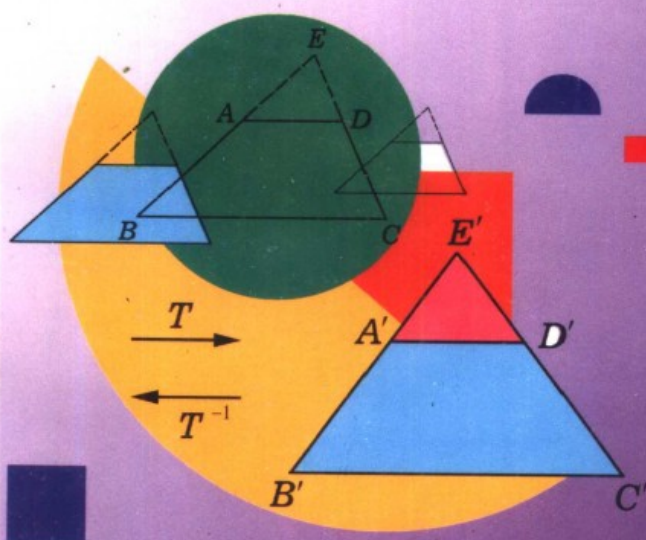


SHU XUE WEN TI HUA GUI LI LUN YU FANG FA

数学问题化归理论与方法

喻 平 著



广西师范大学出版社

数学问题化归理论与方法

喻 平 著

广西师范大学出版社

数学问题化归理论与方法

喻 平 著

责任编辑:宋铁莎 李苑青

封面设计:杨 琳

广西师范大学出版社出版发行

邮政编码:541001

(广西桂林市中华路 36 号)

桂林工学院印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32

印张:9.25

字数:242 千字

1999 年 6 月第 1 版

1999 年 6 月第 1 次印刷

印数:0001—1000 册

ISBN 7-5633-2857-2/O · 039

定价:13.00 元

前 言

要解决一个数学问题，往往需要把问题进行转化，将复杂的问题转化为简单的问题，将困难的问题转化为容易解决的问题，将未知的问题转化为已知的问题等等，这种转化问题的过程就称为化归。化归几乎存在于所有的数学问题解决之中，因而也就形成了一种重要的数学思想和方法。

问题经过化归后，变成了一个新的问题，显然，新的问题与原来问题之间必然存在某种关系。那么这种关系应怎样描述，在解决了新的问题之后能否保证使原问题得解，这就是本书要讨论的第一个问题。中学数学中包括了哪些与化归有关的内容，这些化归的理论根据是什么，这些化归有哪些具体的应用技巧和方法，等等，是本书要讨论的第二个问题。

第一章阐述问题之间的关系，用等价关系和半等价关系去刻画化归前后两个问题之间的具体关系，将化归分为等价化归和半等价（或单向）化归，从而为化归建立了理论基础。第二章至第五章分别对命题化归、映射化归、变量替换以及交轨模式化归进行了讨论，在运用化归理论的同时，结合大量的实例，深入浅出地论述了化归的技巧和方法。第六章讨论了不变量化归，试图采用较高的观点和方法去研究数学中的化归问题。

作为数学教育工作者，应该具有在深层次上钻研数学教材的能力，不仅要求熟练地掌握数学知识，而且要求深刻领会数学的思想方法，理解数学方法的基本原理，只有这样，才可能使自己真正做到真正地驾驭教材，搞好教学工作。编写本书的目的之一，就是为中等

学校数学教师提高业务水平提供一份参考资料和业务进修参考书。同时，本书可作为高师院校数学教育专业本、专科以及数学教育硕士课程的《数学方法论》参考书。

我在本书的写作过程中，得益于郑毓信教授的教诲和鼓励，使写作受到诸多启发。湘潭师范学院王子兴教授，广西师范大学苏健基教授、易忠教授也为我的写作给予了大力支持，特别是广西师范大学徐树道副教授，从选题到完成书稿都为我的工作提出了许多具体的宝贵意见，并且审阅了全部书稿。广西师范大学出版社宋铁莎副教授为本书的编辑和出版做了大量的工作。在此，我向以上诸位先生表示衷心的感谢。

在“数学方法论”的微观领域中，利用数学方法去描述化归方法的研究工作才刚刚起步，编写这本书是我的一个大胆尝试。由于水平所限，难免有不实之处，因此，恳请广大读者批评指正。

作者

1998年12月

目 录

第一章 化归理论	1
1.1 化归概说	1
1.2 等价关系与等价类	3
1.3 半等价关系与半等价集	7
1.4 映射与关系	8
1.5 数学模型	14
1.6 化归原理	16
第二章 命题化归	22
2.1 命题的抽象度	22
2.2 等价命题类	23
2.3 半等价命题集	31
2.4 命题的典型化化归	37
2.5 命题的特殊化化归	43
2.6 命题的逐步逼近化归	48
2.7 构造辅助命题化归	51
2.8 平面几何中的辅助元素问题	66
2.9 立体几何中的辅助元素问题	72
第三章 映射化归	79
3.1 RMI 原则	79
3.2 弱 RMI 原则	88
3.3 恒等变换	91
3.4 点数映射化归	102

3.5	实复数映射化归	114
3.6	向量化归	117
3.7	反函数化归	120
3.8	线性变换	127
3.9	合同变换	134
3.10	相似变换	148
3.11	极坐标变换	152
第四章	变量替换	164
4.1	变量替换的化归原理	164
4.2	整式变换	173
4.3	分式变换	175
4.4	无理变换	182
4.5	三角变换	184
4.6	参数变换	192
第五章	交轨模式化归	201
5.1	波利亚提出的两种模式	201
5.2	一元初等方程的等价化归	204
5.3	方程组的等价化归	210
5.4	二元不等式的解域	212
5.5	两个组合定理	218
5.6	问题集与轨迹集	221
5.7	集合划分与概念划分	224
5.8	交轨模式化归实例分析	231
5.9	待定系数法	238
第六章	不变量化归	243
6.1	再论映射化归	243
6.2	对称变换	248
6.3	二次曲线的不变量化归	252

6.4 仿射变换	261
6.5 射影变换	277
参考文献	286

第一章 化归理论

1.1 化归概说

在解决数学问题的过程中,我们往往把待解决的问题进行转化,将复杂的问题转化为简单的问题,将困难的问题转化为容易的问题,将未解决的问题转化为已解决的问题等等.这种数学问题之间的相互转化,我们就称为数学化归.

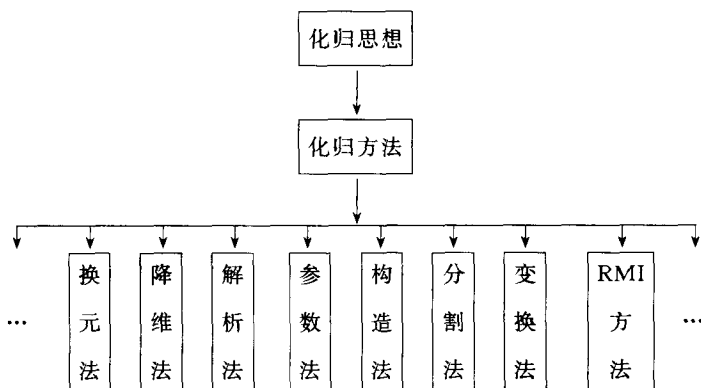
辩证法告诉我们:任何事物都不是孤立、静止和一成不变的,而是在不断地发展变化着.因此,作为一个数学系统或数学结构,其组成要素之间的相互依存和相互联系的形式是可变的,正是这种可变的性质,产生了数学化归.

数学化归在数学的理论研究及数学问题的解决过程中都占有重要的地位.例如,两个数学系统之间的同构关系(视为一种化归),使得不同的数学对象化归在同一个数学系统中进行研究,从而导致新的数学理论的产生,因此推动了数学的发展.另一方面,化归又为解决数学问题提供了一个有力的武器.

“问题是数学的心脏”,数学问题的解决是教学中的一个重要组成部分,而几乎所有的数学问题的解决都离不开化归,只是所体现的化归形式不同而已.计算题是利用规定的法则进行化归;证明题是利用定理、公理或已解决了的命题进行化归;应用题是利用数学模型进行化归.因此可以说,离开化归,数学问题的解决将寸步难行.

数学化归,我们从广义的角度理解为一种思想,即数学化归思

想；从狭义的角度理解为一种方法，即数学化归方法。化归思想指的是一种思考问题的方法；化归方法则是指实现这个思考方法采用的具体手段。也就是说，化归思想是制定解决问题的策略，而化归方法则是采用一定的具体方法去执行这种策略。两者的关系如下：



例如，解二元一次方程组，化归思想是利用等价变形消元，化归方法是代入法、加减法或行列式法。

数学化归思想，它本身包含着许多其他的数学思想。化归的前提是整体考察对象，必要时应把数学对象分类化归。化归思维过程有时采用运动思想，有时采用映射思想，有时退中求进，逐步逼近，有时把一般问题特殊化处理，然后反过去解决一般性问题，有时需要从无限到有限的过渡，等等。因而化归思想与整体思想、分类思想、函数思想、逐步逼近思想、有限到无限的思想等，均有共同的要素。

对于化归方法的研究，应从两个方面去进行：一是探讨化归的理论；二是研究化归方法的具体实施。

探讨化归的理论，就是要为化归的方法建立理论基础。数学问题为什么能够进行化归，化归前后的问题之间存在一种什么关系，为什么经过化归后问题就容易得到解决，等等，都属于化归的理论问题。本书用数学中的“等价关系”和“半等价关系”去刻画数学问题

题之间的关系,用数学方法为化归建立理论基础.

研究化归方法的具体实施,即对一些具体的化归方法,根据我们建立的化归理论去判别其化归的性质,同时还要研究一些化归的技巧和策略.

本章研究第一个问题,即化归的理论基础.从第二章开始讨论第二个问题,主要论述中学数学中常见的一些化归方法.

1.2 等价关系与等价类

定义 1 对于集合 A 中两元素 a 和 b ,按给定顺序组成一个序偶,记为 (a, b) ,称元素 a 为序偶的第一个元素,称 b 为序偶的第二个元素.

序偶 (a, b) 的定义中要注意两点:一是 $a \neq b$ 时, $(a, b) \neq (b, a)$;二是 $(a, b) = (x, y)$ 当且仅当 $a = x$, 且 $b = y$.

定义 2 集合 A 和 B 的笛卡儿积 $A \times B$ 是全体序偶 (a, b) 的集合,其中 $a \in A, b \in B$. 记作

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

($a \in A \wedge b \in B$ 表示 $a \in A$, 且 $b \in B$.)

定义 3 给定全集 I 中两个集合 A, B , 一个具有定义域 A 和 B 的二元关系 R 是指笛卡儿积 $A \times B$ 的一个子集,即 $R \subseteq A \times B$. 如果 $(a, b) \in R$, 则称 a, b 具有关系 R , 记作 aRb ; 如果 $(a, b) \notin R$, 则称 a, b 不具有关系 R , 记作 $a\bar{R}b$. 特别地, 集合 A, A 间的二元关系, 简称为 A 中的关系.

空集也是二元关系,我们称它为空关系.

当集合 $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b\}$ 时, A 和 B 的二元关系共 4 个, 分别为 $\emptyset, \{(a_1, b)\}, \{(a_2, b)\}, \{(a_1, b), (a_2, b)\}$. A 上的二元关系共有 16 个. 一般地, 如果集合 A 中有 m 个元素, 集合 B 中有 n 个元素, 那么 A 和 B 的二元关系共有 2^{mn} 个, A 上的二元关系共有 2^{n^2}

个.

定义 4 集合 A 上的一个关系 $\sim$ 叫做一个等价关系, 假如 $\sim$ 满足:

- (1) 自反性: $\forall a \in A \Rightarrow a \sim a$;
- (2) 对称性: $\forall a, b \in A, a \sim b \Rightarrow b \sim a$;
- (3) 传递性: $\forall a, b, c \in A, (a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow a \sim c$.

例 1 在 $R - \{0\}$ 上定义 a, b 之间的关系 $\sim$: $a \sim b$ 当且仅当 $ab > 0$. 显然, $\sim$ 是 $R - \{0\}$ 上的等价关系.

例 2 设 I 为整数集合, 试证:

$$R = \{(a, b) | a \in I \wedge b \in I \wedge a - b \equiv 0 \pmod{m}, m > 0\}$$

是 I 上的等价关系.

证明 (1) $\forall a \in I, a - a \equiv 0 \pmod{m}$,

$$\therefore a \sim a.$$

(2) $\forall a \in I, b \in I$,

$$\begin{aligned} a - b \equiv 0 \pmod{m} & \quad \text{当且仅当} \quad a \equiv b \pmod{m} \\ & \quad \text{当且仅当} \quad b \equiv a \pmod{m} \\ & \quad \text{当且仅当} \quad b - a \equiv 0 \pmod{m}. \end{aligned}$$

所以 $a \sim b \Rightarrow b \sim a$.

(3) $\forall a \in I, b \in I, c \in I$,

$$a - b \equiv 0 \pmod{m} \wedge b - c \equiv 0 \pmod{m}$$

当且仅当 $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m}$

当且仅当 $a \equiv c \pmod{m}$

当且仅当 $a - c \equiv 0 \pmod{m}$.

所以 $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

故 R 为 I 上的等价关系.

定理 1 设 R_1, R_2 是非空集合 A 上的等价关系, 则 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的等价关系.

证明 (1) $\forall a \in A$, 有 $a R_1 a, a R_2 a$, 即

$$(a, a) \in R_1 \wedge (a, a) \in R_2.$$

故 $(a, a) \in R_1 \cap R_2$, 即 $a(R_1 \cap R_2)a$.

(2) $\forall (a, b) \in R_1 \cap R_2$, 有

$$(a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2.$$

而 R_1, R_2 在 A 上对称, 所以 $(b, a) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_2$, 即

$$(b, a) \in R_1 \cap R_2.$$

(3) $\forall (a, b), (b, c)$, 有

$$(a, b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b, c) \in R_1 \cap R_2.$$

从而,

$$(a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2,$$

$$(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2,$$

$$(a, c) \in R_1 \wedge (a, c) \in R_2,$$

$$(a, c) \in R_1 \cap R_2.$$

故 $R_1 \cap R_2$ 是 A 上等价关系.

定义 5 设 $\sim$ 是非空集合 X 上的等价关系, 对 $\forall a \in X$, 令 $[a] = \{x | x \in X \wedge x \sim a\}$, 则称 $[a]$ 为 a 关于 $\sim$ 的等价类.

例 3 设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $R = \{(x, y) | x \in X \wedge y \in X \wedge x - y \equiv 0 \pmod{3}\}$, 则

$$[1] = [4] = [7] = [10] = \{1, 4, 7, 10\},$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\},$$

$$[3] = [6] = [9] = \{3, 6, 9\}.$$

关于等价类, 有如下性质:

定理 2 设 $\sim$ 为非空集合 X 上的等价关系, 则

$$(1) \forall x \in X \Rightarrow [x] \neq \emptyset;$$

$$(2) x \sim y (x, y \in X) \Rightarrow [x] = [y];$$

$$(3) \neg (x \sim y) \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset;$$

$$(4) \bigcup \{[x] | x \in X\} = X.$$

其中 $\neg p$ 的意义是非 p .

证明 (1) 因为 $\forall x \in X$, 有 $x \sim x$. 所以 $x \in [x]$. 故 $[x] \neq \emptyset$.

(2) $\forall z \in [x] \wedge x \sim y$, 有 $x \sim z \wedge x \sim y$. 从而 $y \sim x \wedge x \sim z$. 则 $y \sim z$. 所以 $z \in [y]$. 故 $[x] \subseteq [y]$.

同理可证 $[y] \subseteq [x]$. 故 $[x] = [y]$.

(3) 假设 $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, 则 $\exists x_0$, 使

$$x_0 \in [x] \wedge x_0 \in [y].$$

则 $x \sim x_0 \wedge y \sim x_0$, 从而 $x \sim x_0 \wedge x_0 \sim y$, 即 $x \sim y$. 与 $\neg(x \sim y)$ 矛盾. 故 $[x] \cap [y] = \emptyset$.

(4) $\forall z \in \bigcup \{[x] | x \in X\}$, 必 $\exists y \in X$, 使 $z \in [y] \subseteq X$, 即 $z \in X$. 则 $\bigcup \{[x] | x \in X\} \subseteq X$. 反之, $\forall z \in X \Rightarrow z \sim z$, 即 $z \in [z] \subseteq \bigcup \{[x] | x \in X\}$. 从而 $z \in \bigcup \{[x] | x \in X\}$. 则 $X \subseteq \bigcup \{[x] | x \in X\}$. 于是

$$\bigcup \{[x] | x \in X\} = X.$$

定义 6 设 $\sim$ 是非空集合 X 上的等价关系, 以关于 $\sim$ 的全体等价类为元素的集合称为 $\sim$ 的商集, 记为 $X/\sim$.

由定理 2 知, $X/\sim$ 中的元素非空, $X/\sim$ 中任意两个元素不交, $\bigcup (X/\sim) = X$.

定义 7 设 X 为一个非空集合, 如果 X 的一个子集族 A 满足:

- (1) A 中的元素非空;
- (2) $\forall a \in A, \forall b \in A, a \neq b \Rightarrow a \cap b = \emptyset$;
- (3) $\bigcup A = X$.

则称 A 为 X 的一个划分.

显然, 非空集合 X 上等价关系 $\sim$ 的商集 $X/\sim$ 为 X 的一个划分; 反之, 给了 X 的一个划分, 便给了 X 上等价关系 $\sim$ 的商集 $X/\sim$, 也就确定了 X 上的一个等价关系. 所以有:

定理 3 非空集合 X 上的等价关系 $\sim$ 确定 X 的一个划分, 反之亦然.

例 4 集合 $X = \{a, b, c, d\}$, X 的一个划分为 $\{\{a, b\}, \{c\}\}$,

$\{d\}$ }, 该划分所决定的等价关系 $\sim = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$. 反之, 由后面的等价关系 $\sim$ 又确定了前面的 X 的一个划分.

这样, 一个划分就把 X 分为若干个等价类 $[a]$, 这些等价类集就是 X 的商集. 集合 X 中的任何元素必属于一个等价类, 而且只能属于一个等价类.

1.3 半等价关系与半等价集

定义 1 在非空集合 X 上定义一个关系 $<$ 称为半等价关系, 假如 $<$ 满足:

(1) 自反性: $\forall a \in X \Rightarrow a < a$;

(2) 传递性: $\forall a, b, c \in X, (a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow a < c$.

例如, 自然数集 $\mathbf{N}$ 上的“整除”关系是半等价关系. 因为 $\forall a \in \mathbf{N}, a|a$; 又若 $a|b, b|c$, 则 $a|c$.

又如, 实数集 $\mathbf{R}$ 上的小于或等于关系“ $\leq$ ”是 R 上的半等价关系.

非空集合 X 上的一个等价关系 $\sim$ 确定 X 的一个划分, 半等价关系却不具有这个性质. 然而, 集合 X 的一个半等价关系 $<$ 对 X 有一种刻画, 为此, 引入下面概念.

定义 2 设 $<$ 是集合 X 上的一个半等价关系, $a \in X$, 则集合 $(a) = \{x | x \in X \wedge x < a\}$ 称为 a 所在的 X 的一个半等价集.

例 1 设 $X = \{1, 5, 2, 10, 6\}$, “ $\leq$ ”是 X 上的半等价关系, 这里 $(5) = \{1, 2, 5\}$, $(10) = \{1, 5, 2, 10, 6\} = X$.

定理 1 设 $<$ 是非空集合 X 上的一个半等价关系, 则 $\forall a \in X$, a 至少属于 X 的一个半等价集.

证明 因为 X 非空, 所以 $\exists x \in X$, 又对 $\forall a \in X$, 由定义 1 中 (1), 知 $a < a$, 由定义 2 知 $a \in (a)$.

定理 2 设 $<$ 是非空集合 X 上的一个半等价关系, 对 $\forall a, b \in X$, 若 $a < b$, 则 $(a) \subseteq (b)$.

证明 由定理 1 知 (a) 存在, 若 (a) 中只有一个元素 a , 由题设及定义 2 得 $a \in (b)$, 所以 $(a) \subseteq (b)$. 若 (a) 中的元素不惟一, 则对 $\forall x \in (a)$, 有 $x < a$, 而 $a < b$, 由定义 1 中 (2) 知 $x < b$, 所以 $x \in (b)$, 故 $(a) \subseteq (b)$.

例 2 设 $X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, 定义关系 $<$ 为“整除”. 显然, $(16) = \{2, 4, 8, 16\}$, 而 $8 < 16$, 所以 $(8) \subseteq (16)$. 事实上, $(8) = \{2, 4, 8\}$.

定义 3 设 $<$ 是定义在非空集合 X 上的半等价关系, 若 $\exists a \in X$, 使得对 $\forall x \in X$, 都有 $a < x (x < a)$, 则称 a 为 X 在关系 $<$ 下的最小元 (最大元).

例 3 设 $X = \{a, b, c\}$, “ $<$ ” = $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c)\}$, 则 $<$ 是半等价关系, 即 $a < a, b < b, c < c, a < b, a < c$. 因为对 $\forall x \in X$, 均有 $a < x$, 故在 “ $<$ ” 下 X 中有最小元 a , 但没有最大元.

如果 a 是集合 X 在关系 $<$ 下的最大元, 由定义 2 知, $\forall x \in X$, 有 $x \in (a)$, 所以 $X \subseteq (a)$. 另一方面 $(a) \subseteq X$, 故 $X = (a)$, 于是得:

定理 3 若集合 X 在关系 $<$ 下存在最大元 a , 则 $X = (a)$.

该结论表明, 若 X 存在最大元, 则 X 就是最大元所在的半等价集.

如果 a 是 X 在关系 $<$ 下的最小元, 则 $\forall x \in X$, 有 $a < x$, 由定理 2 知 $(a) \subseteq (x)$, 即最小元所在的半等价集是 X 中所有半等价集的子集.

1.4 映射与关系

定义 1 设 A, B 是两个集合, $f \subseteq A \times B$, 如果对于 $\forall a \in A$, 存

在惟一的 $b \in B$, 使 afb , 则称关系 f 是 A 到 B 的一个映射, 记为

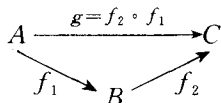
$$f: A \rightarrow B.$$

A 叫做 f 的定义域, b 叫做 a 在 f 作用下的象, 记为 $b=f(a)$, a 叫做 b 的一个原象. 通过 f , B 中所有与 A 中元素相对应的元素的集合叫做 f 的值域 R_f , 通常用 $f(A)$ 表示, 即

$$f(A) = \{b | b \in B, \text{ 存在 } a \in A, \text{ 使得 } f(a) = b\}.$$

显然, $f(A) \subseteq B$.

定义 2 设 f_1 是从集合 A 到 B 的映射, f_2 是从集合 B 到 C 的映射, 由 f_1, f_2 确定的 A 到 C 的映射 $g: a \rightarrow f_2(f_1(a)) (\forall a \in A)$ 叫做映射 f_1, f_2 的合成, 记作 $g = f_2 \circ f_1$, 即 $g(a) = f_2(f_1(a))$. g 可用下图表示:



定义 3 设 f 是从集合 A 到 B 的一个映射. 若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是 A 到 B 的一个单射. 如果 $f(A) = B$, 那么称 f 是 A 到 B 的一个满射. 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 是 A 到 B 的一个双射.

为了讨论双射、单射、满射与等价关系及半等价关系之间的联系, 我们先给一个定理.

定理 1 设 $f_1: A \rightarrow B, f_2: B \rightarrow C$.

- (1) 如果 f_1 和 f_2 都是满射, 那么 $f_2 \circ f_1$ 是 A 到 C 的满射;
- (2) 如果 f_1 和 f_2 都是单射, 那么 $f_2 \circ f_1$ 是 A 到 C 的单射;
- (3) 如果 f_1 和 f_2 都是双射, 那么 $f_2 \circ f_1$ 是 A 到 C 的双射.

证明 (1) $\forall c \in C$, 因 f_2 是满射, 所以必存在 $b \in B$, 使得 $f_2(b) = c$. 又由于 f_1 是满射, 所以存在 $a \in A$, 使得 $f_1(a) = b$. 于是 $c = f_2(b) = f_2(f_1(a)) = f_2 \circ f_1(a)$, 故 $f_2 \circ f_1$ 是 A 到 C 的满射.

(2) 设 $a_i, a_j \in A$, 且 $a_i \neq a_j$. 由于 f_1 是单射, 因此 $f_1(a_i) \neq$