高等工业院校教材

高等数学

下册

邱忠文 李君湘 主编

天津大学出版社

高等工业院校教材

高　等　数　学

（本科少学时适用）

下　册

邱忠文　李君湘　田秀恭　何根兰　编

天津大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/邱忠文，李君湘主编．—天津：天津大学出版社，2000.1

高等工业院校教材

ISBN 7-5618-1258-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．①邱…②李…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 55097 号

出　版　天津大学出版社
出版人　杨风和
地　址　天津市卫津路 92 号天津大学内（邮编：300072）
电　话　发行部：022—27403647　邮购部：022—27402742
印　刷　天津市宝坻县第二印刷厂
发　行　新华书店天津发行所
开　本　850mm×1168mm　1/32
印　张　10.75
字　数　336 千
版　次　2000 年 1 月第 1 版
印　次　2000 年 1 月第 1 次
印　数　1—3 000
定　价　16.50 元

前　言

多年以来，天津大学“高等数学”课程一直使用本校统一的自编教材．由于全校面上的教学课时较多，不适于本科生高等数学少学时的专业使用．

为此，我校参加化工类高等数学教学改革的教师，在高等数学教研室的组织下，根据原国家教委批准印发的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，结合我校的教学实际，并参考了报考硕士研究生数学入学考试内容的要求，编写了这一套供本科高等数学少学时（150～160学时）使用的《高等数学》教材．

参加本书编写工作的有邱忠文、李君湘、田秀恭及何银兰．另外刘晓红、刘丹红、韩月丽及严丽等老师为本书的出版作了大量的辅助工作．限于编者的水平，书中不免仍有疏误，恳请读者指正．

编者

1999年3月

目　录

第 8 章　空间解析几何与矢量代数

本章是为学习多元函数微分学作准备.首先,建立空间直角坐标系,引进在工程技术上有着广泛应用的矢量.介绍矢量的一些运算,然后以矢量为工具研究空间的平面和直线,最后介绍空间曲面和空间曲线.

8.1　空间直角坐标系

空间解析几何与平面解析几何一样,是用代数方法研究几何图形.在空间中引进坐标系,使空间中的点与一个数组对应起来,从而可以用方程来研究图形.

8.1.1　空间点的直角坐标

在空间取三个相交于一点而且两两垂直的数轴,它们都以 O 为原点.一般来说各数轴都有相同的长度单位,并分别称它们为 x 轴,y 轴和 z 轴.通常把 x 轴,y 轴配置在水平面上,而 z 轴是铅垂线.三者按右手法则排列,即当 x 轴的正向按右手握拳方向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正向时,姆指的指向就是 z 轴的方向(图 8-1).

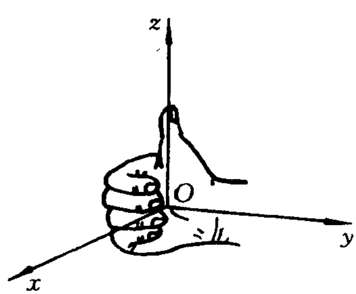

图 8-1

过 x 轴与 y 轴,y 轴与 z 轴

及 z 轴与 x 轴的平面分别称为 xOy 平面，yOz 平面和 zOx 平面，并统称为坐标面．这三个平面两两垂直将空间分为八个卦限．位于 xOy 平面上方含有 x 轴，y 轴与 z 轴正半轴的卦限叫第一卦限，在 xOy 平面上方的其它三个卦限，依逆时针方向依次叫第二、三、四卦限；第一卦限下方的叫第五卦限，其它依逆时针方向分别叫第六、七、八卦限．

过空间中任意一点 M 作三个平面，分别垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴(图 8-2)．设垂足 P,Q,R 对应的三个实数分别是 x,y,z，于是点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)．反之，如果有一个有序数组 (x,y,z)，则分别过 x 轴，y 轴和 z 轴上的点 x,y,z，作三个垂直于 x,y,z 轴的平面，这三个平面相交于空间一点 M．因此，有序数组 (x,y,z) 与空间的点 M 之间存在着一一对应．称 (x,y,z) 为点 M 的坐标，并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标．空间的这种坐标系叫空间直角坐标系，点 O 称为坐标原点(或原点)．

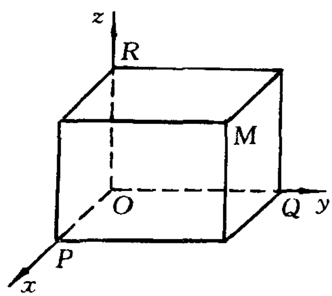

图 8-2

空间中的点在空间直角坐标系的八个卦限内，随着卦限的不同，其坐标的正负号亦不同，各卦限中的点其坐标的正负由下面的表格给出．

卦　限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
坐标的正负号	(+,+,+)	(−,+,+)	(−,−,+)	(+,−,+)
卦　限	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
坐标的正负号	(+,+,−)	(−,+,−)	(−,−,−)	(+,−,−)

由此，可给出两个点关于坐标面、坐标轴、原点的对称含义．

两个点 M、Q 称为关于 xOy 面对称，即连接两点的线段 MQ 与 xOy 面垂直，且被其平分．若点 M 的坐标为 (x, y, z)，则点 M 关于 xOy 面对称的点 Q 的坐标为 $(x, y, -z)$．同样，点 $M(x, y, z)$ 关于 yOz 面对称的点 Q 的坐标为 $(-x, y, z)$；点 $M(x, y, z)$ 关于 zOx 面对称的点 Q 的坐标为 $(x, -y, z)$．

类似地，我们不难得出点 $M(x, y, z)$ 关于 z 轴对称的点 Q 的坐标为 $(-x, -y, z)$（即 MQ 与 z 轴垂直相交，且被 z 轴所平分）；点 M 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(x, -y, -z)$；点 M 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-x, y, -z)$．点 M 关于坐标原点 O 对称的点的坐标为 $(-x, -y, -z)$．

8.1.2 空间两点间的距离

设空间中的两点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，可以通过两点的坐标表示出两点间的距离 d．过点 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成了以 M_1M_2 为对角线的长方体（图 8-3），所以

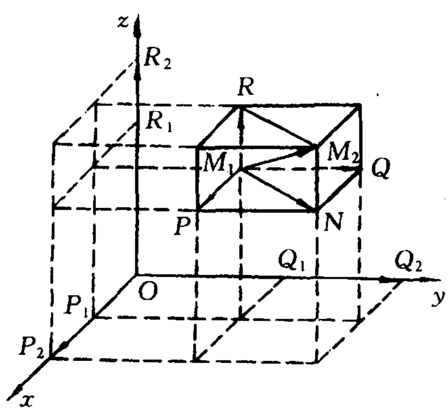

图 8-3

$$
\begin{aligned}
d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\
&= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\
&= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,
\end{aligned}
$$

故 $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别地,点 $M(x,y,z)$与原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1.1 在 yOz 平面上,求与三个已知点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$,$C(0,5,1)$等距离的点.

解 设所求点为 $P(0,y,z)$,根据题意和空间两点的距离公式

$$|AP|^2 = |CP|^2,$$

$$|CP|^2 = |BP|^2,$$

故有 $$\begin{cases}(-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2, \\ (y-5)^2 + (z-1)^2 = (-4)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2,\end{cases}$$

整理得 $$\begin{cases}8y - 2z - 12 = 0, \\ 14y + 6z - 2 = 0.\end{cases}$$

解得 $$y = 1, z = -2,$$

故所求的点为 $P(0,1,-2)$.

8.1.3 线段的定比分点公式

平面直角坐标系中线段的定比分点公式可以推广到空间直角坐标系中,只需在原来基础上增加一个竖坐标,分析方法是相同的.

比如线段定比分点的坐标:若点 M 分线段M_1M_2为 $M_1M : MM_2 = \lambda$,当点 M_1 与点 M_2 的坐标为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$时,则点 M 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

特别,当 $\lambda=1$ 时,线段M_1M_2的中点 M 坐标为

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

习题 8-1

1. 点 $M(x,y,z)$的三个坐标 x,y,z 中,若有一个为零,这个点在何处?若有两个为零,这个点又在何处? 并在空间直角坐标系中标出点 $A(4,0,0)$, $B(0,0,3)$, $C(4,0,3)$, $D(0,-5,0)$, $E(1,2,5)$的位置.

2. 求与点 $M(x,y,z)$分别关于各坐标平面、各坐标轴及坐标原点对称的点的坐标.

3. 求点 $M(4,-3,5)$与原点及各坐标轴的距离.

4. 在 Oz 轴上求与点$A(-4,1,7)$及点 $B(3,5,-2)$等距离的点.

5. 求以 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$, $C(2,4,3)$为顶点的三角形的周长.

6. 自点 $M(4,-3,5)$分别作各坐标面和坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

7. 试证以三点 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$, $C(2,4,3)$为顶点的三角形是直角三角形.

8. 求点$(1,-3,2)$关于点$(-1,2,1)$的对称点.

8.2 矢量代数

8.2.1 矢量概念

在自然科学中,经常遇到的量有两种,一种是只有大小的量,叫数量(或标量). 比如:面积、体积、弧长、质量、温度、时间等等. 另一种是既有大小,又有方向的量,称为矢量,也称为向量. 比如速

度、加速度、力、位移等等. 矢量可以用有向线段表示，有向线段的长度表示矢量的大小，有向线段的方向表示矢量的方向. 若用 A 表示矢量的起点，B 表示矢量的终点，则记此矢量为$\overrightarrow{AB}$. 有时也用一个粗体字母 $\boldsymbol{a}$ 表示，或者用一个上面加箭头的字母来表示，比如 $\vec{a}$，$\vec{i}$，$\vec{j}$ 等等.

矢量的大小叫矢量的模，记为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的矢量叫单位矢量. 模等于零的矢量叫零矢量，记作$\vec{0}$或 $\mathbf{0}$. 零矢量的方向可看作是任意的. 在直角坐标系 O-xyz 中，以原点 O 为起点向点 M 引矢量$\overrightarrow{OM}$叫点 M 的矢径，常用粗体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示.

我们的研究对象是自由矢量，即不管起点如何，凡是方向、长度都相同的矢量都是相等的. 即两矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，当且仅当$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$而且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向.

8.2.2 矢量的运算

1. 矢量的加减法

两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，可以用几何方法按以下两个法则之一得出：

(1)平行四边形法则. 将非零矢量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的起点移至同一点 O，以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的对角线$\overrightarrow{OC}$就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 8-4).

(2)三角形法则. 将 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到 $\boldsymbol{a}$ 的终点，从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的矢量就是矢量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

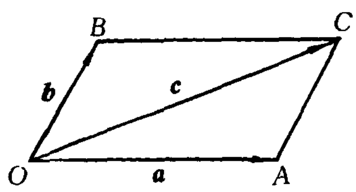

图 8-4

三角形法则还可以推广到求任意有限个矢量的和. 比如求四个矢量之和：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$. 只需将前一个矢量的终点作为后一个矢量的起点，相继作出 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$(图 8-5)，则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点 O 到 $\boldsymbol{d}$ 的终点 D 的矢量$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{a}$

$+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$.

矢量的加法满足：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,(交换律)

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,(结合律)

这两个性质用几何画图很容易得知.

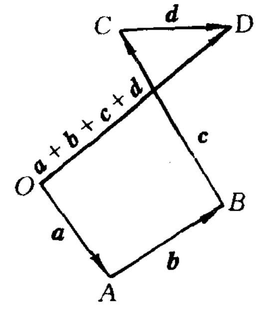

图 8-5

设 $\boldsymbol{a}$ 为一矢量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的矢量叫 $\boldsymbol{a}$ 的负矢量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此规定两个矢量的减法，或叫两个矢量的差.

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 由三角形法则可以看出，从 $\boldsymbol{a}$ 减去 $\boldsymbol{b}$，只要把 $-\boldsymbol{b}$ 加到 $\boldsymbol{a}$ 上去即可(图 8-6).

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不为零矢量时，由三角形法则可以看出：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \tag{2.1}$$

(2.1)式中的等号，当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时成立. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向不相同时，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \tag{2.2}$$

(2.2)式称为三角形不等式，它反映了三角形中两边之和大于第三边的事实.

2. 数量与矢量相乘(简称数乘)

数量 λ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的积称为矢量的数乘，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

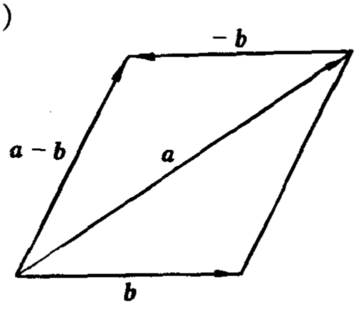

图 8-6

特别，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

矢量的数乘满足以下运算

规则($\lambda,\mu\in\mathbf{R}$):

(1)结合律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

(2)分配律

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

(3)两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(或称共线)的充分必要条件为存在 $\lambda\neq0$,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

(4)三个非零矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的数 λ 和 μ,使 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$.

上述的结论读者可以自行证明.

用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与矢量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位矢量,则有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$.设 $|\boldsymbol{a}|\neq0$,则 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.即:一个非零矢量除以它的模等于该矢量的单位矢量.

8.2.3 矢量在轴上的投影

空间两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是指把它们平移到共同的起点后,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的交角 φ.记作 $(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\varphi=(\boldsymbol{b}\hat{,}\boldsymbol{a})$(并限定 $0<\varphi<\pi$).若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,规定它们的夹角 $\varphi=0$;若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,则规定它们的夹角 $\varphi=\pi$.

一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与一个轴 u 的夹角是指矢量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 u 的正方向之间的夹角.通过点 A 作一个平面 α,使平面 α 垂直于轴 u,那么平面 α 与轴 u 的交点 A' 就叫点 A 在轴 u 上的投影(图 8-7).

那么,什么叫矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影呢?我们定义:若矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为 A' 和 B',那么轴 u 上有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$,叫做矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影.记作

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A'B'. \tag{2.3}$$

轴 u 叫投影轴(图 8-8).

如果在轴 u 上也选定原点和长度单位,并以 x_1,x_2 分别表示点 A',B'在 u 轴上的坐标,则(2.3)式可以表示为

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=x_2-x_1.$$

设矢量$\overrightarrow{AB}$与轴的夹角为 φ,则有下面两个定理.

定理 2.1 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi$.

即:矢量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的投影等于该矢量的模乘以矢量与轴 u 夹角 φ 的余弦.

证明 如图 8-9,过点 A 引与 u 同向的轴 u',则矢量$\overrightarrow{AB}$与轴 u'之夹角等于$\overrightarrow{AB}$与轴 u 之夹角,而且

$$\mathrm{Prj}_{u'}\overrightarrow{AB}=\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}.$$

因此,$\mathrm{Prj}_{u'}\overrightarrow{AB}=AB''=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi=A'B'=\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$. 证毕.

由定理 2.1 可知,矢量的投影是个标量.而且,矢量经过平移以后,在轴 u 上的投影不变.

定理 2.2 有限个矢量的和在轴 u 上的投影等于这些矢量在轴 u 上投影之和.即:

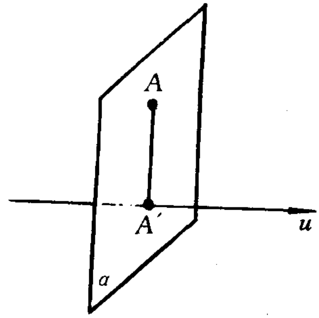

图 8-7

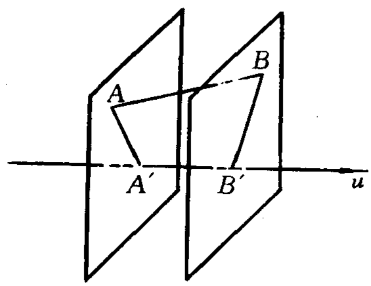

图 8-8

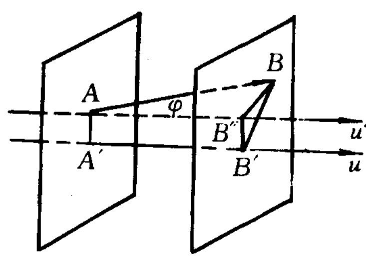

图 8-9

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n.$$

证明从略.

8.2.4 矢量的坐标

为了用数量研究矢量,需要建立矢量与空间一个有序数组之间的联系,这可以通过矢量在轴上的投影来实现.

首先建立空间直角坐标系,用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示 x 轴,y 轴,z 轴上正向的单位矢量,并称它们为坐标系的基本单位矢量.

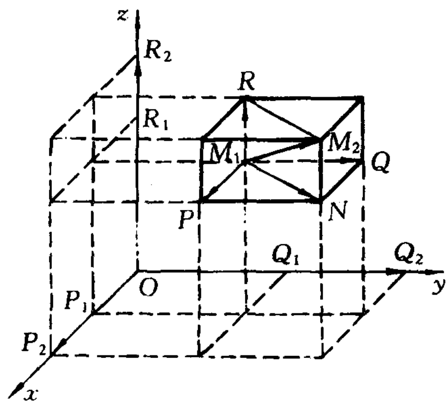

图 8-10

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$是以点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点,点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的矢量.过点 M_1,M_2 各作垂直于三个坐标面的平面,这六个平面围成了一个以 M_1M_2 为对角线的长方体.从图 8-10 可以看出:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{M_1N}+\overrightarrow{M_1R}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}+\overrightarrow{M_1R}\\&=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{Q_1Q_2}+\overrightarrow{R_1R_2}.\end{aligned}$$

式中的$\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{Q_1Q_2},\overrightarrow{R_1R_2}$分别叫矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$在 x,y,z 轴上的分矢量.由上面所述知: