G F G Y G B S

经济数学基础

JINGJI SHUXUE JICHU

王嘉武 编

经济数学基础

王嘉武　编

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/王嘉武编．—北京:国防工业出版社，1997．1

ISBN 7-118-01669-1

Ⅰ．经… Ⅱ．王… Ⅲ．经济数学-基础理论 Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 19134 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京怀柔新华印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 11⅝ 304 千字

1997 年 1 月第 1 版 1997 年 1 月北京第 1 次印刷

印数:1—8000 册 定价:14.40 元

前　言

在社会主义市场经济条件下，研究和应用市场经济理论，研究和掌握现代化管理方法，是我们经济工作中的一项重要任务。因此，经济数学方法的学习、研究和应用，日益受到广大读者的重视。特别是广大党政干部，迫切需要一本能够针对他们特点，适应他们需要的有关经济数学基础知识方面的书籍。本书正是为适应这一需要编写的，希望能够成为党政干部学习和掌握经济数量分析方法的一本重要参考书。

本书介绍了经济数学所需要的基础知识，包括微积分、线性代数（含投入产出方法和线性规划）、概率论与数理统计等，全书共18章。本书内容力图简明、扼要，注重数学思想的阐述和数学与经济之间的联系，对一些基本概念、定理及应用作了较为全面和严格的叙述。为了避免过多的数学推导，对一些定理和命题，只给出条件和结论，不予证明。尽管如此，本书在理论上仍然保持了一定的完整性和严谨性。为了便于学习，本书配备了一定量的例题和习题。一类例题和习题是比较简单且易于理解的，它主要用来解释概念、定义和定理；还有一些例题和习题是帮助读者加深对概念的理解，提高应用定理、运算法则的能力。本书备有习题答案，供读者参考。为便于学习，书末还附有泊松概率分布、标准正态分布、t 分布和 F 分布等函数表格。

本书在编写过程中，得到众多同行朋友的指教。这里特别要感谢王续得、邵力员、徐夙琨、李麟仁等几位老师，他们对书的结构和具体内容提出了许多重要意见，予以了极大的和热忱的帮助。

由于编者的学识和水平所限，书中难免存在不妥之处，欢迎读者批评指正。

编者

1996年8月

内容简介

本书共分18章，主要由微积分、线性代数、概率论与数理统计三部分内容构成。

前7章是微积分的基本知识，内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、微分方程。第8章至第12章是线性代数部分，其内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、投入产出方法、线性规划；第13章至第18章介绍了概率论与数理统计的知识，其内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、数学期望与方差、参数估计、假设检验、回归分析。每章末附有习题，书末附有习题答案。为了方便读者，书末还附有泊松概率分布、标准正态分布等函数表。

本书力求简明、扼要，注重应用性，避免过多的推导过程。

本书宜作各类领导干部管理学校(院)及各级党校教材，也可供各级党政干部自学之用。

目　　录

第一章 函 数

函数是数学的最重要的基本概念之一。在初等数学中，已经介绍了函数的基本概念。作为预备性知识，本章介绍反函数、复合函数、分段函数、初等函数和二元函数的一些内容。

§1.1 函数的概念与性质

为了方便读者阅读本书，本节将函数的基础知识简要归纳为以下内容。

一、函数的概念

1．常量与变量

在某个变化过程中，数值保持不变的量称为常量，可以取不同值的量称作变量。习惯上常以字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常数，以 $x,y,z,$ $\cdots$ 表示变量。

2．函数的定义和定义域

对于两个变量 x 和 y，x 的取值范围为 D，若存在一个对应规则 f，使得每一个 $x\in D$ 都有一个确定的实数 y 与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x),x\in D$。

x 称为自变量，y 称为因变量（或简称变量），集合 D 称为函数的定义域。

在一元函数中，区间是表示定义域的一种具体形式。有的时候，仅需研究函数在某个点 x_0 附近的一个很小的区间上的变化情况，这个小区间又被称作邻域。邻域一般表示为 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，其中 δ 是一个小的正数。

构成函数的两个基本要素是函数的对应规则和定义域。例如：

函数 $y=\ln x^2$，D:$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$与函数 $y=2\ln x$，D:$(0,+\infty)$，由于定义域不同而是两个不同的函数。

确定函数的定义域，就是确定自变量的取值范围。对于用解析式表示的函数，就是确定使其解析式得以运算（或者说使运算有意义）的自变量的值。我们需要注意下面四种基本情况：

(1)分式函数$\dfrac{1}{g(x)}$的定义域是使分母 $g(x)\neq 0$ 的全体实数。

例如：$y=\dfrac{4x}{x^2-3x+2}$的定义域是使 $x^2-3x+2\neq 0$，即 $x\neq 1$，且$x\neq 2$的全体实数，或

$$D:(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$$

(2) 偶次根式函数 $\sqrt[2n]{g(x)}\,(n\in N)$ 的定义域是使被开方式 $g(x)\geqslant 0$ 的全体实数。

例如：$y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是使 $1-x^2\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 的全体实数，或

$$D:[-1,1]$$

(3) 对数函数 $\log_a g(x)\,(a>0,a\neq 1)$ 的定义域是使真数 $g(x)>0$ 的全体实数。

例如：$y=\log_3(2+x-x^2)$ 的定义域是使 $2+x-x^2>0$，即 $-1<x<2$ 的全体实数，或

$$D:(-1,2)$$

(4) 反正弦函数 $\arcsin g(x)$ 和反余弦函数 $\arccos g(x)$（见§1.2）的定义域是使 $|g(x)|\leqslant 1$ 的全体实数。

例如：$y=\arcsin(3x-1)$ 的定义域是使 $-1\leqslant 3x-1\leqslant 1$，即 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}$ 的全体实数，或

$$D:[0,\frac{2}{3}]$$

如果函数解析式中含有以上几种情况，那么函数的定义域则

为每种情况所确定的集合的交集。

例1 确定函数 $y=\dfrac{\lg(2-x)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域。

解 对函数关系一般从外向里看。具体到本函数，首先把它看成分式函数，因而要求 $\sqrt{x-1}\neq 0$；然后，再看分母应为根式函数，故有 $x-1\geqslant 0$；分子应为对数函数，故有 $2-x>0$。综合起来，有下面不等式组：

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}\neq 0\\ x-1\geqslant 0\\ 2-x>0\end{cases}$$

这是一般分析方法，当然还有更简便的方法：从分子来看，应有 $2-x>0$；从分母来看，有 $x-1>0$，综合起来，有

$$\begin{cases}2-x>0\\ x-1>0\end{cases}$$

也就是 $$1<x<2$$

或 $$D:(1,2)$$

3. 函数值

对于给定的函数 $y=f(x)$，与 x 对应的 y 值称为函数值。对应于 x_0 的函数值是 $f(x_0)$，可记作 y_0 或 $y|_{x=x_0}$。函数值的集合称为值域，用 Z 表示。

二、函数的几种简单性质

1. 函数的奇偶性

设给定函数 $y=f(x)$。若对所有的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对所有的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称。

例如：$y=x^4+x^2+1$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=x\sin x$，$y=x^2\cos x$ 等，都是偶函数。而 $y=x^3+x$，$y=\sqrt[3]{x}$，$y=x^2\sin x$ 等，都是奇函数。但 $y=x^3+x+1$，$y=x^2+x$ 等既不是奇函数，也不是偶函

数。

2. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称此函数为周期函数。满足这个等式的最小正数 T，称为函数的周期。

三角函数都是周期函数。正弦和余弦函数的周期是 2π，正切和余切函数的周期是 π。

3. 函数的单调增减性

若函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在区间 (a,b) 内是单调递增的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在区间 (a,b) 内是单调递减的。

例如：函数 $y=x^3$，对任意的 x_1,x_2，如果 $x_1<x_2$ 总有 $x_1^3<x_2^3$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增。

又如：函数 $y=x^2$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的，在 $(-\infty,0]$ 内是单调递减的，而在 $[0,+\infty)$ 内是单调递增的。

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的。若不存在这样的正数，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的。

例如：$y=\sin x$，由于对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以它在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。函数 $y=\dfrac{1}{x}$，在 $x=0$ 点处无界，在 $[\delta,+\infty)$ 上是有界的，δ 为任意小的正数。

§1.2 反函数、复合函数、分段函数

一、反函数

函数 $y=f(x)$ 表示变量 y 是随着 x 的变化而变化。但是在某

些情况下，需要研究 x 是怎样随着 y 的变化而变化的。

设某种商品的价格为 p，则销售收入 y 取决于销售量 x。它们之间的关系可表示为 $y=px$，销售收入 y 是销售量的函数。反过来，对任意一个销售收入 y，都可以由 $x=\frac{y}{p}$ 来确定销售量 x，销售量 x 是销售收入 y 的函数。我们称后一函数是前一函数的反函数，或者说它们互为反函数。

定义 1.1 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的一个函数，值域为 Z。若对每一个 $y\in Z$ 有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应，其对应规则记为 f^{-1}，这个定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数。

反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域，分别是函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域。只有在函数的对应关系为一一对应关系时，函数才有反函数。

在求反函数时，把函数值 y 当作已知量，由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$ 来。由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此需将 $x=f^{-1}(y)$ 中 x 与 y 互换，改写成以 x 为自变量，y 为因变量的函数 $y=f^{-1}(x)$，$y=f(x)$ 的图形与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

例 1 求函数 $y=\frac{3x-2}{x-1}$ 的反函数。

解 第一步，用 y 来表示 x，即“解出”x 来。

$$y=\frac{3x-2}{x-1}$$

得出

$$x=\frac{y-2}{y-3}$$

第二步，将 x,y 互换，得原函数的反函数

$$y=\frac{x-2}{x-3}$$

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 的反函数分别记作 y

$=\mathrm{Arcsin}\ x, y=\mathrm{Arccos}\ x, y=\mathrm{Arctan}\ x$。它们的图形分别与其相应的三角函数的图形对称于直线 $y=x$,如图 1-1 所示。它们都是多值的。通常所说的反三角函数是按下列区间取其称为主值分支的一段,如图 1-1 中实线所示,分别记 作

$$y=\arcsin x \qquad y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$y=\arccos x \qquad y\in[0,\pi]$$

$$y=\arctan x \qquad y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

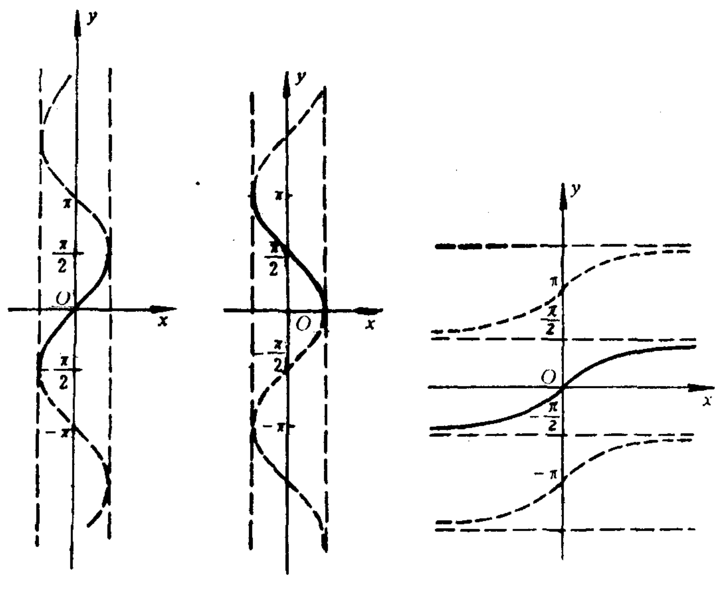

图 1-1

反正弦三角函数 $y=\arcsin x$ 和反余弦三角函数 $y=\arccos x$ 的定义域同为$[-1,1]$,反正切三角函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

二、复合函数

在许多实际问题中,虽然两个变量存在着确定的相依关系,但

是这两个变量可能不是直接联系的，而是通过一个中间变量联系的。这样的两个变量所构成的函数就是复合函数。

例如：企业的总收入 R 是产量 Q 的函数 $R=R(Q)$，产量又是投入（资金、劳力）x 的函数 $Q=Q(x)$。那么，总收入 R 通过中间变量 Q 与投入 x 之间的函数关系就是复合函数关系：$R=R[Q(x)]$。

定义 1.2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=g(x)$。若对于 x 的每一个 u 值，函数 $y=f(u)$ 都有定义，则称 y 是 x 的复合函数，记作 $y=f[g(x)]$。

掌握函数的复合过程，将复合函数分解成简单函数系列，对于求复合函数的定义域及作其他运算都是必要的。这个分解过程，往往是由外向里进行的。

例 2 求函数 $y=\arcsin\frac{2x-1}{3}$的定义域。

解 函数 $y=\arcsin\frac{2x-1}{3}$可以看成是由

$$y=\arcsin u \quad 及 \quad u=\frac{2x-1}{3}$$

两个简单函数复合而成。最外层函数关系是反正弦函数。由 $y=\arcsin u$ 可知，其定义域为 $|u|\leqslant 1$。反正弦函数的变量部分是整式函数$\frac{2x-1}{3}$，综合起来，也就是$\left|\frac{2x-1}{3}\right|\leqslant 1$，解之得 $-1\leqslant x\leqslant 2$。由此得出函数 $y=\arcsin\frac{2x-1}{3}$的定义域 D：$[-1,2]$。

例 3 求函数 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$的定义域。

解 函数可以看成是由

$$y=e^u \qquad u=\sqrt{g} \qquad g=x^2+1$$

三个函数复合而成。

显然，复合函数的定义域 D：$(-\infty,+\infty)$。