函数。因此，作用在这六面体两对面上的应力不完全相同，而有微小的差量。例如：作用在左面的正应力是σ_y，由于坐标y的改变，作用在右面的正应力则是$\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$，余类推。

根据力矩和力的平衡条件：$\Sigma M=0$，$\Sigma F=0$，可列出微体的平衡方程式。

首先，连接六面体前后两面中心的直线ab，并以此为矩轴，列出$\Sigma M_{ab}=0$：

$$\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy\right)dxdz\frac{dy}{2}+\tau_{yz}dxdz\frac{dy}{2}$$

$$-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz\right)dxdy\frac{dz}{2}-\tau_{zy}dxdy\frac{dz}{2}=0$$

化简后，得：

$$\tau_{yz}+\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy-\tau_{zy}-\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz=0$$

略去微量以后，得：

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},$$

同样可以得出：

$$\tau_{zx}=\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}$$

这就证明了剪应力互等定律：作用在两垂直面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的（大小相等，符号也相同）。因此，剪应力记号的两个脚码先后次序可以对调。

其次，以x轴为投影轴，列出$\Sigma F_x=0$，令：X表示作用于单位体积的体力在X坐标轴上的投影，得：

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz-\sigma_xdydz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dzdx-\tau_{yx}dzdx+$$

$$\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy-\tau_{zx}dxdy+Xdxdydz=0$$

由其余两个平衡条件：$\Sigma F_y=0$和$\Sigma F_z=0$，分别以Y、Z表示作用于单位体积体力在y、z坐标轴上投影可以得出与上式相似的两个方程式。三个方程约简以后整理得：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+Z=0\end{cases}\tag{1-1}$$

这就是空间问题的平衡方程式。σ_x，σ_y，σ_z，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$，$\tau_{zx}=\tau_{xz}$，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$这六个量完全可以确定空间某点P的应力状态，称之为该点的应力分量。

公式（1-1）三个平衡方程式中包括六个应力分量，要求解必须借助形变与位移关系—几何方程和物理方程。

svg经由弹性体内任意一点P的微小平行六面体在x－y平面的投影表示在图1-2中。PA， PB是弹性体受力前的线段，受力以后，P、A、B三点分别移到P′、A′、B′。

设：PA＝dx，PB＝dy。P点在x方向的位移分量是u，则A点在x方向的位移分量是$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$。因此，线段PA的正应变是：

$$\varepsilon_x=\frac{\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)-u}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

同样，P点在y方向的位移分量为v，线段PB的正应变是：

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}$$

其次，利用图1-2可求出线段PA与PB之间的直角改变，也就是剪应变γ_{xy}。这个剪应变是由两部分组成的，一部分是x方向的线段PA向y方向的线段PB的转角β_1，另一部分是y方向的线段PB向x方向的线段PA的转角β_2。从图1-2可以看出：

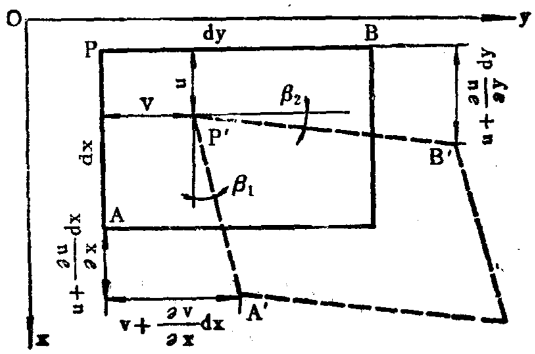

图 1-2 点P在x-y平面的位移

$$\beta_1=\frac{\left(v+\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)-v}{dx}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\beta_2=\frac{\partial u}{\partial y}$$

可见，线段PA与PB之间的剪应变是：

$$\gamma_{xy}=\beta_1+\beta_2=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

同样，根据弹性体内任一点P的微六面体在y-z平面和x-z平面上的投影，可求得在z方向的正应变和相应的剪应变：

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$$

式中　w——P点（见图1-1）在z方向的位移分量。

综上各式，空间问题的几何方程为：

$$\left\{\begin{array}{ll}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{yz}=\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\\[2ex] \varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{zx}=\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\\[2ex] \varepsilon_z=\dfrac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{array}\right. \tag{1-2}$$

至于弹性体变形前后体积的改变与位移分量之间的关系，可从下列步骤求得：无穷小的平行六面体，它的棱边长度是dx，dy，dz（见图1-1）。变形前的体积是：dxdydz；变形后体积为：$(dx+\varepsilon_x dx)(dy+\varepsilon_y dy)(dz+\varepsilon_z dz)$。因此，它的体积应变e，即每单位体积的体积改变．

$$e=\frac{(dx+\varepsilon_x dx)(dy+\varepsilon_y dy)(dz+\varepsilon_z dz)-dxdydz}{dxdydz}$$

$$=(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)-1 \tag{1-3}$$

略去高阶微量（两个或三个应变的乘积）得：

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z \tag{1-3-a}$$

或

$$e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1-3-b}$$

现在来研究问题的物理方面，导出应力分量与形变分量之间的关系式。对于完全弹性体的各向同性体，根据虎克定律有：

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]\\[2ex] \varepsilon_y=\dfrac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_x+\sigma_z)]\\[2ex] \varepsilon_z=\dfrac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]\\[2ex] \gamma_{yz}=\dfrac{1}{G}\tau_{yz},\ \gamma_{zx}=\dfrac{1}{G}\tau_{zx},\ \gamma_{xy}=\dfrac{1}{G}\tau_{xy}\end{cases} \tag{1-4}$$

这是空间问题的物理方程。其中G是剪切弹性模数；E是弹性模数；μ是泊松系数。三者之间的关系为：

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

式（1-4）的应变分量与应力分量关系，也可以表示成为应力分量与应变分量的关系(空间问题物理方程的另一形式)：

$$\begin{cases}\sigma_x=2G\left(\varepsilon_x+\dfrac{\mu}{1-2\mu}e\right)\\[2ex] \sigma_y=2G\left(\varepsilon_y+\dfrac{\mu}{1-2\mu}e\right)\\[2ex] \sigma_z=2G\left(\varepsilon_z+\dfrac{\mu}{1-2\mu}e\right)\\[2ex] \tau_{xy}=G\gamma_{xy},\quad \tau_{yz}=G\gamma_{yz},\quad \tau_{zx}=G\gamma_{zx}\end{cases} \tag{1-5}$$

方程式（1-1）、(1-2)、(1-4）共十五个方程，包含十五个未知量：

$$\sigma_x,\ \tau_{xy},\ \varepsilon_x,\ \gamma_{xy},\ u,$$
$$\sigma_y,\ \tau_{yz},\ \varepsilon_y,\ \gamma_{xz},\ v,$$
$$\sigma_z,\ \tau_{zx},\ \varepsilon_z,\ \gamma_{zy},\ w。$$

在每个具体问题的求解过程中，应当再给出弹性体表面上的边界条件，做为这些方程的补充。

二、平面问题

任何一个弹性体都是空间物体，一般的外力都是空间力系。但是，当弹性体具有某种特殊形状并且受到某种特殊的体力和面力时，空间问题可以简化为平面问题，只需考虑平行于某一平面的应力或者位移。

平面问题有两种类型：第一种平面问题是平面应力问题。设有很薄的均匀薄板，见图1-3(a)。只在边缘上受到平行于板面并且不沿厚度变化的面力，同时，体力也平行于板面并

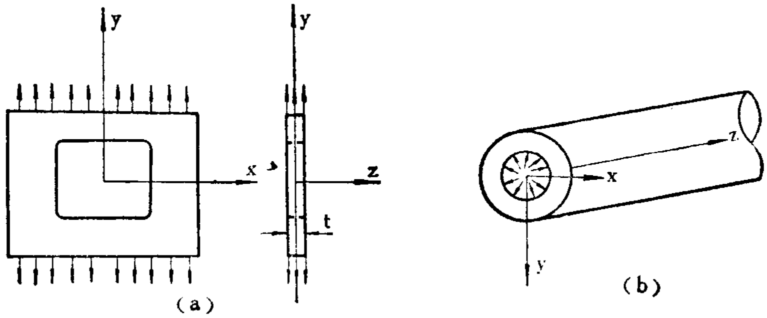

图 1-3 平面问题示例

且不沿厚度变化。设薄板的厚度为 t，以薄板的中间平面为 x－y 面，以垂直于板面的任一直线为 z 轴，则在板面上的各点有：

$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,\ (\tau_{zx})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,\ (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0$$

因为板很薄，外力又不沿厚度变化，所以，可以认为在整个薄板的所有各点都有：

$$\sigma_z=0,\ \tau_{zx}=\tau_{xz}=0,\ \tau_{zy}=\tau_{yz}=0$$

这样，只剩下平行于 x－y 面的三个应力分量：σ_x，σ_y，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$。因而这种问题称为平面应力问题。同时，由于板很薄，这三个应力分量，以及形变分量和位移分量，也都可以认为是不沿厚度变化。亦即，这些分量只是 x 和 y 的函数，与 z 无关。

第二种平面问题是平面形变问题。与上述情况相反，设有无限长的管子（圆柱形筒体），见图1-3(b)。所有一切应力分量，形变分量，位移分量只是 x 和 y 的函数，与 z 无关。在这一情况下，所有各点都不会沿 z 方向移动而只有平行于 x－y 面的位移。因而这种问题称为平面位移问题或平面形变问题。

根据两种平面问题的含义，它们的平衡微分方程、几何方程和物理方程，可从式(1-1)，(1-2)、(1-4) 整理如下：

平衡微分方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\end{cases}\tag{1-6}$$

几何方程式：

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}\\[2ex]\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\gamma_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}\tag{1-7}$$

物理方程式：平面应力情况下，因$\sigma_z=0$，故