面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

## 大学数学

# 一元微积分

萧树铁　主编
朱学贤　郑建华　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

## 内容提要

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材。

本书力图按历史发展的本来面目编写，将一元微积分分成两部分。第一部分在直观的基础上，介绍一元微积分的基本内容，注重训练应用和计算，并体会微积分的朴素思想。其间介绍的许多应用实例，特别是Kepler定律的证明有助于开拓视野和增强学习的兴趣。第二部分重点是"极限理论"和"一致收敛性"的概念，着重培育理性的思维。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材，也可供各类专业人员学习参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

大学数学：一元微积分/萧树铁主编．—北京：高等教育出版社，2000

ISBN 7-04-008818-5

Ⅰ．大…　Ⅱ．萧…　Ⅲ．①高等数学②微积分

Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第60412号

大学数学　一元微积分

萧树铁　主编

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | | |
| 社　　址 | 北京市东城区沙滩后街55号 | 邮政编码 | 100009 |
| 电　　话 | 010-64054588 | 传　　真 | 010-64014048 |
| 网　　址 | http://www.hep.edu.cn | | |
| 经　　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 印　　刷 | 国防工业出版社印刷厂 | | |
| 纸张供应 | 山东高唐纸业集团总公司 | | |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2000年7月第1版 |
| 印　　张 | 23.75 | 印　　次 | 2000年7月第1次印刷 |
| 字　　数 | 434 000 | 定　　价 | 20.10元 |

# 序　　言

长期以来,我国高等学校各类非数学专业的数学基础课都限于以微积分为主要内容的“高等数学”.面临21世纪各门知识的相互渗透和自身加速更新的形势以及全面提高人才素质的需要,数学的作用将显得日益重要.而作为高等学校数学基础课的作用,除了作为各门学科的重要工具以外,它在提高人才全面素质中起着重要作用的培育理性思维和审美功能方面也应得到充分的重视.这就需要一部与之相适应的教材.

这套“大学数学”教材是在前国家教委“面向21世纪教学内容和课程体系改革”研究课题的支持下完成的.共有五本:《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》与《数学实验》.我们认为它们是21世纪高级人才应该普遍具备的数学基础.希望学生通过对它们的学习,能使他们在掌握数学工具、提高理性思维和审美素质以及获取新知识的能力诸方面打下一个良好的基础.这种要求应该对任何专业都一样,只是在深度上及侧重的方面可能会有些区别.

在现行的《高等数学》中,微积分和数学分析之间的关系一直是一个难以处理的问题.19世纪以前的微积分,以它的直观性和不断扩展的应用显示了数学的威力,但同时也暴露出其缺乏严格逻辑基础的缺点.诞生于19世纪的数学分析则以其逻辑的完美显示了数学的理性精神.这两个方面在教材中如果结合得好,可以激发初学者对数学的兴趣;但如果结合得不好,则很可能失去两者的活力而形成一堆枯燥的形式推理和繁琐的计算.在本书中我们力图按其本来的面目来编写,把一元微积分分为两部分:前一部分注重直观,着重训练应用和运算,后一部分则着重培育理性思维.

《多元微积分及其应用》的应用内容包括复变函数、微分几何及常微分方程.

《代数与几何》的代数部分基本上是线性代数,其内容也可分为两部分:一部分是以算法为主的求解一般线性方程组的内容;另一部分则主要研究线性空间及其上的线性映射.由于后者是前者的理论框架,而且它已成为近代数学普遍使用的基本语言,因此本书在集合、关系、运算、代数结构之后,较快地进入后者的讨论;并且通过数值表示把两者结合起来.

至于几何,尽管它在古希腊及19世纪有其辉煌的历史,在本世纪后半叶也进入了数学研究的主流行列,但近50年来,在我国高校的数学基础课中,却一直被压

缩到只剩下一点空间解析几何.这对培养学生的形象思维及理性思维的习惯极为不利.本书除了在多元微积分应用中加上古典微分几何基础(曲线和曲面)以外,在几何部分则增加了"仿射及射影几何"及非欧几何的两个初等模型.

本世纪后半叶以来,人们对事物认识演化的表现之一是从单纯的确定性思维模式进入确定—随机性模式.这一趋势还在发展,在高校数学教学中已受到广泛的关注.我们提出把《随机数学》正式列入基础课.本书内容的重点是通过几个典型范例的讨论,使学者学会描述与表达随机性及随机变化的过程,即集中于对随机模式认识的训练.

在这套系列教材中《数学实验》有其独特性.它的知识内容包含数值方法、统计计算和优化计算的基本概念和初等方法,其目的是为学生自已动手解决问题提供必要的数学知识和软件平台.这是一门以学生独立动手,教师起辅导作用的课程,这类课程的教材如何编写,本书只是一种尝试.

以上是这套教材的一个简要介绍.这套教材既是一个统一的整体,各部分之间又有相对的独立性,可以独立讲授.在内容方面,它包含了现行的高等数学、线性代数、复变函数、微分方程、微分几何、数值分析、概率统计、优化计算等课程最基本的内容,而总学时则大为减少.我们在清华大学几个班的试验表明:全部讲完上述内容所需的学时大约为340左右.除数学实验外,如果再减掉一些内容,280学时左右也是可以的,可由教师灵活掌握.

这套教材在有些大段落后面,附有一段"评注",主要讲述这一段的重要思想和可能的发展,为有兴趣的学生进一步学习数学开一点小小的窗口.

大凡一本可用的教材,往往有两种写法:尽量多写一点,以便于教师选择;或尽量写少一点,以便于教师发挥.这套教材似乎偏于前者.原因是这是一个尝试,对习惯讲授传统"高等数学"的教师来说,对这套教材可能不太适应,也许需要多一些说明.

这套教材原有的基础是清华大学出版社1995年出版,萧树铁、居余马、葛严林等主编的三卷本《高等数学》.参与现在这套教材编写的有朱学贤、郑建华、章纪民、居余马、李海中、钱敏平、叶俊、姜启源、高立、何青等人.谭泽光、白峰杉、韩云瑞等同志为本书的编写作了大量的工作.高教出版社对本书的编写和出版始终给予热情的支持.

前面已说过,这套教材的编写是一个尝试.目的在于根据"百家争鸣"的精神,参与探索大学数学基础课在培养下一世纪高素质人才中所应起的作用,以及与之相适应的教材建设.我们衷心欢迎各方人士对这套教材评头论足,指出缺点和错误.如果这套教材能起到抛砖引玉的作用,我们就很满足了.

萧树铁

1999年6月

# 前　言

微积分历来是大学基础数学课程最重要的组成部分.

知识资本是成功国家的基石. 21 世纪的大学教育是更高层次的基础教育. 它的目的之一是培养学生具有终生学习的扎实基础;能充分发掘自己的潜力,去吸取和创造新的知识和技术. 微积分的教学也应该围绕这个宗旨.

本书的内容分为"直观基础上"和"理性"的微积分两大块(第一篇和第二篇). 这两个名字取得未必合适,主要的目的是希望强调历史上微积分发展的不同阶段以及不尽相同的教学重点.

第一篇在 3 个直观基本假设(基本初等函数是连续的;两个重要极限及连续函数可积)的基础上,讲述微积分的基本思想和方法,大体相当于 17 和 18 世纪微积分的基本内容. 主要强调的是微积分的运算和它对初等连续模型的应用,包括极限、连续、导数、导数的应用(微分及其应用、连续函数的一些性质、函数的形态和函数作图、不定型的 L'Hospital 法则、导数在经济学中的应用和 Taylor 公式等)、定积分、不定积分、定积分在几何、物理及经济学中的应用和常微分方程初步(一阶线性方程、一些特殊的二阶方程及 Kepler 三大定律的证明)等内容. 本书尽可能把这部分内容写得浅近一些,以我国中学毕业生现有的数学基础,相信经过适当的训练,对接受和理解诸如 "以直代曲","从有限认识无限"等思想方法不会有太大的困难. 同时也为以后数学的学习及例如物理等课程的学习作好铺垫. 本书还以评注的形式在每章结尾处开一些小窗口,以激发学生的思考潜能.

这一部分的内容是微积分课程中必不可少的,学生必需力求熟练地掌握它. 可能有一部分学生对一元微积分的了解只需到此为止.

微积分是近代数学的第一个伟大创造,同时也是近代科学精神诞生的一个重要标志. 微积分的学习如果仅限于第一部分是不够的,因为它本身存在的一些矛盾有待于提升到理性层次来加以探讨. 本书的第二篇主要讨论"极限理论"和"一致收敛性",包括了广义积分、级数、幂级数和 Fourier 级数等内容. 按传统的看法,这部分内容应该属于"高等微积分"或"数学分析"这类课程. 50 年代以来,我国高校的数学教师往往对 "高等数学" 课程中这部分内容的选取和安排引起不少争论. 其实,逻辑推演方法对于近代科学的重要性是大家熟

知的,而且它是我国传统文化较为薄弱的一环.在初步具有上述用数学处理简单连续模式能力的基础上,从理性的角度来提出问题和处理问题(在这里就是审视一下微积分的逻辑基础),这应该是大学数学教学的一项基本任务.当然,鉴于一般中学生在这方面的基础比较薄弱,我们力图写得浅近一些,而且教师还可以在此基础上适当删减,但不能忽视对学生理性思维的训练.

这本教材曾在清华大学三个系试用.所需学时在 70 左右,另外还需适当安排一些习题课.

改革教学内容和课程体系是新世纪高等教育改革的重要内容.教育部从 1995 年起进行立项研究,本书是清华大学萧树铁教授领导的课题项目的一项成果.萧树铁先生审阅了本书全稿,许多同志为本书提供了宝贵的建议,高等教育出版社的胡乃辉同志做了认真细致的编辑工作,编者在此一并表示衷心的感谢.

这本教材还没有经过较为广泛的试用,缺点和毛病还不少,期待同行和读者们不吝多提宝贵意见.

编者

一九九九年九月

# 目　录

## 第一篇　直观基础上的微积分

# 第二篇 理性微积分

# 第一篇　直观基础上的微积分

## 引言——微积分的主要内容和思想方法

微积分是现代数学的第一个伟大成就，不仅对于数学本身的发展具有十分巨大的影响，而且作为强有力的工具，在几乎所有的科学（自然科学、社会科学和人文科学）领域里得到了广泛的应用.

微积分诞生于17世纪下半叶，但其思想的萌芽可追溯到2500多年前的古希腊人，我国古代也有一些精妙的思想和做法. 在对由直线围成的图形面积计算的同时，人们一直试图计算由曲线围成的图形的面积，计算圆的周长、圆的面积的计算等这样一些著名问题一直吸引着许许多多的智者. 在两千多年不屈不挠的努力过程中，人们对许多具体问题建立了一些富有创见的解法. 经过反复认识和不断积累，人类对运动、变化、弯曲、连续等客观世界模式终于有了比较清晰的认识. 随着生产的发展和科学的进步，到17世纪时，求运动物体的速度和位移、求曲线的切线和曲线的长度、求由曲线所围的平面图形的面积和由曲面所围的空间立体的体积、求物体之间的引力等问题成为当时迫切需要解决的一些主要科学问题. 伟大的物理学家 Newton（牛顿，1642—1727）和哲学家 Leibniz（莱布尼茨，1646—1716）由于本身科学工作的需要（例如 Newton 计算瞬时速度和万有引力，Leibniz 计算曲线的切线等），在前人思想方法和计算方法的基础上，分别独立地建立了用于解决广泛一类问题的普遍方法和计算法则 —— 微积分，极大地影响了数学以及整个科学的发展. 微积分的建立是人类头脑最伟大的创造之一.

现今，微积分已成为现代科学技术必备的一块“敲门砖”，是大学数学基础教育最基本的组成部分之一. 从培养人的角度看，微积分的学习，不应该仅仅局限于学会一些计算方法，其间的思想方法将更有益于我们去认识客观世界. 一部微积分发展史，是人类一步一步顽强地认识客观事物的历史，是人类理性思维的结晶.

微分学和积分学是微积分的两个主要组成部分. 顾名思义，“微” 就是细小，“积” 就是累加. 前者是“局部” 意义下的，而后者是“整体” 性质的问题. 下面，我们举一个具体例子来说明微分和积分研究的主要问题和使用的基本方法.

**例** 图 1 是某城市的一天从早晨 7 时到下午 7 时的气温变化曲线，时间单位为小时，其中 $t = 0$ 表示早晨 7 时，温度单位是摄氏度(℃). 从这条曲线可以看到，从早晨 7 时起温度逐渐上升，到下午 2 时($t = 7$) 左右达到最高温度，然后开始逐渐下降.

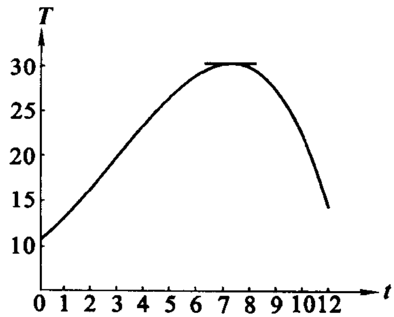


图 1

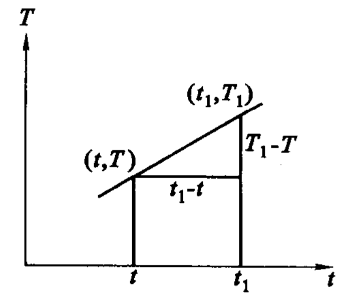


图 2

我们还希望由它得到更多的信息，例如：

(1) 任意时刻 $t$ 时温度关于时间的变化率. 这是客观存在的，例如，我们知道，中午时分太阳直射地面，此时气温上升最快. 问，此时的温度变化率是多少?

(2) 这 12 个小时的平均气温是多少?

这两个问题很实际，但回答并非易事，困难在于气温曲线是一条连续变化的曲线.

**1. 问题(1) 的解答 —— 微分学的主要内容**

如果温度是直线上升(或下降) 的，则问题(1) 很容易回答. 设时刻 $t$ 的温度是 $T$，时刻 $t_1 \neq t$ 的温度是 $T_1$，那么从时刻 $t$ 到时刻 $t_1$ 的(平均) 温度变化率是

$$\frac{T_1 - T}{t_1 - t}$$

它是这条直线的斜率，见图 2.

但图 1 中的情形不同. 一方面，温度变化是一条曲线，显然不能用上式来计算温度的变化率；另一方面，温度的变化率又明显与时刻 $t$ 有关. 那么，如何处理这一问题呢? 一个比较自然的想法是“以直代曲”.

例如考虑 $t = 5$(即中午 12 时) 时的温度变化率. 设想曲线在点$(5,25.3)$附近的部分是一条直线或者说用直线段去近似这段曲线弧，用这条直线的斜率作为在 $t = 5$ 时的温度变化率. 当然这只是一个近似值，但直观上可以想象

到，随着曲线弧段取得越来越短，近似程度将越来越好，见图 3. 可是“直”和“曲”是一对矛盾，只要曲线弧长不是零，直线永远不能代替曲线. 那么，究竟能不能得到准确值呢?这就是微分学的重要内容. 温度在某个时刻的变化率，应该只与该时刻附近的温度有关，这是一个局部性质的问题，大家可以体会到“微分”即“细细地分”的涵义.

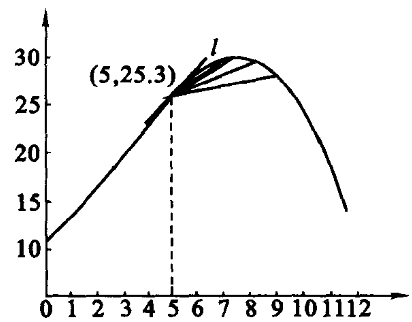


图 3

问题的提法是：在点(5,25.3) 处寻找一条直线 $l$，它与曲线有相当好的“接触”，它的斜率正好等于在 $t=5$ 时的温度变化率. 实际上，直线 $l$ 就是曲线在点(5,25.3) 处的切线.

一般说来，给定函数 $y=f(x)$，它的图形是平面上的一条曲线. 微分学发展的第一步就是给出平面曲线的切线的精确的数学定义. 函数在某点的变化率或者曲线在某点处的切线的斜率称为函数的**导数**，计算导数的过程称为**求导**. 微分学的主要内容就是给出一系列规则去计算函数的导数(以及相应的**微分**)，并利用导数来研究函数.

对于例 1 中的气温曲线，大家知道，正午时分太阳光直射地面，此时温度上升最快，即温度变化率最大；另外，在图 1 中还可以看到，在气温最高处，即在 $t\approx 7$(下午 2 时左右) 时温度的变化率为零(此时曲线的切线是水平的). 这些事实都将在微分学中得到定量的解释.

### 2. 问题(2) 的解答 —— 积分学的主要内容

考虑问题(2)，即求这 12 个小时的平均温度. 中学数学告诉我们，如果给定一组数：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，则这 $n$ 个数的(算术) 平均值是

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_3}{n}$$

这种计算方法显然不适用于解决问题(2). 我们再一次应用“以直代曲”的思想，不过这一次不是在一个点附近，而是整体地用一组直线段来代替这条曲

线. 首先考虑一种简单情形：假设气温是一小时变化一次，即譬如用早晨 7 时 ($t=0$) 的温度(设为 $T_0$) 代替 7 ~ 8 时($0 \leqslant t < 1$) 的温度，用 8 时($t=1$) 的温度(设为 $T_1$) 代替早晨 8 ~ 9 时($1 \leqslant t < 2$) 的温度，等等，见图 4. 数学上称这类函数为**阶梯函数**. 则容易算得：这 12 个小时内的平均温度为

$$\overline{T} = \frac{1}{12}(T_0 + T_1 + \cdots + T_{11})$$

从图 5 可以看到，它恰好等于图中 12 个小矩形面积的和除以 12. 图 5 中阴影部分的面积称为图 4 中阶梯函数曲线下的面积.

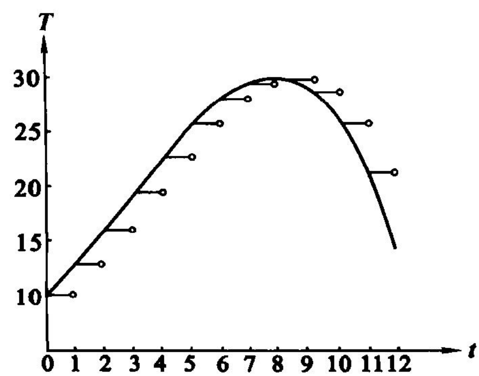


图 4

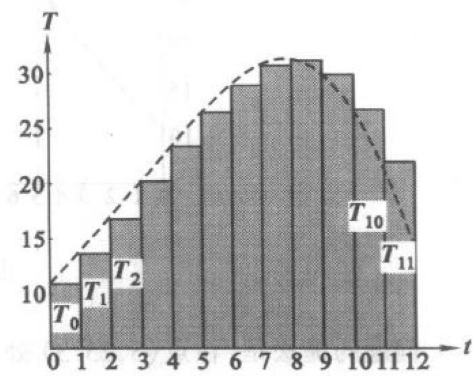


图 5

如果将时间区间分得更细一些，例如，用早晨 7 时的温度 $T_0$ 代替早晨 7 ~ 7.5($0 \leqslant t < 0.5$) 时的温度，用早晨 7.5 时(即 $t = 0.5$) 的温度 $T_{0.5}$ 代替 7.5 ~ 8 时的温度，…，用下午 6.5 时(即 $t = 11.5$) 的温度 $T_{11.5}$ 代替下午 6.5 ~ 7 时的温度. 则可以算得：这 12 个小时内的平均温度

$$\overline{T} = \frac{T_0 + T_{0.5} + T_1 + T_{1.5} + \cdots + T_{11} + T_{11.5}}{24}$$

$$= \frac{1}{12}(T_0 \times 0.5 + T_{0.5} \times 0.5 + \cdots + T_{11} \times 0.5 + T_{11.5} \times 0.5)$$

它等于图 6 中 24 个小矩形的面积即新的阶梯函数曲线下的面积除以 12.

当然还可以把时间段再分小. 如此不断地分下去，这些小矩形的面积和将越来越“趋近于”温度曲线下的面积 $A$. 由此我们可以猜测：问题(2) 的答案即这 12 个小时内的平均温度是温度曲线下的面积 $A$ 除以时间长度 12，即等于 $A/12$，见图 7.

一般说来，设 $y = f(x)$($f(x) \geqslant 0$)在$[a, b]$上定义，则函数曲线下的面积，即由曲线 $y = f(x)$，$x$ 轴与直线 $x = a$，$x = b$ 所围图形的面积称为函数 $y = f(x)$ 在区间$[a, b]$上的定积分. 定积分和以后要讲到的不定积分统称为

**积分**. 计算积分并讨论积分的应用是积分学的主要内容.

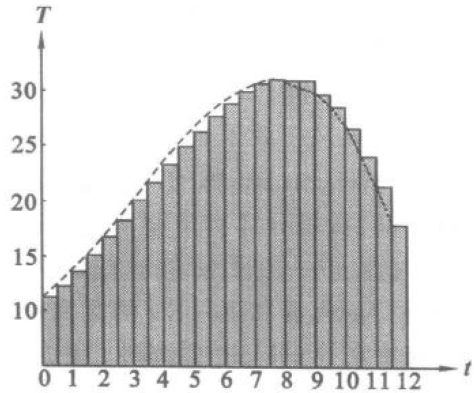


图 6

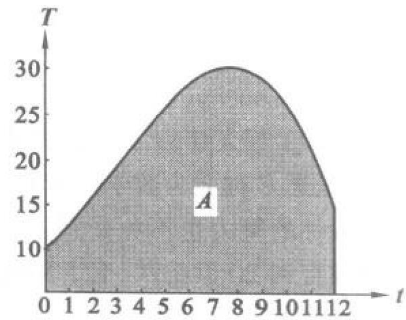


图 7

### 3. 微积分基本定理及微积分理论

上面的例子简单介绍了微积分讨论的主要问题及考虑问题的基本思想.

历史上,微分和积分的发展是平行的. 相比较而言,人类接触积分可能更早些. 在古希腊时代,Archimedes(阿基米德,公元前 287—212 年) 就已经知道如何去作例如抛物线、双曲线和某些特殊的螺线的切线并计算圆和抛物线弓形的面积. 他的方法称为"穷竭法". 我国古代祖冲之和刘徽等在这方面也有杰出的贡献. 从现在的观点看,他们实际上是在计算微分和积分. 随着生产力的发展及科学技术进步的需要,Archimedes 的思想在文艺复兴后的欧洲复活,到 17 世纪时,数学家们已能计算整幂函数($y = x, x^2, \cdots$) 和一些特殊函数的导数以及它们的曲线下的面积. 一个普遍的用于计算导数和积分的方法是 Newton 和 Leibniz 于 1670 年前后分别独立地建立起来的. 他们还发现,正如数的加和减、乘和除一样,对函数的求导和积分互为逆运算并给出了这一关系的精确的数学描述,称为**微积分基本定理**或 **Newton - Leibniz** 公式.

现实世界有很多函数之间具有这种关系. 例如,质点作直线运动时,如果位移和速度都是时间的函数,则位移关于时间的导数就是速度,反过来,速度关于时间积分得到位移. 此外如速度和加速度、人口总数和增长率、质量和密度、产品的总花费、总利润和边缘花费、边缘利润等也是如此,在以后的章节中我们将阐述和讨论这些应用.

前面的介绍只是粗略地涉及了"以直代曲"的思想. 应该指出,这里有许多不清楚的地方. 例如几次用到"趋近于"这个词,这是一个牵涉到"无限"或"无穷"的概念,它的精确定义究竟是什么? 又如我们用以说明问题的曲线是比较"光滑"的曲线,光滑和不光滑曲线的数学特征又是什么? 人类对有限、无

限以及它们相互之间的关系的探索由来已久. 在创立微积分的时候, Newton 和 Leibniz 沿袭了朴素的"原子论"的思想基础, 借助直观的"无穷小"来表述他们卓越的思想. 由于它比较直观, 因此很容易被理解和应用, 人们得到了许多重要的结果, 从而导致了微积分的迅猛发展, 但其逻辑上的脆弱也招致了暴风雨般的批评和攻击. 关于"无穷小"的争论和探索又持续了近 200 年之久. 19 世纪中叶, Cauchy(柯西, 1787—1857) 和 Weierstrass(魏尔斯特拉斯, 1815—1897) 等人建立了极限理论和实数理论, 微积分才有了坚实的理论基础, 这就是通常称之为数学分析课程的基本内容. 但一般说来, 在这门课中, 微积分直观性的魅力也不免受到了一定的影响. Newton 和 Leibniz 的无穷小的理论基础直到 20 世纪六、七十年代才由逻辑学家 Robinson(鲁滨逊) 完成, 他的工作称为非标准分析.

直观是一种非理性因素, 它是人类创造的最原始的动力之一. 本篇在直观的基础上讲述微积分的基本内容和方法, 旨在使读者对微积分有一个基本的了解并能在实际中应用. 但由于时代的进步以及微积分的理论本身已经水落石出了, 因此它也不可能是 Newton 和 Leibniz 时代的样式, 我们将在有关的地方指出问题所在, 留待第二篇《理性微积分》中探讨. 本篇中引用的大量涉及许多学科的实际例子希望能给读者对于微积分应用的广泛性留下深刻的印象. 同时必须指出, 计算机科学的发展使我们可以适当淡化某些数值计算, 本篇中的许多计算和绘图都是由计算机(器) 来完成的.

## 思考题

**1.** 已知作匀加速运动的物体在时刻 $t$ 的速度是 $v(t) = v_0 + at$, 其中 $v_0$ 是初速度, $a > 0$ 是加速度. 在直角坐标系中作出速度函数的图象. 利用常识得到物体在时间段 $[t_1, t_2]$ $(0 \leqslant t_1 < t_2)$ 中的平均速度并证明: 它等于该段曲线下的面积除以区间长度.

**2.** 在引言中所举的例子实际上假定了时间和空间是无限可分的. 分析以下两个说法是否正确.

(1) 如果空间是无限可分的, 那么运动不存在. 因为假设你要从 $A$ 到 $B$, 则必须先到达它们的中点 $C$, 而要到达 $C$, 则又必须先到达 $A$ 和 $C$ 的中点 $D$, 由于空间无限可分, 所以要经过的中点有无限多个. 于是你永远到不了 $B$.

(2) 如果时间不是无限可分的, 那么"飞矢不动". 因为如果时间有最小的不可分单元 —— 瞬间, 那么飞行着的箭在任一瞬间必在某一个确定的位置上因而是静止的.

(这是古希腊著名的 Zeno(芝诺) 悖论中的两个, 一共有四个.)

# 第 1 章　函数、函数极限及连续函数

微积分中讨论的函数，其定义域和值域都是实数，记 $\mathbf{R}$ 为全体实数的集合.

## 1.1　函数

### 1.1.1　函数和反函数

**定义 1.1**　给定集合 $X\subseteq\mathbf{R}$. 若存在一个对应规则 $f$，对于每一个元素 $x\in X$，都有唯一的元素 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 $f$ 是从 $X$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个**函数**（或**映射**），记为

$$f:X\to\mathbf{R}$$

$X$ 称为函数 $f$ 的**定义域**，$x$ 称为**自变量**，$y$ 称为**因变量**，集合

$$Y=f(X)=\{y:y=f(x),x\in X\}$$

称为函数 $f$ 的**值域**. 平面点集

$$(X,Y)=\{(x,y):y=f(x),x\in X\}$$

称为函数 $f$ 的**图象**（或**图形**）

为叙述简便，习惯上常用一些符号表示常用名词. 本书中用

符号"$\forall$"表示"任意"或者"给定"

符号"$\exists$"表示"存在"或者"找到"

因此函数的定义可简述为：

$$\forall x\in X,\exists\ \text{唯一的}\ y\in\mathbf{R}\ \text{使得}\ y=f(x)$$

函数 $f$ 的**反函数** $f^{-1}$ 的定义可叙述为（习惯上将 $x$ 作为自变量，将 $y$ 作为因变量）：

$$\forall x\in f(X),\exists\ \text{唯一的}\ y\in X\ \text{使得}\ y=f^{-1}(x)(\text{即}\ x=f(y))$$

在函数定义中，以下两点特别要强调一下：

(1) 严格说来，$f$ 是函数. 例如在 $y=\sin x$ 中，sin 是函数，但我们习惯称函数 $y=\sin x$，即把函数（一种对应关系）和函数值不加区分地使用，其实严格说来二者是有区别的.

(2) 函数的一个最重要的特征是：单值性. 从几何上看，任意一条垂直于 $x$ 轴的直线与函数的图形最多交一个点，见图 1－1. 在微积分中尽量避免"多值函数"的提法，其理由也不难理解，因为总可以将它分解成若干个单值函数分

别处理.

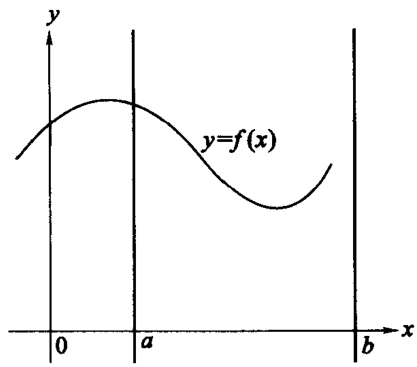


图 1－1

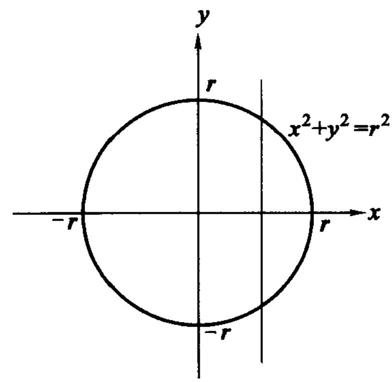


图 1－2

**例1** 圆的方程 $x^2+y^2=r^2$ 在区间 $(-r,r)$ 上不能确定 $y$ 是 $x$ 的函数，因为从图 1－2 可以看到，任意一条在区间 $(-r,r)$ 内的垂直于 $x$ 轴的直线与圆交两个点，即

$$y=\sqrt{r^2-x^2} \text{ 和 } y=-\sqrt{r^2-x^2},\ x\in(-r,r)$$

但上半圆的方程 $x^2+y^2=r^2(y>0)$ 则在区间 $[-r,r]$ 上确定了 $y$ 是 $x$ 的函数.

(问题:能确定多少个函数使之满足圆的方程?)

**例 2** 中学数学里熟知的六类函数,即:

(1) 常数函数 $y=C$,

(2) 幂函数 $y=x^\alpha(x>0,\alpha$ 是实数),

(3) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$,

(4) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 以及 $y=\ln x$,后者称为自然对数,

(5) 三角函数 $y=\sin x,y=\cos x$,

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x$,

称为**基本初等函数**.

为使读者对函数的概念有进一步的理解,我们再看几个例子.

**例 3** 表达式 $y=f(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant1\\ x^2, & -1\leqslant x<1\\ 1, & x<-1\end{cases}$

定义了 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个函数,图象见图 1－3.因为它在各个区间上的表达式不相同,所以称为**分段函数**.要注意,它是一个函数而不是三个函数.引言