

费定晖 周学圣编演
郭大钧 邵品琮主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析 习题集题解

山东科学技术出版社



Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(二)

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(二)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东莒县印刷厂印刷

*

787mm×1092mm 32 开本 17.75 印张 384 千字

1999 年 11 月第 2 版第 8 次印刷

印数: 210 601—220 600

ISBN 7—5331—0100—6

0·6 定价: 15.10 元

图书在版编目(CIP)数据

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (2)/费定
晖编.—2版—济南:山东科学技术出版社, 1999.9

ISBN 7-5331-0100-6

I. Б… II. 费… III. 数学分析-高等学校-解题 IV. O
17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43961 号

出版说明

吉米多维奇(Б. П. Д ЕМИД ОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。

如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有刘一鸣同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目 录

第二章 单变量函数的微分学	1
§ 1. 显函数的导函数	1
§ 2. 反函数的导函数. 用参变数表示的函数的导函数. 隐函数的导函数	111
§ 3. 导函数的几何意义	123
§ 4. 函数的微分	143
§ 5. 高阶的导函数和微分	158
§ 6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理	228
§ 7. 函数的增大与减小. 不等式	260
§ 8. 凹凸性. 拐点	290
§ 9. 未定形的求值法	307
§ 10. 台劳公式	336
§ 11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值	363
§ 12. 依据函数的特征点作函数图形	401
§ 13. 函数的极大值与极小值问题	500
§ 14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线	525
§ 15. 方程的近似解法	541

第二章 单变量函数的微分学

§ 1. 显函数的导函数

1° 导函数的定义 若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值, 则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的增量.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

有意义, 则称为导函数, 而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微分的函数.

函数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率 ($\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$) (图 2.1).

2° 求导函数的基本法则 若 c 为常数且函数 $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ 都有导函数, 则

$$(1) c' = 0; (2) (cu)' = cu';$$

$$(3) (u + v - w)' = u' + v' - w';$$

$$(4) (uv)' = u'v + v'u;$$

$$(5) \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} (v \neq 0);$$

$$(6) (u^n)' = nu^{n-1}u' (n \text{ 为常数});$$

(7) 若函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数, 则

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

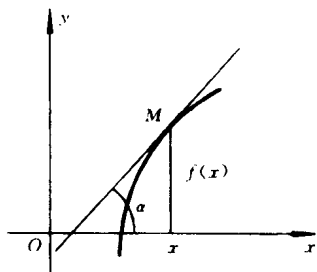


图 2.1

3° 基本公式 若 x 为自变数^{*}, 则

$$\text{I. } (x^n)' = nx^{n-1} (n \text{ 为常数});$$

$$\text{II. } (\sin x)' = \cos x;$$

$$\text{III. } (\cos x)' = -\sin x;$$

$$\text{IV. } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\text{V. } (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\text{VI. } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{VII. } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{VIII. } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{IX. } (\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{X. } (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0); (e^x)' = e^x;$$

$$\text{XI. } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1);$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$\text{XII. } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$\text{XIII. } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$\text{XIV. } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$\text{XV. } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4° 单侧的导函数 表示式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

及

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的左导函数或右导函数.

导函数 $f'(x)$ 存在的充分且必要的条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

* 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中, 一些明显的定义域要求, 例如本节公式 V 中要求 $x \neq k\pi$ (k 整数), VI 中要求 $|x| < 1$ 等等. 以及例如尔后 §5 中相应的限制, 一般地就不再一一声明.

5° 无穷的导函数 若在某一点 x 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 点有无穷的导函数. 在此种情形下, 函数 $y = f(x)$ 的图形上在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

821. 若 x 由 1 变到 1000, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \lg x$ 的对应的增量 Δy .

解 $\Delta x = 1000 - 1 = 999;$

$$\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3.$$

822. 若 x 由 0.01 变到 0.001, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的对应的增量 Δy .

解 $\Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009;$

$$\Delta y = \frac{1}{(0.001)^2} - \frac{1}{(0.01)^2} = 990000.$$

823. 设:

$$(a) y = ax + b; (6) y = ax^2 + bx + c; (B) y = a^x.$$

若变量 x 得到增量 Δx , 求增量 Δy .

解 (a) $\Delta y = [(ax + a\Delta x) + b] - [ax + b] = a\Delta x;$

$$\begin{aligned} (6) \Delta y &= [a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c] \\ &\quad - [ax^2 + bx + c] \end{aligned}$$

$$= (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2;$$

$$(B) \Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

824. 证明:

$$(a)\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$(6)\Delta[f(x)g(x)]$$

$$= g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).$$

证 (a) $\Delta[f(x) + g(x)]$

$$= [f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]$$

$$= [f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]$$

$$= \Delta f(x) + \Delta g(x),$$

于是,

$$\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$(6)\Delta[f(x)g(x)]$$

$$= [f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)] - [f(x)g(x)]$$

$$= [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x)$$

$$+ [g(x + \Delta x) - g(x)]f(x)$$

$$= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + \Delta g(x)f(x),$$

于是,

$$\Delta[f(x)g(x)]$$

$$= g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).$$

同样,我们还可将(6)的结果写成

$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x + \Delta x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x).$$

825. 过曲线 $y = x^2$ 上的二点 $A(2, 4)$ 和 $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$

引割线 AA' , 求此割线的斜率, 设:

(a) $\Delta x = 1$; (5) $\Delta x = 0.1$; (B) $\Delta x = 0.01$;

(r) Δx 为任意小.

在已知曲线上 A 点的切线的斜率等于甚么?

解 割线 AA' 的斜率 $k_{AA'} = \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x$,

(a) $k_{AA'} = 5$; (5) $k_{AA'} = 4.1$;

(B) $k_{AA'} = 4.01$; (r) $k_{AA'} = 4 + \Delta x$.

于是, 在 A 点的切线斜率为

$$k_A = \lim_{A' \rightarrow A} k_{AA'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

826. 把 Ox 轴上的线段 $1 \leq x \leq 1 + h$ 利用函数关系 $y = x^3$

映变到 Oy 轴上. 求其平均的伸长系数. 设:

(a) $h = 0.1$; (5) $h = 0.01$; (B) $h = 0.001$, 计算此系数的值.

当 $x = 1$ 时伸长的系数等于甚么?

解 平均伸长系数 $\bar{l} = \frac{(1 + h)^3 - 1^3}{h} = 3 + 3h + h^2$,

(a) $\bar{l} = 3 + 3(0.1) + (0.1)^2 = 3.31$;

(5) $\bar{l} = 3 + 3(0.01) + (0.01)^2 = 3.0301$;

(B) $\bar{l} = 3 + 3(0.001) + (0.001)^2 = 3.003001$.

于是,

$$l|_{x=1} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{l} = 3.$$

827. 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式表出

$$x = 10t + 5t^2$$

式中 t 以秒计的时间, x 为以米计的距离. 求在 $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设: (a) $\Delta t = 1$; (б) $\Delta t = 0.1$; (в) $\Delta t = 0.01$, 计算此速度的值. 当 $t = 20$ 时运动的速度等于甚么?

解 平均速度 $\bar{v} = \{[10(20 + \Delta t) + 5(20 + \Delta t)^2] - [10 \times 20 + 5 \times 20^2]\} \div \Delta t$
 $= 210 + 5\Delta t$ (米 / 秒),

$$(a) \bar{v} = 210 + 5 \times 1 = 215 \text{ (米 / 秒)};$$

$$(б) \bar{v} = 210.5 \text{ (米 / 秒)};$$

$$(в) \bar{v} = 210.05 \text{ (米 / 秒)}.$$

于是,

$$v|_{t=20} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (210 + 5\Delta t) = 210 \text{ (米 / 秒)}.$$

828. 根据导函数的定义, 直接求下列函数的导函数:

$$(a) x^2; (б) x^3; (в) \frac{1}{x}; (г) \sqrt{x}; (д) \sqrt[3]{x};$$

$$(e) \operatorname{tg} x; (ж) \operatorname{ctg} x; (з) \arcsin x; (и) \arccos x;$$

$$(к) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

解 (a) $y = x^2$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

$$(6) y = x^3,$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2. \end{aligned}$$

$$(B) y = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(\Delta x + x)}.$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x(\Delta x + x)} \right] \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

$$(r) y = \sqrt{x},$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0).$$

$$(d)y = \sqrt[3]{x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x \neq 0).\end{aligned}$$

$$(e)y = \operatorname{tg} x,$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \Delta x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \Delta x \sec^2 x}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)}.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x \sec^2 x}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)}\end{aligned}$$

$$= \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\kappa)y = \operatorname{ctg} x,$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} \Delta x - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x} - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{-1 - \operatorname{ctg}^2 x}{\Delta x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)} \\ &= -\frac{\csc^2 x}{\Delta x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)}.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\csc^2 x}{\Delta x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)} \\ &= -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

$$(3)y = \arcsin x,$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin[(x + \Delta x) \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x+\Delta x)^2} x]}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin[(x + \Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}{(x + \Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}} \\ &\quad \cdot \frac{(x + \Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin t}{t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x} \\
&= \frac{\arcsin t}{t} \\
& \cdot \frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},
\end{aligned}$$

式中 $t = (x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$,

从而 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} t = 0$.

于是,

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}} \\
&\quad \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

其中 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1$;

(ii) $y = \arccos x$,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arccos(x+\Delta x) - \arccos x}{\Delta x} \\
&= \frac{\arcsin[(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}{\Delta x} \\
&= \frac{\arcsin t}{t} \\
&\quad \cdot \frac{-(2x+2\Delta x)}{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},
\end{aligned}$$

式中 $t = (x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$.