# 工科数学分析

（上册）

李大华 林 益 汤燕斌 主编


华中理工大学出版社
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

# 工科数学分析

（上　　册）

李大华　林　益　汤燕斌
万建平　王德荣

华中理工大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

工科数学分析(上册)/李大华等
武汉:华中理工大学出版社,1999年9月
ISBN 7-5609-2027-6

Ⅰ.工…
Ⅱ.①李… ②林… ③汤… ④万… ⑤王…
Ⅲ.数学分析-高等学校-教材
Ⅳ.O174.1

**工科数学分析(上册)** 李大华等

责任编辑:周怀治 龙纯曼　　封面设计:刘 卉
责任校对:张 欣　　监 印:张正林

出版发行:华中理工大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

经销:新华书店湖北发行所

录排:华中理工大学出版社照排室
印刷:第二炮兵指挥学院印刷厂

开本:850×1168 1/32　印张:14.125　字数:336 000
版次:1999年9月第1版　印次:1999年9月第1次印刷　印数:1—2 000
ISBN 7-5609-2027-6/O·196　定价:16.80元

## 内容提要

本书适合于理工科(非数学)专业中对数学要求较高的专业作教材使用;若略去部分内容及小字部分,一般工科专业也可使用.

本书较一般工科"高等数学"教材,加强了微积分的理论基础,注重无穷小分析思想的应用,在数学逻辑性、严谨性及抽象性方面也有相应要求和训练.同时注意学生工程意识的培养,培养学生应用数学解决实际问题的能力.

本书设置了数学实验内容.

# 前　言

随着科学技术的飞速发展,数学的科学地位发生了巨大的变化。高技术本质上是数学技术的观念已日益为人们所共识。计算机和信息技术的迅速发展正在改变着人们对数学知识的需求,冲击着传统的观念和方法。面临着培养21世纪人才的挑战性任务,许多高等院校理工科(非数学)专业对数学基础课程提出了新的更高的要求。数学基础课程不再仅仅是学到某些知识,为专业课程提供数学工具,更重要的是提高学生的数学素质。

本书正是在这种形势下,根据高等学校工科数学课程教学指导委员会《关于工科数学系列课程教学改革的建议》的指导思想编写而成的。本书的宗旨是在传授知识的同时,加强和拓宽基础,加强应用;注意传授数学思想,培养学生的创造性思维;着重提高学生的数学素养和能力。本书与传统的高等数学教材的主要区别是:本书加强了微积分的理论基础,注重无穷小分析思想的运用。在数学的逻辑性、严谨性及抽象性方面也有相应的要求和训练。但本书又与数学专业用的数学分析教材不同,我们注意了学生的工程意识的培养,即通过典型例题的介绍及相应习题的训练,培养学生运用数学知识解决实际问题的能力。基于上述理由,我们将本书定名为《工科数学分析》。

具体地说,本书有以下特点:

1. 引进一些近代数学的术语、符号和概念,如集合、映射、度量性等,这将有助于学生进一步阅读使用数学工具较多的现代科技文献。

2. 拓宽和加强数学基础。本书加强了极限理论,从确界定理出发,介绍并证明了实数理论的几个基本定理;证明了有界闭区间

上连续函数的基本性质；简要介绍了 $R^n$ 空间中点集拓扑的基本概念，并在此基础上引进多元函数的极限与连续性概念；增加了理科数学分析中的一些重要内容，如一致连续，一致收敛，含参变量积分，向量值函数的导数等。这些知识不仅有实用价值，而且对学生的逻辑思维训练是十分有益的。

3. 突出数学建模，培养学生把实际问题转化为数学问题并加以解决的能力。本书除介绍微积分应用的经典例子(如物理、力学、几何等方面的)外，还介绍了若干工程、经济、人口、生态等领域中的例子，在习题中设置了许多实际应用的问题，这些问题在提高学生对数学应用的兴趣及能力方面有较大的作用。

4. 重视数学思想方法的训练。本书注意突出无穷小分析的思想，将逼近的思想贯穿始终。尽可能将演绎与归纳的方法有机地结合起来，通过"问题(包括背景)——观察与思考——归纳总结——给出解答"这种模式来组织若干教学内容(如最优化问题——极值与条件极值等)，以利于培养学生的创造能力。

5. 设置了数学试验，提供方程求根、定积分数值计算、多元函数作图、级数近似计算等典型问题的 MATHEMATICA 程序，供学生上机实习，以培养学生使用计算机解决实际问题的兴趣和能力。

6. 在习题的配置上，我们把习题分成(A)、(B)两类。(A)类为基本要求题，用于巩固基础知识和基本技能；(B)类为提高题，用于扩大视野和熟练技巧，提高学生的综合能力。另外，每章还配有总习题，供读者作综合练习或复习使用。

本书适用于理工科(非数学)专业中对数学要求较高的专业。但如果略去书中理论性较强的部分及小字部分，一般工科专业也可使用本书。

本书由李大华、林益、汤燕斌任主编，参加编写的有万建平、王德荣。在本书的编写过程中，得到了华中理工大学教务处的大力支持。李楚霖教授对教材中涉及经济学应用的内容进行了仔细、认真

的审阅，并提出了许多宝贵的修改意见。李静瑶、何瑞、杨林锡和乔维佳等四位副教授对书稿作过非常仔细、认真的审阅，并提出了很多中肯的、宝贵的意见。在此我们一并表示衷心的感谢。

对于书中的不足与错误，恳请同行、专家和热心的读者批评指正。

编　者

1999 年 5 月于华中理工大学

# 目　录


第一章　集合与函数 …… (1)

第一节　集合与实数集 …… (1)

1.1　集合及其运算 …… (1)

1.2　实数的性质 …… (4)

1.3　区间与邻域 …… (7)

1.4　确界与确界原理 …… (7)

习题 1.1 …… (9)

第二节　映射与函数 …… (12)

2.1　映射 …… (12)

2.2　一元函数概念 …… (13)

2.3　复合函数 …… (15)

2.4　反函数 …… (18)

2.5　多元函数概念 …… (19)

习题 1.2 …… (20)

第三节　函数的几种特性与初等函数 …… (22)

3.1　函数的几种特性 …… (22)

3.2　初等函数 …… (23)

3.3　初等函数数学模型 …… (27)

习题 1.3 …… (31)

总习题(一) …… (34)

第二章　极限与连续 …… (37)

第一节　函数极限的概念 …… (37)

1.1　自变量趋于有限值时函数的极限 …… (37)

1.2　单侧极限 …… (42)

1.3　自变量无限增大时函数的极限 …… (43)

1.4　数列极限 …… (45)

1.5 函数值趋于无穷的情形 …… (47)
习题 2.1 …… (49)
第二节 函数极限的性质 …… (51)
2.1 极限运算法则 …… (51)
2.2 渐近线 …… (56)
2.3 极限的基本性质 …… (59)
2.4 两个重要极限 …… (60)
2.5 关于极限的定理的严格证明 …… (64)
习题 2.2 …… (70)
第三节 无穷小与无穷大 …… (72)
3.1 无穷小 …… (73)
3.2 无穷小的比较 …… (73)
3.3 无穷大 …… (77)
习题 2.3 …… (79)
第四节 连续与间断 …… (80)
4.1 函数的连续性 …… (80)
4.2 函数的间断点 …… (84)
习题 2.4 …… (87)
第五节 连续函数的性质 …… (88)
5.1 连续函数的运算 …… (88)
5.2 初等函数的连续性 …… (90)
5.3 有界闭区间上连续函数的性质 …… (92)
5.4 函数的一致连续性 …… (95)
习题 2.5 …… (97)
总习题(二) …… (99)
第三章 导数与微分 …… (103)
第一节 导数概念 …… (103)
1.1 导数的定义 …… (103)
1.2 导数的几何意义 …… (109)
习题 3.1 …… (113)
第二节 求导法则 …… (115)

2.1　函数和、差、积、商的导数 …………………………………… (116)
2.2　复合函数的导数 …………………………………………… (118)
2.3　反函数的导数 ……………………………………………… (121)
2.4　高阶导数 …………………………………………………… (123)
习题 3.2 …………………………………………………………… (129)
第三节　隐函数的导数和参数式求导……………………… (131)
3.1　隐函数的导数 ……………………………………………… (131)
3.2　参数式求导 ………………………………………………… (134)
3.3　极坐标式求导 ……………………………………………… (137)
3.4　相关变化率 ………………………………………………… (139)
习题 3.3 …………………………………………………………… (141)
第四节　微分………………………………………………… (143)
4.1　局部线性化与微分 ………………………………………… (143)
4.2　微分的运算法则 …………………………………………… (146)
4.3　高阶微分 …………………………………………………… (148)
4.4　误差估计 …………………………………………………… (149)
习题 3.4 …………………………………………………………… (151)
总习题(三) ……………………………………………………… (152)
第四章　微分中值定理与导数的应用……………………… (155)
第一节　微分中值定理……………………………………… (155)
1.1　极值概念与费马定理 ……………………………………… (155)
1.2　微分中值定理 ……………………………………………… (158)
1.3　洛必达法则 ………………………………………………… (164)
习题 4.1 …………………………………………………………… (167)
第二节　泰勒公式…………………………………………… (171)
2.1　泰勒公式 …………………………………………………… (172)
2.2　几个基本初等函数的麦克劳林公式 ……………………… (176)
习题 4.2 …………………………………………………………… (181)
第三节　函数性态的研究…………………………………… (182)
3.1　函数的单调性 ……………………………………………… (182)
3.2　函数极值的判定 …………………………………………… (185)

3.3 函数的凹凸性 …… (187)
习题 4.3 …… (193)
第四节 最优化问题数学模型 …… (196)
习题 4.4 …… (203)
总习题(四) …… (205)
第五章 定积分与积分法 …… (209)
第一节 定积分的概念与性质 …… (209)
1.1 定积分的定义 …… (209)
1.2 可积函数类 …… (215)
1.3 定积分的基本性质 …… (216)
习题 5.1 …… (221)
第二节 微积分基本定理 …… (223)
2.1 牛顿-莱布尼兹公式 …… (223)
2.2 变限的定积分与原函数的存在性 …… (225)
习题 5.2 …… (228)
第三节 不定积分 …… (229)
3.1 不定积分的概念和性质 …… (229)
3.2 基本积分表 …… (232)
习题 5.3 …… (234)
第四节 换元积分法 …… (236)
4.1 第一换元法 …… (236)
4.2 第二换元法 …… (240)
4.3 定积分的换元法 …… (243)
习题 5.4 …… (247)
第五节 分部积分法 …… (249)
5.1 不定积分的分部积分法 …… (249)
5.2 定积分的分部积分法 …… (252)
习题 5.5 …… (255)
第六节 广义积分 …… (257)
6.1 无穷区间上的广义积分 …… (258)
6.2 无界函数的广义积分 …… (260)

6.3 Γ-函数与B-函数 …… (263)
习题5.6 …… (265)
总习题(五) …… (266)
第六章 定积分的应用 …… (271)
第一节 定积分在几何上的应用 …… (271)
1.1 微元法 …… (271)
1.2 平面图形的面积 …… (272)
1.3 由已知平面截面面积求体积 …… (274)
1.4 旋转体的体积 …… (275)
1.5 光滑平面曲线的弧长与曲率 …… (277)
1.6 旋转体的侧面积 …… (281)
习题6.1 …… (283)
第二节 定积分在物理上的应用 …… (285)
2.1 变力作功 …… (285)
2.2 质心 …… (286)
2.3 引力 …… (289)
2.4 液体的静压力 …… (290)
习题6.2 …… (292)
第三节 定积分在经济学中的应用 …… (293)
习题6.3 …… (297)
总习题(六) …… (298)
第七章 微分方程 …… (301)
第一节 微分方程的基本概念 …… (301)
习题7.1 …… (305)
第二节 变量可分离方程及齐次方程 …… (306)
2.1 变量可分离方程 …… (307)
2.2 齐次方程 …… (309)
2.3 增长与衰减模型 …… (312)
习题7.2 …… (316)
第三节 一阶线性微分方程 …… (318)
3.1 线性齐次方程 …… (319)

3.2 线性非齐次方程 …………………………………………………… (319)
3.3 伯努利方程 …………………………………………………………… (322)
习题 7.3 ………………………………………………………………… (325)
第四节 可降阶的高阶方程……………………………………… (326)
习题 7.4 ………………………………………………………………… (333)
第五节 二阶微分方程……………………………………………… (334)
5.1 振动与二阶微分方程 ……………………………………………… (334)
5.2 合理猜测法 …………………………………………………………… (337)
5.3 二阶线性微分方程解的结构 …………………………………… (340)
5.4 常数变易法 …………………………………………………………… (346)
习题 7.5 ………………………………………………………………… (349)
第六节 二阶常系数线性微分方程……………………………… (351)
6.1 常系数线性齐次方程 ……………………………………………… (351)
6.2 常系数线性非齐次微分方程 …………………………………… (357)
6.3 欧拉方程 ……………………………………………………………… (363)
习题 7.6 ………………………………………………………………… (364)
第七节 微分方程组………………………………………………… (366)
7.1 微分方程组的基本概念 …………………………………………… (367)
7.2 常系数线性微分方程组解法举例 ……………………………… (369)
习题 7.7 ………………………………………………………………… (371)
总习题(七) …………………………………………………………… (372)
**数学实验**……………………………………………………………… (375)
实验一 方程近似解的求法……………………………………… (375)
实验二 定积分的近似计算……………………………………… (380)
**附录一 Mathematica 数学软件简介** …………………………… (386)
**附录二 积分表**………………………………………………………… (393)
**习题答案与提示**……………………………………………………… (405)

# 第一章　集合与函数

集合论的概念和方法是数学的一种语言，函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象．在高等数学中，我们主要研究事物的运动规律和现象的变化规律，因此，函数是高等数学中主要研究对象．本章在介绍集合与映射的基本概念后，着重讨论一元函数这个特殊的映射．

## 第一节　集合与实数集

### 1.1　集合及其运算

什么叫集合？所谓集合，就是指具有某种共同属性的事物的全体．而那些“事物”就称为集合的**元素**或**元**．通常，用大写字母表示集合，用小写字母表示集合的元素．若 $A$ 是一个集合，则 $x\in A$ 表示 $x$ 是 $A$ 的一个元素．而 $x\notin A$ 表示 $x$ 不是 $A$ 的元素．

集合的表示方法有两种：一种是**列举法**，就是把集合中的所有元素列举出来．例如 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 表示全体自然数所成的集合．$A=\{a,b,c,d\}$ 表示由 $a,b,c,d$ 四个元素组成的集合．另一种是**特性表示法**，就是把集合中元素的特性表示出来．例如 $E=\{x\mid x^2-1=0\}$ 表示 $E$ 是具有性质 $x^2-1=0$ 的那些元素 $x$ 所组成的集合．又如全体自然数的集合可以表为 $\mathbf{N}=\{n\mid n$ 是自然数$\}$．今后，我们用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集．

设 $A,B$ 是两个集合，若集合 $A$ 的每一个元素也是集合 $B$ 的元素，则称 $A$ 是 $B$ 的一个**子集**，记作 $A\subset B$．这时我们说 $A$ 含于 $B$ 中，或 $B$ 包含 $A$．$A\subset B$ 也可记作 $B\supset A$．

集合的包含关系有两个简单的性质：

(1) $A\subset A$;

(2) 若 $A\subset B, B\subset C$,则 $A\subset C$.

如果 $A\subset B$,同时 $B\subset A$,即 $A$ 和 $B$ 含有完全相同的元素,则称 $A$ 与 $B$ 相等,记作 $A=B$. 如果 $A\subset B$,但 $A\neq B$,则称 $A$ 是 $B$ 的一个**真子集**. 不含有任何一个元素的集合叫做**空集**,记作$\varnothing$. 例如 $\{x \mid x^2+1=0$ 且 $x$ 是实数$\}=\varnothing$.

每一个非空集合 $A$,至少含有两个明显的子集:$A$ 及$\varnothing$. 如果 $A$ 仅有这样两个子集,则 $A$ 必为单元素集,即只含有一个元素的集合. 一个集合所含有的元素为有限多个,则称此集合为**有限集**. 不是有限集的集合称为**无限集**.

下面给出集合运算的定义.

**定义 1.1(集合的并与交)** 设 $A,B$ 为两个给定的集合,称集合$\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$为 $A$ 与 $B$ 的**并集**(简称**并**),记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

称集合$\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$为 $A$ 与 $B$ 的**交集**(简称**交**),记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

显然,$A\cap B\subset A\subset A\cup B$. 如果 $A\cap B=\varnothing$,则称 $A$ 与 $B$ **不相交**.

**定义 1.2(差集和余集)** 设 $A,B$ 为两个给定的集合,称集合$\{x \mid x\in A$ 但 $x\notin B\}$为 $A$ 与 $B$ 的**差集**(简称**差**),记作 $A-B$,即

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

在讨论某个具体问题时,如果所考虑的一切集都是某集合 $X$ 的子集,则称 $X$ 为**基本集**. 设 $X$ 是一个非空的基本集,$A\subset X$,则定义 $X-A$ 为集合 $A$ 关于基本集 $X$ 的**余集**(简称**余**),记作 $A^c$.

图 1.1 可以帮助我们理解集合的并、交、差和余等概念.

集合的运算具有下述重要规律.

**定理 1.1** 设 $A,B,C$ 为给定的集合,则有

(1)(**交换律**) $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2)(**结合律**) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

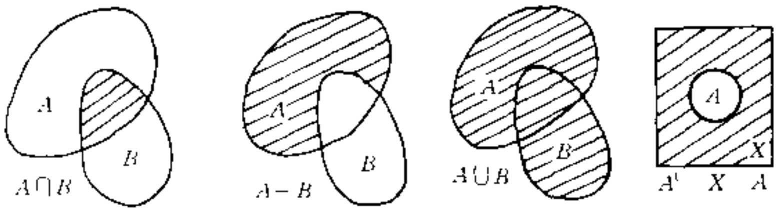


图 1.1

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$$

(3)(**分配律**) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(4)(**幂等律**) $A\cup A=A, A\cap A=A$;

(5)(**吸收律**) $A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$.

给定两个集合 $A$ 和 $B$,设 $x\in A, y\in B$,则可以作成一个有序对 $(x,y)$. 所谓有序是指 $(x,y)$ 与 $(y,x)$ 是不同的. 两个有序对 $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ 相同当且仅当 $x_1=x_2, y_1=y_2$.

**定义 1.3(乘积集合)** 设 $A,B$ 为给定的集合,称一切有序对构成的集合 $\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$ 为 $A$ 与 $B$ 的**笛卡尔**(Cartesian)**乘积**,记作 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}.$$

例如,$A$ 为区间 $[0,1]$,$B$ 为区间 $[1,2]$,则 $A\times B$ 是一个单位正方形(见图 1.2) $\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 1\leqslant y\leqslant 2\}$.

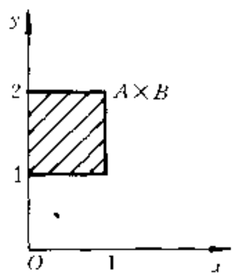


图 1.2

推而广之,若有 $n$ 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, $a_i\in A_i (i=1,2,\cdots,n)$,则可以作成一个 ***n* 元有序组** $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 两个 $n$ 元有序组相等,是指它们含有相同的元素,且这些元素有相同的序. 例如 $(1,3,5)\neq(3,1,5)$.

**定义 1.4** 集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**笛卡儿乘积** $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 是所有 $n$ 元有序组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 构成的集合,其中 $a_i\in A_i (i=$

$1,2,\cdots,n)$.

**例 1.1** 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{-3,2,4\}$，则

$A\times B=\{(1,-3),(1,2),(1,4),(2,-3),(2,2),(2,4)\}$，而

$B\times A=\{(-3,1),(-3,2),(2,1),(2,2),(4,1),(4,2)\}$.

显然，$A\times B\neq B\times A$. □

一个集合自身也可构成笛卡儿乘积，例如 $A^n=A\times A\times\cdots\times A$，其中有 $n$ 个因子 $A$.

**例 1.2** 设 $A=\{1,2\}$，则 $A^2=A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. □

由于 $\mathbf{R}$ 表示数轴上全体点所成之集(即实数集)，则 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 就是实平面 $\mathbf{R}^2$，即

$$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}.$$

今后我们记

$$\mathbf{R}^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y,z)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R},z\in\mathbf{R}\}.$$

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2\in\mathbf{R},\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}.$$

为今后方便起见，引进一些常用的逻辑符号.

设 $P$、$Q$ 表示两个命题(或条件).

符号 “$P\Rightarrow Q$” 表示如果 $P$ 成立，则 $Q$ 也成立.

符号 “$P\Leftrightarrow Q$” 表示命题 $P$ 与 $Q$ 等价，亦即 “$P\Rightarrow Q$ 且 $Q\Rightarrow P$”.

符号 “$\forall$” 表示“任给”，例如“$\forall\ x,f(x)\geqslant 0$”的意思是：对任给的 $x$，不等式 $f(x)\geqslant 0$ 都成立.

符号 “$\exists$” 表示“存在”. 例如“$\exists\ x$ 使得 $|x-a|<1$”的意思是：存在实数 $x$，使得不等式 $|x-a|<1$ 成立.

## 1.2 实数的性质

在中学数学课程中，我们知道实数由有理数与无理数两部分组成. 每一个有理数都可以表示成分数 $\dfrac{p}{q}$ ($p$、$q$ 为整数，$q>0$)，也