

Jisuan Jinshu Chengxing Lixue
ji Yingyong

计算金属成形力学 及应用

汪凌云 刘静安 编著

重庆大学出版社

计算金属成形力学及应用

汪凌云 刘静安 编著

重庆大学出版社

计算金属成形力学及应用

汪凌云 刘静安 编著

责任编辑 宗联枝

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆大学出版社印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 17 字数: 424 千

1991年6月第1版 1991年6月第1次印刷

印数: 1—2000

标准书号: ISBN 7-5624-0379-1 定价: 4.45元
TG·20

前 言

金属塑性成形问题是物理非线性和几何非线性的双非线性问题。在成形过程中还伴随和耦合着一系列物理现象的发生和影响,如硬化和软化,热的产生和耗散,摩擦及时间效应,应变诱发各向异性和应变诱发相变等。对于这样复杂的问题,解析解一般是没有的,只能采用数值方法求解。如何利用数值方法分析和求解金属塑性成形问题正是计算金属塑性成形力学所研究的内容,计算金属塑性成形力学是塑性力学的一个分支,是20世纪70年代发展起来的新兴边缘学科。

本书重点讨论如何利用数值方法分析和求解金属塑性成形问题,书中的内容反映了这个课题的历史和现状,某些问题的观点和结论是编著者个人的见解和研究成果。

本书能够写成,首先要感谢加拿大Sherbrooke大学K. Neale教授的鼓励和支持,他为编著者提供了他1987年在华讲学的讲稿和其它许多文献资料。编著者还要感谢中南工业大学曹乃光教授,他在百忙中仔细地审阅了全部原稿,提出了许多宝贵意见。

由于计算金属塑性成形力学是一个新的领域,涉及的面广而深,也由于编著者学术水平有限,书中可能有许多不妥之处,敬希读者批评指正。

编 著 者

主要符号表

x^i	Euler直线坐标
X^i	Lagrange直线坐标
ξ^i	Lagrange曲线坐标
$\underline{e}_i$	Descart直角坐标系单位基矢量
$\underline{g}_i$	坐标基矢量
e_{ijk}	置换记号
g_{ijk}	置换张量
g	g_{ijk} 的行列式
δ_{ij}	Kronecker记号
g_{ij}	度量张量
Γ_{ijk}	第一类Chrisotoff记号
Γ_{ij}^k	第二类Chrisotoff记号
R_{Pqij}	Riemann-Christoffel张量
$\underline{D}^e$	线弹性矩阵
$\underline{D}^p$	小变形塑性矩阵
$\underline{D}^{ep}$	小变形弹塑性矩阵
σ_Y	初始屈服极限
Y	后继屈服极限
k	初始剪切屈服极限
E	Young模量, 应变能
E_t	切向模量
G	剪切模量
ν	Possion比
H'	应变硬化率
$\underline{u}$	位移(列)矢量
$\underline{v}$	速度(列)矢量
$\underline{\eta}$	Lagrange应变张量
$\underline{\varepsilon}$	Euler应变张量, 小应变张量
$\underline{\omega}$	旋转张量
$\underline{\Omega}$	涡流矢量
$\underline{\beta}$	名义应力张量
$\underline{\tau}$	Kirchhoff应力张量
$\underline{\sigma}$	Euler应力张量

目 录

主要符号表

第一章 绪论	(1)
1.1 金属材料的塑性性质及行为.....	(1)
1.2 金属材料塑性性质及行为的理想化.....	(5)
1.3 计算金属成形力学的研究内容.....	(5)
第二章 小变形弹塑性基本理论	(8)
2.1 应力、应变分析.....	(8)
2.2 弹性本构关系.....	(15)
2.3 初始屈服条件.....	(18)
2.4 后继屈服条件(强化条件).....	(22)
2.5 加卸载准则.....	(25)
2.6 Drucker 公设.....	(26)
2.7 增量塑性本构关系(流动理论).....	(29)
2.8 全量塑性本构关系(变形理论).....	(38)
2.9 最大塑性功原理.....	(39)
2.10 虚功原理.....	(40)
2.11 弹塑性材料的变分原理.....	(43)
2.12 刚塑性材料的变分原理(Markov 变分原理).....	(45)
2.13 刚粘塑材料的变分原理.....	(47)
附录1 变分法简介.....	(48)
A.1.1 函数的变分.....	(48)
A.1.2 泛函及其变分.....	(49)
A.1.3 泛函的极值问题——变分问题.....	(50)
第三章 小变形弹塑性有限元法及应用	(53)
3.1 线弹性有限元法概述.....	(53)
3.2 小变形弹塑性本构关系的矩阵表式.....	(56)
3.3 小变形弹塑性有限元法的计算列式.....	(60)
3.4 小变形弹塑性有限元增量变刚度法.....	(63)
3.5 小变形弹塑性有限元增量初载荷法.....	(66)
3.6 残余应力及残余应变的有限元分析.....	(69)
附录2 非线性方程组的数值解法.....	(71)
A.2.1 弹塑性问题的FEM与非线性方程组.....	(71)
A.2.2 迭代法(总载荷法).....	(72)
A.2.3 增量法.....	(75)
A.2.4 混合法.....	(76)
A.2.5 收敛准则.....	(78)

A.2.6 增量步长选择	(79)
A.2.7 几种解法的比较	(89)

第四章 刚塑性有限元法及其应用..... (34)

4.1 引言	(81)
4.2 体积约束的处理	(81)
4.3 刚塑性有限元法的计算列式	(86)
4.4 刚粘塑性有限元法的计算列式	(91)
4.5 刚(粘)塑性有限元法计算的几个问题	(92)
4.6 刚塑性有限元法应用实例——板材稳态轧制过程分析	(107)
4.7 非稳态问题的分析方法	(114)
4.8 三维问题单元的选择	(115)
4.9 耦合工具弹性变形的分析方法	(117)
4.10 耦合热的分析方法	(120)
附录3 稳态与非稳态板材轧制过程的刚塑性有限元分析程序	(123)

第五章 大变形弹塑性基本理论..... (178)

5.1 物体的构形和运动	(178)
5.2 坐标系	(180)
5.3 应变张量	(180)
5.4 物质导数	(182)
5.5 应变率张量	(183)
5.6 Descart 直角坐标系中的应变张量和应变率张量	(185)
5.7 应力张量	(189)
5.8 简单拉伸时的各种应力分量	(192)
5.9 应力率张量	(193)
5.10 平衡	(196)
5.11 大变形弹塑性本构关系的一般形式	(198)
5.12 大变形弹塑性等向强化 J_2' 流动理论	(200)
5.13 大变形弹塑性运动强化 J_2' 流动理论	(203)
5.14 大变形弹粘塑性本构关系	(205)
5.15 变分原理和虚功原理	(206)
附录4 张量分析初步	(211)
A.4.1 引言	(211)
A.4.2 指标记号及求和约定	(211)
A.4.3 直线坐标系中的矢量	(212)
A.4.4 二阶张量	(215)
A.4.5 度量张量及各向同性张量	(220)
A.4.6 n 阶张量	(221)
A.4.7 置换张量	(221)
A.4.8 张量代数	(222)

4.4.9	曲线坐标系	(222)
4.4.10	张量分析	(227)
4.4.11	矢量和张量的物理分量	(234)
第六章	大变形弹塑性有限元法及应用	(237)
6.1	引言	(237)
6.2	大变形弹塑性 T, L 有限元法的计算列式	(237)
6.3	大变形弹塑性 U, L 有限元法的计算列式	(240)
6.4	自校正方法	(246)
6.5	大变形弹塑性有限元法应用举例 平面应变轧制过程分析	(248)
第七章	金属塑性成形过程的数值模拟和优化	(253)
7.1	引言	(253)
7.2	圆柱体镦粗过程的模拟	(253)
7.3	挤压模具的优化设计问题	(254)
7.4	轧辊孔型 CAD 技术	(255)
7.5	预成形设计问题	(260)

第一章 绪 论

1.1 金属材料的塑性性质及行为

“金属材料的塑性性质及行为”这个命题在一般的塑性力学中已经讨论过，但由于问题的重要性，还有重提的必要。

用简单拉压试验和静水压力试验可以得知许多关于金属材料的塑性性质及行为的信息。简单拉压试验所得到的金属材料塑性性质及行为的信息可通过拉伸应力应变曲线显示出来。

在分析和讨论拉伸应力应变曲线之前，先讨论应力应变的量度。

设试样在变形前的截面面积和标距分别为 A_0, l_0 ，在变形后（或任一瞬时）它们的值为 A 及 l ，设载荷为 P ，则名义应力 β 和名义应变（工程应变） e 分别为

$$\beta = \frac{P}{A}, \quad e = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (1.1.1)$$

与（1.1.1）相对应的，以试样变形后的尺寸，即 A 和 l 为基准的真应力或Euler应力 σ 和对数应变（真应变或自然应变）

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad \ln \frac{l}{l_0} \quad (1.1.2)$$

除了（1.1.1）和（1.1.2）式所表示的应力，应变外，还有所谓Kirchhoff应力 τ 和Lagrange应变 η

$$\tau = \frac{P \cdot l}{A l_0} = \beta \frac{l}{l_0}, \quad \eta = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \quad (1.1.3)$$

由于弹性应变的数量级在0.1%左右，所以在弹性变形阶段，或小变形弹塑性阶段用（1.1.1）~（1.1.3）中任一式计算应力和应变，差异很小，统用 σ, e 表示，只是在需要区别时才分开表示。但对于大变形问题，三组应力、应变、不仅数值上，而且从理论本身的意义来说，都存在着不可忽视的差异，而必须分别表示。三组应力之间的关系是

$$\sigma = \beta \frac{A_0}{A} = \beta \frac{\rho_0 l_0}{\rho l} \quad (1.1.4)$$
$$\tau = \beta \frac{l}{l_0} = \beta \frac{\rho A_0}{\rho_0 A} = \sigma \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 = \sigma \frac{A_0 \cdot l}{A l_0}$$

式中 ρ_0, ρ 分别是材料在变形前后的密度。写出（1.1.4）式时应用了 $\rho_0 A_0 l_0 = \rho A l$ （根据质量守恒定律。由于 $A < A_0, l < l_0, \rho < \rho_0$ ，所以 $\tau < \beta < \sigma$ 。

图1.1.1是两种典型的以名义应变为横轴，以名义应力为纵轴的名义应力应变曲线。从该图可以看到，曲线有一直线段 OA ，在该段，应力应变成比例，遵循Hooke定律。离开 A 点，曲线开始弯曲，应力应变不再成比例而成非线性关系。 A 点是应力应变是否成比例的界限点， A 点的应力称为比例极限。虽然离开 A 点应力应变不再成比例，但在离开 A 点的一个小范围 AB 内，应变还是弹性的，就是说，若在 OAB 段任一点卸除外力，应力应变仍沿原曲线退回到原点，应力降到零，应变亦降到零。离开 B 点，曲线明显弯曲，不仅应力应变关系不是

线性的，应变也不是弹性的了，就是说，若在B点以后卸除外力，应力应变不再沿原曲线退回原点，而是沿一条接近平行于OA直线段，即遵循Hooke定律变化，到应力为零时，应变并不完全消失为零，而残存一部分，即有塑性变形发生。B点是产生和不产生塑性应变的界限点，B点的应力称为弹性极限。由上述可见，弹性变形与塑性变形的根本区别，不在于应力应变关系是否线性，而在于卸除外力后变形是否可恢复（消失）。有些材料，例如低碳钢等，在弹性极限后有个应力不增加，甚至减小，而应变增长很大的阶段（图1.1.1a），这种现象称为屈服，此阶段称为屈服阶段。屈服阶段的最小应力称为屈服应力或屈服极限

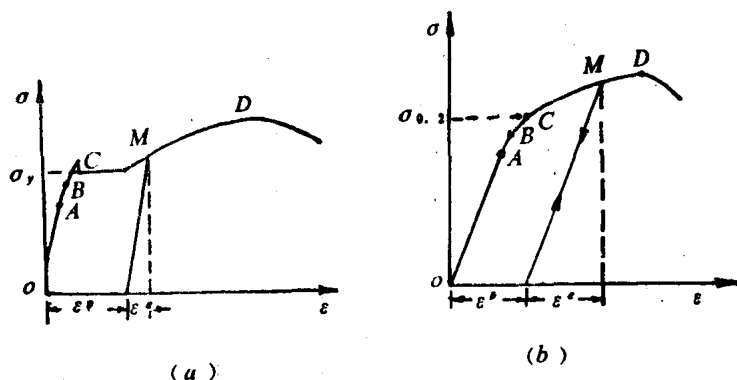


图1.1.1 名义应力应变曲线

（对应于图1.1.1a中的c点）。

由于比例极限，弹性极限，屈服极限三者非常接近，也由于弹性极限一般难于测定，故工程上常将三者不加区分，统以屈服极限 σ_Y 表之。对于没有明显屈服极限的材料，例如铝等，则规定产生0.2%塑性应变的应力 $\sigma_{0.2}$ 为屈服极限（图1.1.1b）。这样，在屈服极限

以前，即在弹性应变阶段，加载，卸载时的应力应变关系都可表示为

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\sigma \leq \sigma_Y) \quad (1.1.5)$$

都遵循Hooke定律。在屈服极限以后，即在塑性应变阶段，应力应变曲线上任一点M(ε, σ)所对应的应变是

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$$

式中的 ε' 是弹性应变， ε'' 是塑性应变。加载时的应力应变关系并不遵循Hooke定律，但可表示为

$$\sigma = \varphi(\varepsilon) = H(\varepsilon'') \quad (\sigma \geq \sigma_Y) \quad (1.1.6)$$

卸载时的应力应变关系仍遵循Hooke定律，常用该定律的微分形式表示：

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (1.1.7)$$

加载，卸载时应力应变关系不同是塑性应变阶段的重要特点，它引出许多复杂的问题，其中之一是需要把加载，卸载分开来研究。要把加载卸载分开就应该有个判别材料是处在加载还是卸载的准则，此准则称为加载准则。简单拉压时可以表示为

$$\left. \begin{array}{l} \sigma d\sigma \geq 0 \quad \text{加载} \\ \sigma d\sigma < 0 \quad \text{卸载} \end{array} \right\} \quad (1.1.8)$$

只有把(1.1.6)，(1.1.7)，(1.1.8)三式联合起来才能完整地表示塑性应变阶段的应力应变关系。

加载、卸载时应力应变关系不同，引出的另外一个问题是塑性应力应变关系的非单值性，对于同一个 σ 值，可以对应于不同的 ε 值，如图1.1.2a中的 σ 可以对应于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ 处的 ε ，对于同一个 ε 值可以对应于不同的 σ 值（图1.1.2b）。应力的大小不仅与当时的应变大小有关，还与应变的历史有关，所以，应力与应变间的非单值性具体说来是一种路径有关性。

在塑性应变阶段，如果从应力应变曲线上任一点 M 卸载后又重新加载，发现加载时的应力应变基本上仍按卸载时应力应变曲线变化（图1.1.1），但加载到 $\sigma = \sigma_y$ 时，材料并不重新开始屈服，直到 $\sigma = \sigma_M$ （ σ_M 是 M 点的应力）时才重新开始屈服，并继续沿原有曲线变化。这相当于把屈服极限从 σ_y 提高到 σ_M ， σ_M 称为后继屈服极限。这种随着塑性变形的发展，材料屈服极限愈来愈高的现象称为应变强化或加工硬化。应变强化在应变到强度极限点 $D(\epsilon_b, \sigma_b)$

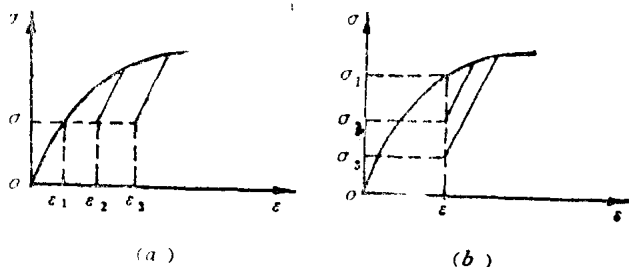


图1.1.2 塑性应力应变关系的非单值性

以前一直是存在的，它是塑性应变阶段的又一重要特点。在研究应变强化时，常常使用切线模量 E_t 和应变强化率 H' 的概念。切线模量的定义是（真）应力应变曲线上曲线的切线的斜率 $E_t = d\sigma/d\epsilon$ （图1.1.3），应变硬化率的定义是 $H' = d\sigma/d\epsilon^p$ （图1.1.4），如果根据名义应力应变曲线来定义， E_t 和 H' 都是递减的，根据真应力应变曲线来定义，则 E_t 和 H' 都是递增的。根据

$$d\epsilon = \frac{1}{E_t} d\sigma, \quad d\epsilon^p = -\frac{1}{H'} d\sigma, \quad d\epsilon^e = d\epsilon - \frac{1}{E_t} d\sigma$$

可以求得

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{EH'}{E + H'} \quad (1.1.9)$$

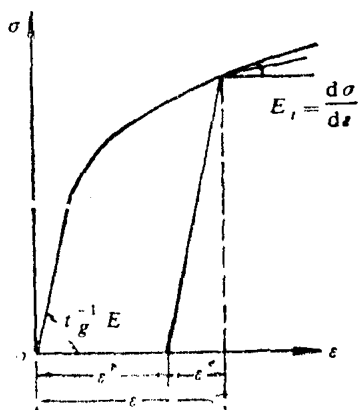


图1.1.3 切线模量

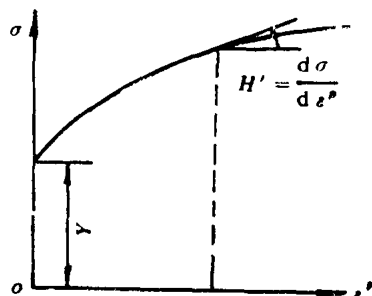


图1.1.4 应变强化率

从图1.1.1还可以看出，在应力达到最高点 D 之前，要增加变形必须增大应力，这时称材料是稳定的。对于岩石、土壤等材料屈服后常有软化现象，这时变形增加，应力反而减小，称材料是不稳定的。金属材料应力达到 σ_b 后 $\sigma-\epsilon$ （名义应力应变曲线）下降，这种现象叫做拉伸失稳。拉伸失稳是否即是材料不稳定了呢？从试验中看到，这时试件出现了缩颈，实际承载面积减小了，真实应力不一定下降。由此可知拉伸失稳同材料不稳定不是一回事。

简单压缩时，对一般金属材料，在塑性变形不大，不超过10%情况下，应力应变曲线基本与简单拉伸的相同（图1.1.5）。但在大塑性变形情况下有明显差别。

如果将材料先拉伸到塑性应变阶段后卸载到零（图1.1.6），再反向加载，即使材料

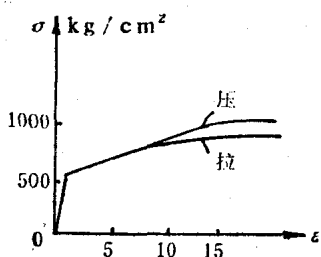


图1.1.5 简单拉压应力应变曲线的比较

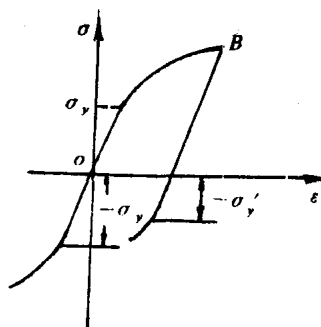


图1.1.6 Bauschinger效应

承受压缩，此时，将首先发生压缩弹性变形，随后屈服，发生压缩塑性变形，但压缩屈服极限—— σ_y' 比原有的，未经预先拉伸塑性应变而直接承受压缩的屈服极限—— σ_y 要低得多(指数值)。同样，若先压缩到塑性应变阶段，卸载到零后再拉伸，拉伸屈服极限也降低，这种加载到塑性应变阶段后卸载，再反向加载时，发生屈服极限降低的现象称为Bauschinger效应。这表明，材料的后继屈服性质不仅与它所经历过的塑性变形的大小有密切关系，还受到它所经历过的塑性变形的方向的影响。

由以上拉压试验分析，可以看到塑性变形具有的基本特征是

- i) 塑性变形的不可恢复性
- ii) 塑性应力应变关系的非线性，非单值性。
- iii) 塑性应变具有应变强化性。
- iv) 塑性应变加载卸载遵循不同规律性。

v) 由于塑性应变不可恢复，所以外力所作的塑性功具有不可逆性或者叫耗散性，在一个加载卸载的应力循环中，外力所作的功恒大于零，这一部分能量被材料的塑性变形所耗散掉了。

下面再讨论从静水压力试验所得到的材料塑性性质的信息。

i) 当材料处在静水压力作用下时，将发生体积改变，此体积改变与压力近似地成线性关系。若卸除外力，体积变化恢复，没有残余的体积变形，因而可以认为静水压力作用下，体积变化是弹性的，遵循体积Hooke定律。试验还表明，这种弹性的体积改变是很小的，例如弹簧钢在10,000atm下体积缩小2.2%。因此，对于一般应力状态下的金属材料，当发生较大的塑性变形时，可以忽略弹性的体积变化，而认为材料在塑性变形时体积是不可压缩的。

ii) 材料的塑性变形与静水压力无关。Bridgeman用各种钢试件作出轴向拉伸时的应力应变曲线及轴向拉伸与静水压力同时作用下的应力应变曲线，两者加以比较，发现静水压力对(初始)屈服极限的影响很小，可以忽略不计。因而认为静水压力与塑性变形无关。

以上讨论的是常温静载条件下的试验结果，没有反映温度，及时间因素的影响。实际上它们都是有影响的。所谓时间因素的影响即应变率的影响，它表现在两个方面，一个方面是在高应变率下材料的粘性效应，这时，应力应变关系与应变率有关，即动态应力应变关系与静态应力应变关系显著不同。另一个方面是低应变率下的粘性效应。例如，在恒应力下，应变将随时间而缓慢增长，即发生蠕变，或者，在恒应变下，应力随时间减小，即发生松弛。

对于多数金属材料来说，在快速加载时，第一方面的粘性效应很明显。在高温下，第二方面的粘性效应很明显。在文献中，不考虑时间影响常被称作率无关性（Rate-independent）。

1.2 金属材料塑性性质及行为的理想化

与弹性情形不同，金属材料的塑性性质及行为相当多样而复杂，而在进行数学处理时，

就需要在不失其重要特征的限度内加以理想化，理想化所采用的基本假设是

1. 变形前材料是各向同性的。
2. 拉伸及压缩情况下真应力真应变关系一致。
3. 塑性性质及行为与时间，温度无关（有关时另行说明）
4. 在产生塑性变形后卸除载荷，材料服从弹性规律，重新加载后的屈服应力等于卸载前的应力，这就是说，重新加载达到屈服后的 $\sigma-\epsilon$ 曲线是卸载前 $\sigma-\epsilon$ 曲线的延长线。
5. 弹性特性不因塑性变形而受影响。
6. 塑性变形是在体积不变（不可压缩）的条件下进行的。

除此之外，对应力应变关系还常做图1.2.1所示的理想化。

除了以上五种理想化模型外，还有一种在数学上统一处理弹塑性的幂次强化模型，在简单拉伸情形其加载规律为

$$\sigma = A\epsilon^n \quad (1.2.1)$$

更一般地可写成

$$\sigma = A|\epsilon|^n \text{sgn}\epsilon \quad (1.2.2)$$

其中 A 和 n 均为材料常数， $A > 0$ ， $0 \leq n \leq 1$ ，当取 $n = 0$ 时，相当于刚性理想塑性材料， $n = 1$ 时为线弹性材料，当 $0 < n < 1$ 时， $\sigma-\epsilon$ 曲线在 $\epsilon = 0$ 处斜率为无穷大，与材料实际性能不符。但这样的 $\sigma-\epsilon$ 曲线处理应变较大的问题还是方便可行的。

1.3 计算金属成形力学的研究内容

众所周知，金属塑性成形问题是双非线性的，即物理非线性（本构关系非线性）和几何非线性（应变位移关系非线性）。在成形过程中伴随着一系列物理现象发生，如应变强化（冷成形时发生），应变诱发各向异性（薄板成形时常发生），温度及粘性效应（高速冷成形及热成形时发生），动态恢复和动态再结晶（热成形中发生），应变诱发相变（某些材料热成形时发生）等，这些物理现象又影响着成形工件中的应力，应变及本构关系和产品性能。除此

之外,所有金属成形过程都是在有摩擦力存在的情况下发生的,摩擦对金属塑性成形过程起着非常重要的作用,而金属塑性成形过程中的摩擦规律却是不够清楚的。这一切都说明金属塑性成形是个非常复杂的过程。解析解一般是没有的,甚至是不可能的,必须采用数值方法才能求解。如何利用数值方法分析或求解金属塑性成形问题,正是所谓计算金属成形力学所研究的内容。计算金属成形力学是近20年发展起来的塑性力学的一个分支。

金属塑性成形问题中所使用的数值方法主要有滑移线矩阵算子法,上限元法,有限元法,边界元法等。

滑移线矩阵算子法:滑移线矩阵算子法是Ewing和Dewhurst等提出来的。它是从正交的滑移线段开始,将滑移线的曲率半径用均匀收敛的双幂级数表示,级数的系数用列矢量表示,应用矩阵算子法和叠加原理求解滑移线场。其解题步骤如下:

- i, 作出近似的滑移线场。
- ii, 算出各边界滑移线的列矢量。可利用矩阵算子法定出内含方向。
- iii, 已知内含方向后确定滑移线的曲率半径是正还是负。滑移线场内各点的坐标可用程序进行计算。
- iv, 区分 α, β 滑移线,应用计算力的程序算出滑移线场内任意滑移线上的力。
- v, 计算变形所需外力。

由于边界条件不同,有的问题能直接解出,有的问题需要建立数学方程解出未知量后才能算出。滑移线矩阵算子法主要应用于刚性理想塑性材料的平面应变问题。

上限元法,上限元法是Kudo对大量的上限流动模型进行了综合归纳后提出处理上限载荷的一种简便方法。这种方法已经使用于很多种锻压,挤压,冲压及轧制过程的分析中。上限元法是将工件的塑性变形区虚拟地划分为若干基本单元,这些单元仅仅是塑性变形区的大致的部位,每一基本单元的边界条件都对应一定的流动模型,然后计算出每个单元的变形功率。为了计算方便起见,采用了能耗系数作为计算变形体的总的上限载荷的基本数据,即以每单元的能耗系数迭加后得出变形体的总能耗系数,进而确定总的上限载荷,上限元法可用于平面问题,轴对称问题,甚至三维问题,但一般不能确定应力场,速度场。

有限元法:有限元法的基本概念是本世纪40年代提出的,60年代以来大规模地应用于结构问题的分析中,应用于金属塑性成形过程的分析是70年代才开始的。有限元法按其处理的材料模型的不同可分为弹性有限元法;小变形弹塑性有限元法;大变形弹塑性有限元法;刚塑性有限元法;粘塑性有限元法等。有限元法由于其单元形状的多样及方法本身的特点,适用于任何材料模型,任意边界条件,任意结构形状,原则上不发生处理上的困难,正因如此,它已广泛应用于金属塑性成形问题的分析和研究,目前已发展到能分析三维非稳态问题,能耦合热过程,应变诱发各向异性,应变诱发相变,工具弹性变形等因素进行分析,并已与CAD CAM结合起来。总之,应用有限元法分析和研究金属塑性成形问题已取得了其它方法所无法取得的许多成果,解决了其它方法所无法解决的许多问题。有限元法已成为分析和研究金属塑性成形问题的最主要的数值方法。关于各种有限元法在金属塑性成形问题中的应用详细情况及存在问题,将在相应的章节中介绍。

边界元法:应用边界元法分析和研究金属塑性成形问题是80年代才开始的,目前正在蓬勃发展,详细情况可参阅[5]。

参 考 文 献

- 〔1〕 汪凌云编著, 金属塑性变形力学, 重庆出版社, 1986.
- 〔2〕 余同希, 塑性力学, 高等教育出版社, 1989.
- 〔3〕 北川浩著, 刘文斌等译, 塑性力学基础, 高等教育出版社, 1986.
- 〔4〕 山田嘉昭著, 钱仁耕等译, 非线性有限元法基础, 清华大学出版社, 1988.
- 〔5〕 Jin, H., et. al, On the use of the boundary element method for elasticplastic large deformation problems, NUMIFORM 86 Edited by Mattiasson, K., Balkema, 1986, 117~124.

第二章 小变形弹塑性基本理论

这里对小变形弹塑性的基本理论和基本方程作一简略地回顾和小结。

2.1 应力、应变分析

1. 应力张量和应力偏张量

已在弹塑性力学中讨论过，受力物体中一点处的应力状态是二阶对称张量，称为应力张量。可记为 σ 或 σ_{ij} 。应力张量有三个主值（主应力） $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 和三个不变量：

$$J_1 = \sigma_{ii} \quad (2.1.1a)$$

$$J_2 = -\frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) \quad (2.1.1b)$$

$$J_3 = |\sigma_{ij}| \quad (2.1.1c)$$

当坐标轴变换时，应力分量将随之改变，但 J_1, J_2, J_3 不随之改变，它们与坐标轴的选择无关。因此，在用主应力 σ_i 表示 J_i 时，应有

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.1.1d)$$

$$J_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \quad (2.1.1e)$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (2.1.1f)$$

应力张量可分解为两部分：一部分是只引起弹性体积改变的 $\sigma_m\delta_{ij}$ ，称为应力球张量。另一部分是只引起（弹性或塑性的）形状改变的：

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m\delta_{ij} \quad (2.1.2)$$

称为应力偏张量。因此

$$\sigma_{ij} = \sigma_m\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (2.1.3)$$

式中的

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.1.4)$$

称为静水应力或平均正应力，它是应力球张量的分量

应力偏张量也有三个不变量

$$J'_1 = \sigma'_{ii} = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0 \quad (2.1.5a)$$

$$J'_2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = -(\sigma'_1\sigma'_2 + \sigma'_2\sigma'_3 + \sigma'_3\sigma'_1) \quad (2.1.5b)$$

$$J'_3 = |\sigma'_{ij}| = \sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3 \quad (2.1.5c)$$

J'_2 还有许多不同的表达式，兹列出其中的一些：

$$J_2' = \frac{1}{6} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \right] \quad (2.1.5d)$$

$$J_2' = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (2.1.5e)$$

$$J_2' = \frac{1}{2} (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) \quad (2.1.5f)$$

(2.1.5) 式中的

$$\sigma_i' = \sigma_i - \sigma_m \quad (2.1.6)$$

是主偏应力。

在2.3节中将会看到 J_2' 在屈服条件中起重要作用。至于 J_3 ，可看出有这样的特点，即不管 σ_{ii} 的分量有多大，只要有一个主偏应力为零，就有 $J_3 = 0$ ，这暗示 J_3 在屈服条件

中不可能起决定作用。

2. 等斜面上的应力和等效应力

等斜面是指与三主轴（坐标轴方向是三主应力方向）成等倾角，即

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

的面，这样的面，在一点处可作出8个，构成一八面体（图2.1.1），故等斜面又称八面体面。可以求出八面体面元上的正应力和切应力分别为

$$\sigma_8 = \frac{1}{3} J_1 = \sigma_m \quad (2.1.7)$$

$$\tau_8 = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2' \quad (2.1.8)$$

由此可见，八面体每个面元上的应力都是相等的。八面体正应力即是静水应力，与应力球张量有关。八面体切应力则与应力偏张量有关。

为了使不同应力状态的强度效应便于进行比较，引入等效应力 $\bar{\sigma}$ 的概念，其定义是

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2'} \quad (2.1.9a)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \right]} \quad (2.1.9b)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} \quad (2.1.9c)$$

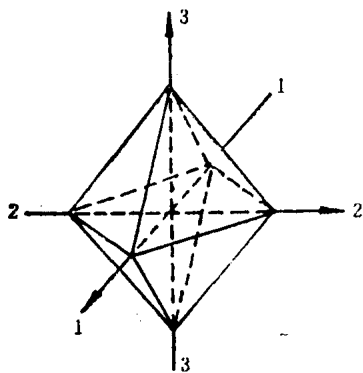


图2.1.1 八面体