现代数学译丛

实流形和复流形上的分析

〔美〕R. 纳拉西姆汉 著

科学出版社

现代数学译丛

实流形和复流形上的分析

〔美〕R. 纳拉西姆汉 著

陆柱家 译

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书论述了近代微分拓扑、微分几何、大范围分析和多复变函数论的一些共同的基本定理(包括同类书中不易见到的深刻而有用的一些定理)，并叙述了流形上的微分算子理论.

本书简明扼要，清晰易懂，是一本优秀的涉及多学科的基本理论书籍，可供数学系高年级学生、研究生、大学教师及数学工作者参考.

R. Narasimhan

ANALYSIS ON REAL AND COMPLEX MANIFOLDS

North-Holland, Inc.

Second edition 1973

现代数学译丛

实流形和复流形上的分析

〔美〕R. 纳拉西姆汉 著

陆柱家 译

责任编辑 张启男

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年4月第一版 开本：850×1168 1/32

1986年4月第一次印刷 印张：7 7/8

印数：0001—4,700 字数：207,000

统一书号：13031·3159

本社书号：4757·13—1

定价： 2.25 元

序　言

本书来源于1964/65年冬天在孟买 Tata 基本理论研究所所作的演讲. 讲演的目的是介绍实流形上和复流形上分析中的各种课题. 不用说，课题的实际选择完全由个人兴趣所确定. 讲演内容曾由 Tata 研究所作为讲义笔记而刊行，现在这本书就是以此笔记为基础而写成的.

本书的对象是对分析感兴趣但分析知识不多的读者. 我们假定他们具有实变函数论(微积分和测度论)和某些复变函数论的知识. 一般说来，本书用到的多复变函数的一些基本性质将被明确地叙述，并附有参考文献. 然而，我们假定读者熟知线性代数和多重线性代数(向量空间的对偶，张量积，外积等等的性质)以及集合拓扑(连通的和局部紧空间的性质).(所需的素材包含在 Bourbaki: *Algébre Lineaire*, *Algébre Multilinéaire* 和 *Topologie Générale*, 第I章和第II章中.)

本书共分三章. 第一章讨论 $\boldsymbol{R}^n$ 中的可微函数的性质，其目的是提出在微分拓扑中经常用到的可微函数的某些定理（诸如隐函数定理，Sard 定理和 Whitney 逼近定理)，并且给出了它们的完全的证明.

第二章是作为研究实流形和复流形的一个导论. 除去通常的一些定义(微分形式和向量场)外，这一章包含了 Frobenius 定理，Poincaré 引理，Grothendieck 引理，Grothendieck 引理对于复分析的应用，Whitney 的嵌入定理以及 Thom 横截性定理.

最后一章讨论线性椭圆微分算子的性质. 给出了属于 Peetre 和 Hörmander 所刻划的线性微分算子的特征. 证明了关于椭圆算子的 Gårding 不等式和 Friedrichs 不等式，并将其用来证明椭圆方程的弱解的正则性. 这一章以 Malgrange-Lax 的逼近定理及

其对于证明关于开 Riemann 曲面的 Runge 定理的应用（属于 Behnke 和 Stein）为其结尾.

我们不讨论 Riemann 度量和初等微分几何，也不讨论椭圆线丛，尽管它们是重要的，而且是有意义的. 事实上，把这些定理，如第三章的有限性定理，推广到这样的线丛并不是很困难的.

我感谢在准备本书过程中所得到的多种帮助. 感谢 M. Narlikar 夫人整理了 Tata 研究所刊行的讲义笔记；我特别感谢 H. G. Diamond 非常仔细地阅读了大部分的讲义笔记，指出了一些错误，并且提出了改进意见和一些不同的证明. 最后，感谢 N. H. Kuiper 建议将 Tata 研究所刊行笔记改写为本书，他对第一章和第二章有益的注记，以及他对原稿付印方面的帮助.

R. 纳拉西姆汉

1968 年 7 月 于日内瓦

目　　录

第一章　$\boldsymbol{R}^n$ 中的可微函数

记号　我们将使用下面的一些记号：$\boldsymbol{R},\boldsymbol{C},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Z}$ 分别表示实数域，复数域，有理数域和整数环．我们将前两个数域视为具有它们通常的拓扑．$\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}^n$，$\cdots$ 将分别表示 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$，$\cdots$的 Descartes 积，例如，

$$\boldsymbol{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\,|\,x_j\in\boldsymbol{R},\ j=1,\cdots,n\}.$$

记号 $\boldsymbol{R}^+$，$\boldsymbol{Q}^+$，$\boldsymbol{Z}^+$ 分别表示 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{Z}$ 的非负元素的集合．

对于大部分情形，α，β 表示非负整数的 n 数组：$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，$\alpha_j$，$\beta_j\in\boldsymbol{Z}^+$．此时，我们令

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\quad \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!,$$

$$\binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},\ \text{如果}\ \beta_j\leqslant\alpha_j.$$

如果 $\beta_j\leqslant\alpha_j$，则我们记为 $\beta\leqslant\alpha$；如果 $\beta\leqslant\alpha$，并且 $\beta\neq\alpha$，则记为 $\beta<\alpha$．

我们用 $x=(x_1,\cdots,x_n)[z=(z_1,\cdots,z_n)]$ 表示 $\boldsymbol{R}^n[\boldsymbol{C}^n]$ 的点，则

$$|x|=\max_j|x_j|,\quad |z|=\max_j|z_j|,$$

$$\|x\|=(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|z\|=(|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

和

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},\quad z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}.$$

当 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间，并且 S 是 X 的一个子集时，我们用 $\mathring{S}$ 表示 S 的内点集合，即包含在 S 中的最大开集．当 S_1，S_2 是 X 的两个子集时，若 S_1 在 S_2 中是相对紧的，即：若 S_1 在 S_2 中的闭包是紧集时，我们记作 $S_1\Subset S_2$．

当 f 是从 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一开集 Ω 到 $\boldsymbol{R}^q$ 中的一个映射，并且 λ 是 Ω

中的一个非负函数时，我们记

$$f(x)=O(\lambda(x)),\ [\text{或者}\ f=O(\lambda)],$$

如果存在一个常数 $C>0$，使得对于所有 $x\in\Omega$，有 $|f(x)|\leqslant C\lambda(x)$。此外，当 $a\in\Omega$ 时，我们记

$$f(x)=o(\lambda(x)),\ \text{当}\ x\to a\ \text{时(或当}\ |x-a|\to 0\ \text{时)},$$

如果存在一个映射 $\varepsilon:\Omega\to\boldsymbol{R}^+$，使得当 $x\to a$ 时 $\varepsilon(x)\to 0$，并且 $|f(x)|\leqslant\varepsilon(x)\lambda(x)$。

当用"无穷远点"代替 a 时，也用类似的记号。

§1.1. Taylor 公式

令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，k 是一个 $\geqslant 0$ 的整数。我们用 $C^k(\Omega)$ 表示 Ω 上具有阶数 $\leqslant k$ 的连续偏导数的实值函数 f 的集合。也就是说，当 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leqslant k$ 时，这些函数 f 的偏导数

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

在 Ω 上存在并连续。我们用 $C^\infty(\Omega)$ 表示对于所有 $k\geqslant 0$，属于所有 $C^k(\Omega)$ 的函数的集合。$C^k(\Omega)$ 中的函数称为 Ω 上的 C^k 函数。对于 $f\in C^k(\Omega)$ 和 $|\alpha|\leqslant k$，我们用

$$D^\alpha f=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}f$$

表示偏导数

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

其中，所施行的各个微商的次序是无关紧要的。对于定义在 Ω 上的任何函数 f（不必是连续的），我们用 $\operatorname{supp}(f)$ 表示集合

$$\{x\in\Omega\,|\,f(x)\neq 0\}$$

在 Ω 中的闭包。$\operatorname{supp}(f)$ 称为 f 的**支集**。$C_0^k(\Omega)$[1] 表示使得 $\operatorname{supp}(f)$ 是紧集的函数 $f\in C^k(\Omega)$ 的集合。

---

1) 原文误为 $C_0^\infty(\Omega)$。——译者注

如果E是一个有限维$\boldsymbol{R}$向量空间,我们用$C^k(\Omega, E)$, $C_0^k(\Omega, E)$,$\cdots$表示所有映射$f:\Omega\to E$的集合,对于E上任意的(连续)线性泛函l, 这些函数f使得函数$l\circ f\in C^k(\Omega)$, $C_0^k(\Omega)$, $\cdots$.

如果$e_1, \cdots, e_q$是E的一个$\boldsymbol{R}$基,$f:\Omega\to E$是一个映射,则对于每个$x\in\Omega$, 存在q个实数$f_1(x), \cdots, f_q(x)$, 使得

$$f(x)=\sum_{j=1}^{q} f_j(x)e_j.$$

容易验证,

$$f\in C^k(\Omega, E), C_0^k(\Omega, E), \cdots$$

当且仅当

$$f_j\in C^k(\Omega), C_0^k(\Omega), \cdots, j=1, \cdots, q.$$

$C^k(\Omega, E)$的元素称为从Ω到E中的C^k映射. 当$E=\boldsymbol{R}^q$时,我们把$C^k(\Omega, E)$, $C_0^k(\Omega, E)$, $\cdots$记作$C^k(\Omega, q)$, $C_0^k(\Omega, q)$, $\cdots$. 对于$f\in C^k(\Omega, E)$, 我们可以定义导数$D^\alpha f(|\alpha|\leqslant k)$. 此时

$$D^\alpha f\in C^{k-|\alpha|}(\Omega, E).$$

我们将把$f\in C_0^k(\Omega)$等同于在Ω上$=f$, 在$\boldsymbol{R}^n-\Omega$上$=0$的元素$g\in C_0^k(\boldsymbol{R}^n)$.

我们还将经常考虑Ω上的复值函数(或从Ω到$\boldsymbol{C}^q$中的映射). 此时,如果不发生混淆,我们将用记号$C^k(\Omega)$, $C^k(\Omega, q)$, $\cdots$代替$C^k(\Omega, \boldsymbol{C})$, $C^k(\Omega, \boldsymbol{C}^q)$, $\cdots$.

定义在Ω上的一个实值函数f称为(实)**解析的**,如果对于任何$a=(a_1, \cdots, a_n)\in\Omega$, 存在一个幂级数

$$\begin{aligned}P_a(x)&\equiv\sum_{\alpha} c_\alpha(x-a)^\alpha\\&=\sum_{\alpha_j\geqslant 0} c_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x_1-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x_n-a_n)^{\alpha_n},\end{aligned}$$

当x在a的一个邻域U中时,它收敛于$f(x)$. 此时,在U的紧子集上,此级数一致收敛于f(因此f是连续的),并且逐项微分得到的级数也一致收敛. 因而$f\in C^\infty(\Omega)$, 并且,对于任意$\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_n)$, 有

$$D^\beta f(x) = D^\beta P_a(x) = \sum_\alpha c_\alpha D^\beta (x-a)^\alpha.$$

再者，此级数是由 f 唯一确定的；事实上，

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a).$$

以上述的方法同样可以定义从 Ω 到一个有限维向量空间中的解析映射.

当 U, V 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集、$f:U \to V$ 是一个使得 f 和 f^{-1} 都是 C^k 映射的同胚时，我们说 f 是从 U 到 V 上的一个 C^k 微分同胚（或者就称为微分同胚）. 如果 $U = V$，我们称 f 为一个 C^k 自同构.

如果 f 和 f^{-1} 是实解析的，我们就说 f 是一个解析同构（或者，解析自同构，若 $U = V$）.

当 U 是 $\boldsymbol{C}^n$ 中的一个开集，f 是 U 上的一个复值函数时，f 称为全纯的，如果对于任意 $a \in U$，存在一个幂级数 $\Sigma c_\alpha (z-a)^\alpha$，对于 a 的一个邻域中的所有的 z，此幂级数收敛于 $f(z)$.

当 E 是一个有限维 $\boldsymbol{C}$ 向量空间时，一个映射 $f:U \to E$ 称为是全纯的，如果对于 E 上任意的 $\boldsymbol{C}$ 线性泛函 l，$l \circ f$ 是全纯的. 当我们把一个映射 $f:U \to \boldsymbol{C}^q$ 记作 $f = (f_1, \cdots, f_q)$ 时[1)]，f 是全纯的，当且仅当每个 f_i 是一个全纯函数.

一个映射 $f:U \to V$（$\boldsymbol{C}^n$ 中的开集）称为一个 $\boldsymbol{C}$ 解析同构（或者，稍微粗糙一些，称为解析同构，如果不会发生混淆的话），如果 f 和 f^{-1} 都是全纯的. Osgood 的一个定理（例如，参阅 Hervé[1963]）——在本书中我们不证明它——断言，从 U 到 V 上的一个一对一的全纯映射是一个 $\boldsymbol{C}$ 解析同构. 对于 C^k 或实解析映射，没有类似的定理.

我们将假定全纯函数的某些基本性质是熟知的. 这些性质在大多数有关多复变函数论的书中都有证明，例如，可参阅 Hervé [1963] 以及 Hörmander [1966].

---

1) 原文把 $f:U \to \boldsymbol{C}^q$ 误为 $f:\Omega \to \boldsymbol{C}^q$.——译者注

1.1.1　Cauchy-Riemann 方程　定义在一个开集 $U \subset \boldsymbol{C}^n$ 上的函数 f 是全纯的，当且仅当它是连续的，并且，对于任何 j，$1 \leqslant j \leqslant n$，偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)$$

存在并为 0．这里 $z_j = x_j + iy_j$，x_j，y_j 是实的，$i = \sqrt{-1}$．

我们还令

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right).$$

对于 U 上的全纯函数 f，我们记

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n} f.$$

根据方程 1.1.1，我们有

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f.$$

Hartogs 的一个基本的定理(参阅 Hörmander [1966]) 断言，连续性条件在 Cauchy-Riemann 方程 1.1.1 中是多余的；这里我们不证明这个定理．

1.1.2　解析开拓原理　如果 f 在 $\boldsymbol{C}^n(\boldsymbol{R}^n)$ 的一个连通开集 $U(\Omega)$ 中是全纯的(实解析的)，并且，对于所有的 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 和某个 $a \in U(\Omega)$，$D^\alpha f(a) = 0$，则 $f \equiv 0$．特别，如果 f 在 $U(\Omega)$ 的一个非空开子集上为零，则 $f \equiv 0$．

1.1.3　Weierstrass 定理　如果 $\{f_\nu\}$ 是一列全纯函数，在 U 的任何紧子集上它一致收敛于函数 f，则 f 在 U 中是全纯的．并且，对于任何 α，在 U 的紧子集上 $\{D^\alpha f_\nu\}$ 一致收敛于 $D^\alpha f$.

1.1.3′　Montel 定理　如果 $\mathfrak{S} = \{f\}$ 是 U 中的一族全纯函数，在 U 的任何紧子集 K 上它们是一致有界的：

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{对于所有} \quad x \in K,\ f \in \mathfrak{S},$$

那么 $\mathfrak{S}$ 的元素的任何一个序列包含一个子序列，在 U 的任何紧子集上此子序列一致收敛．

1.1.3″ 极大模原理 令 f 在 $\boldsymbol{C}^n$ 的一个连通开集 U 中是全纯的。则映射 $f:U\to\boldsymbol{C}$ 或者是常数，或者是开的．特别，如果 U 是有界的，并且我们令

$$M=\sup_{\zeta\in\partial U}\ \overline{\lim_{z\to\zeta,\, z\in U}}|f(z)|,$$

则对于所有 $z\in U$，我们有 $|f(z)|<M$，除非 f 是常数．

1.1.4 Cauchy 不等式 如果 f 在 U 中是全纯的，并且对于 $z\in U$，有 $|f(z)|\leqslant M$，则对于任何紧集 $K\subset U$ 和任何 α，我们有

$$|D^\alpha f(z)|\leqslant M\alpha!\delta^{-|\alpha|} \quad 对于 \quad z\in K,$$

其中 δ 是 K 到 U 的边界的距离．

1.1.5 引理 令 f 在 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 中是实解析的．我们把 $\boldsymbol{R}^n$ 看作 $\boldsymbol{C}^n$ 的一个闭子集．则存在一个开集 $U\subset\boldsymbol{C}^n$ 和 U 中的一个全纯函数 F，使得 $U\cap\boldsymbol{R}^n=\Omega$ 和 $F|\Omega=f$．

证明 令 $a\in\Omega$，并令 $P_a(x)=\Sigma c_\alpha(x-a)^\alpha$ 是一个在 $|x-a|<r_a(r_a>0)$ 中收敛于 $f(x)$ 的幂级数．定义

$$U_a=\{z\in\boldsymbol{C}^n\,|\,|z-a|<r_a\}.$$

则对于 $z\in U_a$，$P_a(z)=\Sigma c_\alpha(z-a)^\alpha$ 收敛，因而它是 U_a 上的一个全纯函数．

令 $U=\bigcup_{a\in\Omega}U_a$．我们断言，如果 $U_a\cap U_b=U_{a,b}\neq\phi$，则在 $U_{a,b}$ 中 $P_a=P_b$．事实上，$U_{a,b}$ 是凸的，因而是连通的．再者，如果 $U_{a,b}\neq\phi$，则 $U_{a,b}\cap\boldsymbol{R}^n\neq\phi$，并对任意 $c\in U_{a,b}\cap\boldsymbol{R}^n$，我们有

$$D^\alpha P_a(c)=D^\alpha f(c)=D^\alpha P_b(c),$$

因而我们可以应用解析开拓原理 1.1.2．这样，令 $F|U_a=P_a$，我们就定义了一个 U 上的全纯函数 F．显然，$F|\Omega=f$．

现在我们回到实值函数的情形．令 N 是闭单位区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 在 $\boldsymbol{R}^1$ 中的一个邻域，并令 $f\in C^k(N)$，$k\geqslant 1$．则我们有：

1.1.6 引理 存在[0,1]中的一个 ξ，使得

$$f(1)=\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}+\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},$$

其中

$$f^{(\nu)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu} f(t).$$

证明 对于N上的一个连续函数g，令

$$I_0(g, t) = g(t),$$

$$I_r(g, t) = \int_0^t I_{r-1}(g, s)ds, \quad r \geqslant 1.$$

显然，如果$g \in C^k(N)$，以及对$0 \leqslant \nu \leqslant k-1$，$g^{(\nu)}(0)=0$，则我们有

$$g(t) = I_k(g^{(k)}, t).$$

如果我们将此应用于

$$g(t) = f(t) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} t^{\nu},$$

我们就得到

1.1.7 $$f(1) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} = I_k(g^{(k)}, 1) = I_k(f^{(k)}, 1).$$

如果m和M分别表示$f^{(k)}$在$[0,1]$中的下界和上界[1]，显然，我们即有

$$\frac{m}{k!} \leqslant I_k(f^{(k)},1) \leqslant \frac{M}{k!}.$$

因为$f^{(k)}$是连续的，因而它可取m和M之间的所有的值，因此存在一个ξ，$0 \leqslant \xi \leqslant 1$，使得

$$I_k(f^{(k)}, 1) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi).$$

这就证明了引理.

用归纳法容易证明

$$I_k(g, t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t g(s)(t-s)^{k-1} ds.$$

因而可以把(1.1.7)写为下述形式:

1.1.8 $$f(1) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} f^{(k)}(t)dt.$$

---

1) 指下确界和上确界. ——译者注

1.1.9 定理 (Taylor 公式) 令 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开集，并令 $f\in C^k(\Omega)$. 令 $x, y\in\Omega$, 并假设连接 x 和 y 的闭线段 $[x, y]$ 包含在 Ω 中，则我们有

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant k-1}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(y)(x-y)^\alpha$$
$$+\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(\xi)(x-y)^\alpha,$$

其中 ξ 是 $[x, y]$ 的一个点.

证明 这个定理从应用于函数

$$g(t)=f(y+t(x-y))$$

的引理 1.1.6 立即可以得出，而这个函数对于 $[0,1]$ 的一个适当的邻域 N 属于 $C^k(N)$.

当 $f\in C^m(\Omega)$ 以及 S 是 Ω 的一个子集时，我们令

$$\|f\|_m^S=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{1}{\alpha!}\sup_{x\in S}|D^\alpha f(x)|.$$

注意，如果 $f, g\in C^m(\Omega)$, 则我们有

1.1.10 $\quad \|fg\|_m^S\leqslant\|f\|_m^S\|g\|_m^S,\ \|f+g\|_m^S\leqslant\|f\|_m^S+\|g\|_m^S.$

当 k 有限时，我们定义 $C^k(\Omega)$ 上的一个拓扑如下：$g\in C^k(\Omega)$ 的邻域的一个基本系由所有集合

$$B(g, K, \varepsilon)=\{f\in C^k(\Omega)\mid\|f-g\|_k^K<\varepsilon\}$$

给出，其中 ε 遍及所有正实数，K 遍及 Ω 的所有紧子集. 通过把所有集合

$$\{f\in C^\infty(\Omega)\mid\|f-g\|_m^K<\varepsilon\}$$

看作 $g\in C^\infty(\Omega)$ 的邻域的基本系而得到 $C^\infty(\Omega)$ 上的相应的拓扑，其中 ε, K 如前所述，m 是任意的正整数.

显然，对于有限维 (q 维)向量空间 E, 我们可以在 $C^k(\Omega, E)$ $(0\leqslant k\leqslant\infty)$ 上引进类似的拓扑，此拓扑使得空间 $C^k(\Omega, E)$ 代数地和拓扑地同构于 Descartes 积 $(C^k(\Omega))^q$. 这个同构依赖于 E 上的基的选择. 然而，$C^k(\Omega, E)$ 典则同构于 $C^k(\Omega)\otimes E$.

容易知道，$C^k(\Omega)$ 上的上述拓扑有可数基. 一个序列 $\{f_\nu\}$ 收敛于 0，当且仅当对所有 α, $|\alpha|\leqslant k$ (所有 α, 如果 $k=\infty$), 在任

何紧集上一致地 $D^\alpha f_\nu \to 0$. 并且,上述拓扑是可度量化的;当 $k<\infty$ 时,我们可以把函数

$$d(f,g)=\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu}\frac{\|f-g\|_k^{K_\nu}}{1+\|f-g\|_k^{K_\nu}}$$

取作为度量,其中 $\{K_\nu\}$ 是一列紧集,$K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1}$ ($K_{\nu+1}$ 的内点集),并且 $\cup K_\nu=\Omega$. 当 $k=\infty$ 时,代替上述函数,我们取函数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu}\frac{\|f-g\|_\nu^{K_\nu}}{1+\|f-g\|_\nu^{K_\nu}}$$

作为度量.

1.1.11 定理 对于 $0\leqslant k\leqslant\infty$, $C^k(\Omega)$ 是一个完备度量空间.

证明 我们只须证明,如果 $\{g_\nu\}$ 是 $C^k(\Omega)$ 中的一个函数序列,对于所有整数 $m\leqslant k$ 和所有紧集 $K\subset\Omega$ (条件 $m\leqslant\infty$ 是无意义的),当 $\mu,\nu\to\infty$ 时,

$$\|g_\nu-g_\mu\|_m^K\to 0,$$

则存在 $g\in C^k(\Omega)$, 使得对于所有整数 $m\leqslant k$ 和所有紧集 K, 有

$$\|g_\nu-g\|_m^K\to 0.$$

然而,对于任何 α, $|\alpha|\leqslant k$, 存在一个连续函数 g_α, 使得

$$\|D^\alpha(g_\nu)-g_\alpha\|_0^K\to 0,\ \text{当}\ \nu\to\infty\ \text{时}$$

(因为显然在每一紧集上一致地有 $D^\alpha(g_\nu-g_\mu)\to 0$). 因此我们只须证明 $g=g_0\in C^k(\Omega)$ 以及 $D^\alpha g=g_\alpha$. 为此,只需证明当 $|\alpha|\leqslant k-1$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, $|\beta|=1$ 时,有 $g_\alpha\in C^1(\Omega)$ 以及 $D^\beta g_\alpha=g_{\alpha+\beta}$.

如果 $a\in\Omega$, x 在 a 的附近,由 Taylor 公式,我们有

1.1.12 $$D^\alpha g_\nu(x)-D^\alpha g_\nu(a)=\sum_{|\beta|=1}D^{\alpha+\beta}g_\nu(\xi_\nu)(x-a)^\beta,$$

其中 ξ_ν 是线段 $[a,x]$ 上的一点. 我们可以选择一个子序列 $\{\nu_p\}$, 使得

$$\xi_{\nu_p}\to\xi\in[a,x].$$

如果我们在(1.1.12)中用 ν_p 代替 ν, 并令 $p\to\infty$, 我们就得到

$$g_\alpha(x)-g_\alpha(a)=\sum_{|\beta|=1}g_{\alpha+\beta}(\xi)(x-a)^\beta$$

$$= \sum_{|\beta|=1} g_{\alpha+\beta}(a)(x-a)^\beta + o(|x-a|),$$

其中 $o(|x-a|)$ 是一个函数，当 $x \to a$ 时，它趋于零的速度快于 $|x-a|$. 后一等式是从 $g_{\alpha+\beta}$ 的连续性得来的. 这就蕴涵着 $g_\alpha \in C^1(\Omega)$, 以及当 $|\beta|=1$ 时我们有 $D^\beta g_\alpha = g_{\alpha+\beta}$.

1.1.13 注 对于 $C^k(\Omega, E)$, 同样的结果显然也成立.

Taylor 公式的另一推论如下:

1.1.14 命题 当 $f \in C^\infty(\Omega)$时，f 是解析的，当且仅当对于任何紧集 $K \subset \Omega$,存在一个 $M>0$, 使得

1.1.15 $|D^\alpha f(x)| \leqslant M^{|\alpha|+1}\alpha!$ 对于 $x \in K$ 和所有 α.

证明 若 f 是解析的，此不等式从引理 1.1.5 和 Cauchy 不等式 1.1.4 即得. 反之，如果(1.1.15)成立，并且 x 属于 $a \in \Omega$ 的一个紧的凸邻域 K, 则对 $\xi \in [a, x]$, 我们有

$$\left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi)(x-a)^\alpha \right| \leqslant k^n M^{k+1}|x-a|^k.$$

若 $|x-a| < M^{-1}$, 则 Taylor 公式即蕴涵着

$$\sum \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha$$

收敛于 $f(x)$.

1.1.16 注 容易验证，(1.1.15)等价于下述事实：存在一个 $M'>0$, 使得

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant M'^{|\alpha|+1}(|\alpha|)! \text{ 对于 } x \in K \text{ 和所有 } \alpha.$$

§1.2. 单 位 分 解

在叙述主要结果之前，我们先引进一些定义.

一个拓扑空间 X 的一个子集族 $\{E_i\}_{i \in I}$ 称为局部有限的，如果每个点 $a \in X$ 有一个邻域 U, 使得

$$\{i \in I \mid E_i \cap U \neq \emptyset\} \text{ 是有限的.}$$

一个族 $\{E'_j\}_{j \in J}$ 称为族 $\{E_i\}_{i \in I}$ 的加细，如果存在一个映射