陈肇姜　编著

点集拓扑学
题解与反例

南京大学出版社

点集拓扑学题解与反例

陈肇姜　编著

南京大学出版社

点集拓扑学题解与反例
陈肇姜　编著
*
南京大学出版社出版
（南京大学校内　邮编 210093）
江苏省新华书店发行 江苏省丹阳市兴华印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/16　印张 14.75　字数　368 千
1997 年 9 月第 1 版　　1997 年 9 月第 1 次印刷
印数 1—2000
ISBN7-305-02999-8/O·210
定价：17.50 元

编　者　的　话

《点集拓扑学》是用公理化方法研究抽象空间性质的学科。所谓公理化方法是从少数原始概念和若干无矛盾的公理出发运用严密的逻辑推理建立理论体系的方法。因此点集拓扑学与近代数学的其它分支一样是一门抽象化程度较高的学科。要学好这门课程需要较强的抽象思维能力，而这恰恰是大多数初学者所不足的。中学生的理性思维活动是以形象思维，即对直觉和表象依赖性较强的思维为主的，刚刚通过大学二年级的本科生由于经过了从初等数学到高等数学(包括从常量数学到变量数学，从低维的现实空间到高维的理性空间)的飞跃，抽象思维的能力有所发展，但因课程的理论体系基本上都是建立在有限维欧氏空间中的，高维的理性空间与低维的现实空间，除了难易程度之外，空间结构的本质没有多大差别，直觉和表象仍有很大作用，在整个思维活动中形象思维仍占相当大的比重，所以学生在进入学习如《点集拓扑学》那样一门抽象学科的阶段，可以说在经历着又一次飞跃。学生的理性思维 必须进入以抽象思维，即不依靠直觉和表象(直觉和表象只能起启发思维的作用)，只凭概念、公理、定理利用形式逻辑进行推理作出判断的思维活动为主的阶段，这就难免有不善于、不习惯和不适应的现象。这也就是多数同学在开始学习这门课程时感到"难"的根本原因．尤其是对于解习题，完全不同于先行课程 ，没有统一的模式，没有通用的法则，这种不拘一格性使初学者很伤脑筋。而要学好这门课程又非做习题不可，只有通过足够的练习才能理解基本概念、基本内容，掌握基本技巧，并借以培养和发展抽象思维的能力，为学好现代数学的其它课程奠定基础。如有一本能配合正课学习的辅导性读物对于初学者来说，无疑是雪中送炭。然而目前还没有这样一种适宜的读物。编者在多年的教学实践中积累了一些资料，有意编写这样一本读物献给青年学生。遂于 1993 年编写了一个简缩的讲义供学生使用，反映良好，觉得很有得益，尤其感到对常见错误的分析切中要害。近来，又得到了南京大学数学系主任苏维宜教授与系教学委员会的支持和鼓励，以及仇庆久教授与陆文钊教授的推荐，已由校教学委员会确定为南京大学教材、专著出版资助基金的资助项目。于是在讲义的基础上进一步扩充、改编，增加了大量的反例形成本书。

本书的系统、章节的安排是与南京大学出版社 1995 年出版的由陆文钊与陈肇姜编著的《点集拓扑学》[1]一书相匹配的，也能独立使用。为了保持独立性，在内容上与[1]略有重复。它是正课的延伸和扩展。它深化和拓宽了[1]的内容。在例题部分包括了某些重要定理的证明，解题示范(题目中不少是来源于参考书目[1]—[4]中初学者感到较难的问题)以及常见错误分析(错例来自于数学实践)。其中有不少技巧性和趣味性较强的例子。在相当多例题的解答后加了评注，这对于消化和深入理解课本中的基本概念、基本性质，掌握基本技巧是富有启发性的。在阶段性部分对各种相关概念、相关性质间的相互关系以表格化的方式给以小结并用足够的反例揭示彼此间的区别。不少反例是著名的，它们有较强的趣味性，它们的

构思是巧妙的，并富有技巧性和艺术性。阅读这些反例不仅可以起到对相关概念、相关性质间彼此关系加深理解的作用，而且也可以说是一种艺术享受。数学中的反例与定理的正面证明同等重要。要肯定一个命题需要给出证明，要否定一个命题就需要给出反例。往往为假命题给出反例比起为真命题给出证明更为困难，有志于在"数学王国"里驰骋并求获取卫冕的读者细心品尝这些反例巧妙的构思，独特的技巧，从中汲取有益的营养，定能提高自身的数学素养。

编者相信，读者如能正确运用本书必有得益．如果单纯地将本书作为一本普通的习题解答，遇到不会做的习题，从中寻找答案，免得去"伤脑筋"，那就错了，这就有悖于编者的本意，这将是无益而有害的。对于课本(无论使用那种课本)中的习题应立足于凭借自已的独立思考去完成。阅读本书的目的在于从本书的丰富内涵中得到启示，从中汲取营养，培养抽象思维的能力，提高数学素养。自已有能力解答的问题，最好不要先看书中的解答，自已动手做一遍，然后再阅读，可作比较对照，效果更好。书中的解答未必是最佳的，有的题由于所用课本的系统不同，就会有不同的解题方法，难易程度也各有千秋。本书中给出的练习大多是浅显的，只有极少数有中等难度，读者应当自已去做这些练习。

在本书出版之际，编者衷心感谢苏维宜教授、仇庆久教授与陆文钊教授等有关领导和专家们的支持鼓励和推荐，感谢校教学委员会确定并由南京大学出版社给予的资助，感谢南京大学出版社有关同志的辛勤劳动。还得感谢南京大学数学系电脑照排部的大力支持，由他们帮助绘制了全书的图表。

本书编写仓促，编者学识浅薄，不妥或错误在所难免，还望专家和读者指正。

编者

1996.6

目　　录

第一章　拓扑空间

§1.1　度量空间与度量拓扑

A　内容提要

贯穿本书，采用下述记号：

$\mathbf{R}=\{x\mid x$ 为实数$\}$，　$\mathbf{Q}=\{x\mid x$ 为有理数$\}$，

$\mathbf{Z}=\{x\mid x$ 为整数$\}$，　$\mathbf{N}=\{n\mid n$ 为自然数$\}$.

$\forall\ x\cdots$，表示对于每个(任意一个)$x\cdots$.

$\exists\ x\cdots$，表示存在 $x\cdots$.

s. t. $\cdots$，表示使得$\cdots$.

$\mathscr{P}(X)$表示集合 X 的幂集．

1.1.1 定义　设 X 为非空集，映射 $\rho: X\times X\to\mathbf{R}$ 满足下述度量公理：$\forall\ x,y,z\in X$

[M. 1] 非负性　$\rho(x,y)\geqslant 0$，

[M. 2] 对称性　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$，

[M. 3] 三角不等式　$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$，

[M. 4] 分离性　$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$，

则称 ρ 为 X 上的度量，$\rho(x,y)$为 x 与 y 间的距离，$\langle X,\rho\rangle$为度量空间．

若 $S\subset X$，ρ 为 X 的度量，则称$\langle S,\rho|_{S\times S}\rangle$为$\langle X,\rho\rangle$的子空间．

1.1.2 定义　在度量空间$\langle X,\rho\rangle$中，

$$B_\rho(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid\rho(x,y)<\varepsilon\},(x\in X,\varepsilon>0),$$

叫做点 x 的球形邻域或以 x 为中心，ε 为半径的开球．

设 $G\subset X$，如果$\forall\ x\in G$，$\exists\ \varepsilon>0$ s. t. $B_\rho(x,\varepsilon)\subset G$，则称 G 为 X 的 ρ-开集．

1.1.3 定理　在度量空间$\langle X,\rho\rangle$中，

(1)　每个 $B_\rho(x,\varepsilon)$是 X 的开集，

(2)　$\varnothing$，X 都是 X 的开集，

(3)　X 的任意两个开集的交是 X 的开集．

(4)　X 的任意多个开集的并是 X 的开集．

1.1.4 定义　度量空间$\langle X,\rho\rangle$的全体开集组成的集族τ_ρ叫做X的由ρ诱导的拓扑，也叫度量拓扑．如果X上的两个度量ρ_1,ρ_2诱导相同的拓扑，就说ρ_1,ρ_2是等价的．

1.1.5 定义　设A,B为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的非空子集．

$$\rho(A,B) \xlongequal{\text{def}} \inf\{\rho(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

叫做A与B的距离，$\rho(x,B)\xlongequal{\text{def}}\rho(\{x\},B)$叫做点$x$与集$B$的距离．

$$\delta(A) = \begin{cases} \sup\{\rho(x,y) \mid x,y \in A\}, & \text{当}\{\rho(x,y) \mid x,y \in A\}\text{有界时}, \\ +\infty & \text{否则}. \end{cases}$$

叫做A的直径．当$\delta(A)<+\infty$时，叫A为有界子集．

B　例题

(一)

度量空间是欧氏空间的推广，又是拓扑空间的最好原型．搞清楚度量空间的拓扑结构对于掌握一般拓扑空间的概念是有益的．解度量空间的问题一般都要紧紧抓住度量函数及点的球形邻域，处理的方法基本上与数学分析中用ε-邻域处理的方法类似．即使后来把度量空间作为拓扑空间的特例来处理时，度量函数与球形邻域仍然起重要作用．

1.1.1(1)　设$X=\{f:[a,b]\to\mathbf{R} \mid f\text{ 连续}^{①}\}$，
定义　$\rho: X\times X\to \mathrm{R}$为$\forall f,g\in X$

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt.$$

证明ρ是X的度量．

(2)　如将上述"f连续"的条件换成"f在$[a,b]$上R-可积"，那么ρ是否仍是X的度量？

解　(1)　由ρ的定义，显然满足[M.1]，[M.2]，[M.3]．只需验证[M.4]．而当$f=g$时，显然有$\rho(f,g)=0$

现若$\rho(f,g)=0$，即

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|dt = 0.$$

我们证明$f=g$．假定$f\neq g$，则$\exists\ t_0\in[a,b]$ s.t. $f(t_0)\neq g(t_0)$．由微积分学中关于连续函数的性质知，$\exists\ \delta>0$ s.t. $\forall\ t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)\cap[a,b]$，$|f(t)-g(t)|>0$．于是必存在包含$t_0$的区间$[c,d]$$(c<d)$使

$$[c,d] \subset (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [a,b]$$

则

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt \geqslant \int_c^d |f(t) - g(t)|dt > 0,$$

导致矛盾．所以必有$f=g$．故[M.4]成立．这就验证了ρ是X的度量．

① 本节涉及到的函数连续的概念以及序列收敛的概念，都是微积分中的概念．

(2) 由于对任一 R-可积函数 f,只要改变有限个点处的值就得另一个可积函数 g,此时 $f\neq g$,但 $\rho(f,g)=0$. 所以不满足分离性条件[M.4]. 从而 ρ 就不再是度量. □

注 度量公理中的这个条件往往容易被疏忽. 如果我们删去分离性条件[M.4],其它三个条件不变,则称 ρ 为伪度量. 以后将会看到伪度量空间与度量空间虽有许多相同之处,但本质上不同的一点,就是度量空间具有所谓 Hausdorff 性质,即任意两个不同的点都能用不相交的邻域隔开,在这种空间中,序列的极限是唯一的,而伪度量空间则不然.

1.1.2 判断下述定义的映射 $\rho: X\times X\to\mathbf{R}$ 是否为 X 的度量,又是否为伪度量:

(1) $X=\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\{f:[0,1]\to\mathbf{R}\mid f \text{ 连续}\}$,

$\rho(f,g)=|f(0)-g(0)|\quad(\forall\ f,g\in X)$;

(2) X 为非空集,$f: X\to\mathbf{R}$ 为一已知映射,

$\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|\ (\forall\ x,y\in X)$;

(3) $X=\{\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\mid\forall\ n,x_n\in\mathbf{R},\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\text{收敛}\}$,

$\rho(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-y_n|$,($\forall\ x=\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}},y=\langle y_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\in X$);

(4) $X=\mathbf{R}^{\mathbf{N}},\forall\ x=\langle x_n\rangle_{n\in N},y=\langle y_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\in X$,

$\rho(x,y)=\sup\{\min\{|x_n-y_n|,1\}\mid n\in\mathbf{N}\}$

解 (1) 显然满足[M.1]—[M.3],但当 $f\neq g$ 且 $f(0)=g(0)$时,也有

$$\rho(f,g)=|f(0)-g(0)|=0.$$

所以 ρ 不是度量而是伪度量.

(2) 显然满足 [M.1]—[M.3],当 f 为单射时,也满足[M.4],此时 ρ 为度量,但当 f 不是单射时,不满足[M.4],此时 ρ 不是度量而是伪度量.

(3) 读者可自行验证 ρ 不是度量而是伪度量.

(4) 读者可自行验证 ρ 是度量. □

1.1.3 在 $\mathbf{R}$ 上,$\forall\ x_1,x_2\in\mathbf{R}$. 令

$$\rho_1(x_1,x_2)=\left|\frac{x_1}{1+|x_1|}-\frac{x_2}{1+|x_2|}\right|,$$

$$\rho_2(x_1,x_2)=\begin{cases}0 & x_1=x_2=0.\\ \left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right| & x_1\neq 0,,x_2\neq 0,\\ \left|\dfrac{1}{x_1}\right| & x_1\neq 0,x_2=0,\\ \left|\dfrac{1}{x_2}\right| & x_1=0,x_2\neq 0,\end{cases}$$

证明 ρ_1,ρ_2 都是 $\mathbf{R}$ 的度量.

证 可以直接分别验证 ρ_1,ρ_2 都满足[M.1]—[M.4],但比较繁琐,如果 利用下述命题就十分简单了.

命题 设$\langle Y,d\rangle$为度量空间,$f: X\to Y$ 为一一映射(既是满的又是单的映射叫一一映射),则由

$$\rho(x_1,x_2)=d(f(x_1),f(x_2))\qquad(\forall\ x_1,x_2\in X)$$

定义的 $\rho: X\times X\to\mathbf{R}$ 是 X 的一个度量．

这个命题的证明可由 d 满足[M.1]—[M.4]利用 f 的一一性即得 ρ 也满足[M.1]—[M.4]. 它的直观意义非常明显，如同我们把地球上两点间的实际距离作为地球仪上对应的两点间的距离。

现令

$$f:\mathbf{R}\to(-1,1),\ x\mapsto\frac{x}{1+|x|};$$

$$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto g(x)=\begin{cases}0 & x=0,\\ \dfrac{1}{x} & x\neq 0.\end{cases}$$

则 f,g 均为一一映射且 $\forall\ x_1,x_2\in\mathbf{R}$

$$\rho_1(x_1,x_2)=|f(x_1)-f(x_2)|,$$
$$\rho_2(x_1,x_2)=|g(x_1)-g(x_2)|.$$

故由上述命题即知 ρ_1,ρ_2 都是 $\mathbf{R}$ 的度量． □

注　“抽象”不等于“难”，有时将具体问题一般化，经过“抽象”后反而显得更容易．

1.1.4　已知 $f: E^n\to E^1$ 为 n 元连续函数，证明 $\forall\ a,b\in E^1$，

$$A=\{x\in E^n\,|\,f(x)>a\},\quad B=\{x\in E^n\,|\,f(x)<b\},$$
$$C=\{x\in E^n\,|\,a<f(x)<b\},$$

都是 E^n 的开集．

注　这里以及今后我们总是用 E^n 表示 n 维欧氏空间，即在 $\mathbf{R}^n$ 上取欧氏度量．

证　先证 A 为 E^n 的开集．$\forall\ x\in A$，由于 $f(x)>a$，故$\exists\ \varepsilon>0$ s.t. $f(x)-\varepsilon>a$. 由 f 的连续性知 $\exists\ \delta>0$ s.t. 当 $\|x'-x\|<\delta$ 时 $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$. 即

$$a<f(x)-\varepsilon<f(x')<f(x)+\varepsilon.$$

所以　$B(x,\delta)\subset A$.　依定义 E^n 为开集．

同理可证 B 为 E^n 的开集．而 $C=A\cap B$，所以也是 E^n 的开集． □

1.1.5　证明 n 元函数 $f: E^n\to E^1$ 是连续的充要条件为：对于 E^1 的任一开集 G，$f^{-1}(G)$ 是 E^n 的开集．

证　假定 f 连续，G 可设为 $G=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda,b_\lambda)$，于是

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}((a_\lambda,b_\lambda)).$$

由 B1.1.4 可知，$\forall\ \lambda$，$f^{-1}((a_\lambda,b_\lambda))$ 是 E^n 的开集，从而 $f^{-1}(G)$是 E^n 的开集．

反之，$\forall\ x\in E^n$ 以及 $\varepsilon>0$，由于 $U=f^{-1}((f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon))$是 E^n 的开集，且 $x\in U$. 故 $\exists\ \delta>0$ s.t. $B(x,\delta)\subset U$. 故当 $\|y-x\|<\delta$ 时，$f(y)\in(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)$，即 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$，所以 f 连续． □

注　这里给出的用开集来刻划的连续函数的特征性质将被推广到一般的拓扑空间中去．

1.1.6　设 A 为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的任一非空子集，$c\in[0,+\infty)$，证明

$$G_1=\{x\in X\,|\,\rho(x,A)>c\},$$
$$G_2=\{x\in X\,|\,\rho(x,A)<c\}$$

都是 X 的开集．

证　设 $x\in G_1$，则 $\rho(x,A)>c$，于是 $\varepsilon=\frac{1}{2}(\rho(x,A)-c)>0$．$\forall\ y\in B_\rho(x,\varepsilon)$ 以及 $z\in A$，

$$\rho(y,z)\geqslant\rho(x,z)-\rho(x,y)>\rho(x,z)-\varepsilon,$$

两端对 $z\in A$ 取下确界就得

$$\rho(y,A)\geqslant\rho(x,A)-\varepsilon=\rho(x,A)-\frac{1}{2}\rho(x,A)+\frac{c}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\rho(x,A)+\frac{c}{2}>c.$$

即 $y\in G_1$，所以 $B_\rho(c,\varepsilon)\subset G_1$，故 G_1 为开集．

对于 G_2，当 $c=0$ 时，$G_2=\varnothing$，故为开集，当 $c>0$ 时，与 G_1 类似地可证 G_2 是开集　□

注　特别地，当上述 $A=\{y\}$ 时，

$$\mathscr{C}\{y\}=\{x\in X\,|\,\rho(x,y)>0\}$$

是开集．即度量空间中，每个单点集的补集是开集，若把补集是开集的集合叫闭集，那么度量空间中每个单点集是闭集．

1.1.7　设 $\langle X,\rho\rangle$ 为度量空间，$\forall\ x,y\in X$，令

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},\quad \rho_2(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$$

证明 ρ_1,ρ_2 也是 X 的度量，且 ρ_1,ρ_2 与 ρ 都是等价的度量．

证　易见要证 ρ_1,ρ_2 都是 X 的度量，只需验证三角不等式成立．对于 ρ_1，注意到函数 $f(t)=\frac{t}{1+t}$ 当 $t\geqslant0$ 时为单调增函数．于是 $\forall\ x,y,z\in X$

$$\rho_1(x,z)=\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}\leqslant\frac{\rho(x,y)+\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}$$

$$\leqslant\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}+\frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)}=\rho_1(x,y)+\rho_1(y,z)$$

对于 ρ_2，

$$\begin{aligned}\rho_2(x,z)&=\min\{1,\rho(x,z)\}\leqslant\min\{1,\rho(x,y)+\rho(y,z)\}\\&\leqslant\min\{\rho(x,y)+\rho(y,z),1+\rho(x,y),1+\rho(y,z),2\}\\&=\min\{\rho(x,y),1\}+\min\{\rho(y,z),1\}\\&=\rho_2(x,y)+\rho_2(y,z).\end{aligned}$$

所以 ρ_1,ρ_2 都是 X 的度量．

下证 ρ_1,ρ_2 与 ρ 的等价性．

［法一］　易见 $\forall\ x,y\in X$　$\rho_1(x,y)\leqslant\rho_2(x,y)\leqslant\rho(x,y)$．又当 $\rho(x,y)<1$ 时，$\rho(x,y)\leqslant 2\rho_1(x,y)$．所以当 $\varepsilon\in(0,1)$ 时，$\forall\ x\in X$

$$B_{\rho_1}(x,\varepsilon/2)\subset B_\rho(x,\varepsilon)\subset B_{\rho_2}(x,\varepsilon)\subset B_{\rho_1}(x,\varepsilon)\qquad(1.1-1)$$

现设 G 是 ρ_1-开的，则 $\forall\ x\in G\ \exists\ \varepsilon\in(0,1)$ s. t. $B_{\rho_1}(x,\varepsilon)\subset G$．由(1.1－1)知 $B_{\rho_2}(x,\varepsilon)\subset G$，所以 G 是 ρ_2-开的．

同理，如果 G 是 ρ_2-开的，那么 G 也是 ρ-开的．

现反过来设 G 是 ρ-开的，则 $\forall\ x\in G\ \exists\ \varepsilon\in(0,1)$ s. t. $B_\rho(x,\varepsilon)\subset G$，由(1.1－1) 取 $\delta=$

$\varepsilon/2$ 就有 $B_{\rho_1}(x,\delta)\subset G$，所以 G 是 ρ_1-开的．

综合上述过程有：

$$G\text{ 为 }\rho_1\text{- 开的}\Rightarrow G\text{ 为 }\rho_2\text{- 开的}\Rightarrow G\text{ 为 }\rho\text{- 开的}\Rightarrow G\text{ 为 }\rho_1\text{- 开的}.$$

可见 ρ_1,ρ_2 与 ρ 都是等价的．

［法二］ 因为当 $\rho(x,y)<1$ 时，$\rho_2(x,y)=\rho(x,y)$，所以 $\forall\ \varepsilon\in(0,1),x\in X$

$$B_\rho(x,\varepsilon)=B_{\rho_2}(x,\varepsilon)$$

由此可得 ρ 与 ρ_2 等价，再证 ρ 与 ρ_1 等价．这可由 $\forall\ \varepsilon>0,\ x,y\in X$，

$$B_{\rho_1}\left(x,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)=B_\rho(x,\varepsilon)\subset B_{\rho_1}(x,\varepsilon)$$

得到．

［法三］ $\forall\ x,y\in X,\rho_1(x,y)\leqslant\rho_2(x,y)\leqslant 2\rho_1(x,y).$ (1.1－2)

这是因为当 $\rho(x,y)<1$ 时，由定义可得 $2\rho_1(x,y)\geqslant\rho(x,y)\geqslant\rho_2(x,y)$. 而当 $\rho(x,y)\geqslant 1$ 时，

$$2\rho_1(x,y)=\frac{2\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}\geqslant\frac{1+\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}=1\geqslant\rho_2(x,y).$$

所以(1.1－2)式成立．于是 ρ_1 与 ρ_2 等价，再由［法二］所证的 ρ 与 ρ_2 等价即得 ρ_1,ρ_2 与 ρ 都等价． □

注 这道题没有一个 $\forall\ \varepsilon>0$ 都成立的球形邻域的轮转的包含链．在上述三种方法中都在某个时候限制了 $\varepsilon<1$. 由于在开集定义中，"$\forall\ x\in G\ \exists\ \varepsilon>0$ s. t. $B_\rho(x,\varepsilon)\subset G$"这个条件，总可选用小于 1 的 ε，所以上述证明过程中对 $\varepsilon<1$ 的限制是无妨的．

1.1.8 设 X 为非空集，$\rho:X\times X\to\mathbf{R}$ 满足条件：$\forall\ x,y,z\in X$，

(1) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

(2) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$

证明：$\forall\ x,y\in X,\rho(x,y)\geqslant 0$.

证 首先，由(2)，(1)，$\forall\ x,y\in X$

$$\rho(x,x)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,x)=2\rho(x,y).$$

特别地，让 $y=x$ 则得 $\rho(x,x)\leqslant 2\rho(x,x)$，故

$$\rho(x,x)\geqslant 0.$$

进而 $\forall\ x,y\in X\quad 2\rho(x,y)\geqslant\rho(x,x)\geqslant 0$，所以

$$\rho(x,y)\geqslant 0.$$ □

注 由这道题可知，度量公理中非负性条件不是独立的．然而由 B1.1.1 可见分离性条件是独立的．

1.1.9 证明在任一度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 中，$\forall\ x\in X$ 都有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)=\{x\}.$$

证 显然只需证 $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)\subset\{x\}$.

设 $y\in X$ 且 $y\neq x$，则 $\rho(x,y)>0$. 于是 $\exists\ n_0\in\mathbf{N}$ s. t. $\frac{1}{n_0}<\rho(x,y)$，从而 $y\notin B_\rho\left(x,\frac{1}{n_0}\right)$，更有 $y\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)$. 所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)\subset\{x\}$. 故有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_\rho\left(x,\frac{1}{n}\right)=\{x\}$$ □

注　由本题可见度量空间中，任意多个开集(甚至可数无限个开集)之交未必是开集．

1.1.10　设 A,B 为度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 中的非空子集，证明

$$\delta(A\cup B)\leqslant\delta(A)+\delta(B)+\rho(A,B)$$

证　$\forall\ x,y\in A\cup B$

若 $x,y\in A$ 或 $x,y\in B$. 则显然有

$$\rho(x,y)\leqslant\delta(A)+\delta(B)+\rho(A,B).$$

现设 $x\in A,y\in B$. 因 $\forall\ n\in\mathbf{N}\ \exists\ a\in A,b\in B$ s.t.

$$\rho(a,b)<\rho(A,B)+\frac{1}{n},$$

所以

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&\leqslant\rho(x,a)+\rho(a,b)+\rho(b,y)\\&<\rho(x,a)+\rho(A,B)+\frac{1}{n}+\rho(b,y)\\&\leqslant\delta(A)+\delta(B)+\rho(A,B)+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

让 $n\to\infty$ 取极限得

$$\rho(x,y)\leqslant\delta(A)+\delta(B)+\rho(A,B)$$

故

$$\begin{aligned}\delta(A\cup B)&=\sup\{\rho(x,y)\,|\,x,y\in A\cup B\}\\&\leqslant\delta(A)+\delta(B)+\rho(A,B).\end{aligned}$$ □

注　利用数学归纳法我们可推广这一结果而有：

设 $A_1,A_2\cdots,A_n$ 为度量空间 $\langle X,\rho\rangle$ 中有限个非空子集，则

$$\delta\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\delta(A_i)+\sum_{i=2}^{n}\rho(A_1,A_i).$$

1.1.11　设 $C\subset E^n$，如果 $\forall\ x,y\in C$ 都有

$$\{(1-t)x+ty\,|\,t\in[0,1]\}\subset C,$$

则称 C 为 E^n 的凸集，证明 E^n 的任一开球 $B(x,\varepsilon)$ 是凸集．

证　$\forall\ y,z\in B(x,\varepsilon),\forall\ t\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}\|(1-t)y+tz-x\|&=\|(1-t)(y-x)+t(z-x)\|\\&\leqslant(1-t)\|y-x\|+t\|z-x\|<(1-t)\varepsilon+t\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $(1-t)y+tz\in B(x,\varepsilon)$. 从而 $B(x,\varepsilon)$ 是凸集． □

(二)常见错误分析

1.1.12　设 $\langle X,\rho\rangle$ 为度量空间，A 为 $\langle X,\rho\rangle$ 的子空间，$G\subset A$. 证明 G 为子空间 A 的开集 $\Leftrightarrow$ 存在 X 的开集 G^* 使 $G=G^*\cap A$.

试分析下述证明是否正确，理由何在．

"$\Rightarrow$"　因为 G 为 A 的开集，又 $G\subset A\subset X$，所以 G 是 X 的开集(或详细一点，因 G 为 A

的开集．故$\forall\ x\in G\ \exists\ \varepsilon>0$ s. t. $B_\rho(x,\varepsilon)\subset G$，又$G\subset A\subset X$，所以$G$是$X$的开集）．于是只要取$G^*=G$就有$G=G\cap A=G^*\cap A$.

"$\Leftarrow$"　因为$G=G^*\cap A$，其中G^*是X的开集，A是子空间，所以A也是开集．故$G^*\cap A$是开集，并且$G=G^*\cap A\subset A$，从而G是A的开集．

分析　在必要性的证明中，在括号之外，把子空间A的开集与空间X的开集这两个概念混为一谈了，误认为既是"开集"（至于相对哪个空间而言，就不去理会了）又包含在X内，当然就是X的开集了。在括号内的错误则在于没有把子空间A中一点x在A内的球形邻域与x在X内的球形邻域区分开来，从而导致子空间的开集就是原空间的开集的错误结论．在充分性部分，错误在于把A在子空间A内是开集与A在X中是开集二者混为一谈了．事实上子空间中的子集S（包括$S=A$）如在子空间A内是开集，但S在X中却未必是开集．例如$[0,1)$作为E^1的子空间，依定义可验证$[0,1)$本身以及$[0,\frac{1}{2})$在子空间$[0,1)$内是开集，然而在E^1内却不是开集．

正确的证明如下：

首先在记号上，为了区分子空间A中一点x在子空间内的球形邻域与在原空间X内的球形邻域，应采用不同的记号表示，比如可分别用下述记号表示：

在子空间A中的球形邻域记为

$$B_A(x,\varepsilon)=\{y\in A\mid\rho(x,y)<\varepsilon\},$$

在原空间X中的球形邻域记为

$$B_X(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid\rho(x,y)<\varepsilon\}.$$

易见，当$x\in A$时，$B_A(x,\varepsilon)=B_X(x,\varepsilon)\cap A$.

现正式证明如下：

"$\Rightarrow$"　因G为A的开集，所以$\forall\ x\in G\ \exists\ \varepsilon_x>0$ s. t. $B_A(x,\varepsilon_x)\subset G$. 令

$$G^*=\bigcup_{x\in G}B_X(x,\varepsilon_x),$$

则G^*是X的开集，且

$$G=\bigcup_{x\in G}B_A(x,\varepsilon_x)=\bigcup_{x\in G}(B_X(x,\varepsilon_x)\cap A)=G^*\cap A.$$

"$\Leftarrow$"　假定$G=G^*\cap A$，其中G^*是X的开集，则$\forall\ x\in G\subset G^*\quad\exists\ \varepsilon>0$　s. t. $B_X(x,\varepsilon)\subset G^*$，于是

$$B_A(x,\varepsilon)=B_X(x,\varepsilon)\cap A\subset G^*\cap A=G,$$

所以G是A的开集．　□

这个例子告诉我们，对于概念的理解要清晰，不能含混．为了区分一些容易混淆的概念对所用的记号加上明确的标记也是必要的．不过在不会引起混淆时，也可省去一些标记（或词语），使符号或语言简洁明快．比如，我们常将ρ-开集简称开集，球形邻域有时也写为$B(x,\varepsilon)$等，又如在上述证明中，第一部分明确用ε_x表示ε与x有关，而第二部分虽然ε同样与x有关，但没有必要去区分，因此就可省略x，只用ε表示即可，以免繁琐累赘．读者在读书或自已解题中应适当注意．

C 练习题

1.1.1 判断如下定义的映射 $\rho_i: \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是否为 $\mathbf{R}$ 的度量，并说明理由：$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$

$$\rho_1(x,y)=|x-y|^2,\quad \rho_2(x,y)=|x^2-y^2|,$$
$$\rho_3(x,y)=|x^3-y^3|,\quad \rho_4(x,y)=|x^{1/3}-y^{1/3}|.$$

1.1.2 设 $B=\{\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\mid\forall\ n,x_n\in\mathbf{R},\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$有界$\}$，$\rho:B\times B\to\mathbf{R}$ 定义为：$\forall\ x=\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$，$y=\langle y_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\in B$

$$\rho(x,y)=\sup\{|x_n-y_n|\mid n\in\mathbf{N}\}$$

证明 ρ 是 B 的度量．我们称$\langle B,\rho\rangle$为有界序列空间．

若 $C=\{\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}\mid\forall\ n,x_n\in\mathbf{R},\langle x_n\rangle_{n\in\mathbf{N}}$收敛$\}$，则 $C\subset B$，称子空间 C 为收敛序列空间．

1.1.3 判断下列 E^2 的子集是否为开集：

$$A=\{\langle x,y\rangle\mid xy\neq 1\},\qquad B=\{\langle x,y\rangle\mid |x|<1,|y|\leqslant 1\},$$
$$C=\{\langle x,y\rangle\mid x^2+y^2>1\},\quad D=\{\langle x,y\rangle\mid y=x^2\}.$$

1.1.4 设 $S=[-1,1]$是 E^1 的子空间，判定下列集合中哪些是 S 的开集，哪些是 E^1 的开集，哪些两者都不是．

$$A=\left\{x\in S\,\middle|\,\frac{1}{2}<|x|<1\right\},\quad B=\left\{x\in S\,\middle|\,\frac{1}{2}<|x|\leqslant 1\right\},$$
$$C=\left\{x\in S\,\middle|\,\frac{1}{2}<|x|<\frac{3}{2}\right\},\quad D=\left\{x\in S\,\middle|\,0<|x|\leqslant\frac{3}{2}\right\},$$
$$E=\left\{x\in S\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant|x|<1\right\},\quad F=\left\{x\in S\,\middle|\,0\leqslant|x|<\frac{3}{2}\right\},$$
$$G=\left\{x\in S\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 1\right\},\quad H=\left\{x\in S\,\middle|\,0<|x|<1,\text{且}\frac{1}{x}\notin\mathbf{N}\right\}.$$

1.1.5 设 X 为非空集，定义 $d: X\times X\to\mathbf{R}$ 为

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y,\end{cases}$$

易见 d 是 X 的度量，称之为离散度量，证明离散度量空间$\langle X,d\rangle$中每个子集都是开集．

1.1.6 设 A,B 为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的非空子集，证明

$$\rho(A,B)=\inf_{x\in A}\rho(x,B)=\inf_{y\in B}\rho(y,A).$$

1.1.7 设 A,B 为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的非空子集，$x,y\in X$，证明

(1) $\rho(x,A)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,A)$，

(2) $\rho(A,B)\leqslant\rho(x,A)+\rho(x,B)$.

1.1.8 设 A 为度量空间$\langle X,\rho\rangle$的非空子集，$\varepsilon>0$，令

$$B_\rho(A,\varepsilon)=\{y\in X\mid\rho(y,A)<\varepsilon\},$$

证明

(1) $B_\rho(A,\varepsilon)=\bigcup_{x\in A}B_\rho(x,\varepsilon)$.

(2) 设关系 $r_\varepsilon=\{\langle x,y\rangle\in X\times X\mid\rho(x,y)<\varepsilon\}$，则 A 在 r_ε 下的值域

$$r_\varepsilon(A) \xlongequal{\text{def}} \{y \in X \mid \exists\ x \in A \text{ s.t. } \langle x,y\rangle \in r_\varepsilon\} = B_\rho(A,\varepsilon).$$

1.1.9 判断B1.1.3中 $\mathbf{R}$ 的度量 ρ_1,ρ_2，与 $\mathbf{R}$ 的通常度量即欧氏度量(记为 ρ)是否等价，若不等价，则进而判断它们诱导的拓扑是否可比较，给出证明或举反例.

§1.2 拓扑空间的基本概念

A 内容提要

1.2.1 定义 X 为非空集，$\tau\subset\mathscr{P}(X)$ 满足开集公理：

[0.1] $\varnothing, X\in\tau$,

[0.2] $G_1,G_2\in\tau\Rightarrow G_1\cap G_2\in\tau$,

[0.3] $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\tau\Rightarrow\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\in\tau$.

则称 τ 为 X 的拓扑，$\langle X,\tau\rangle$ 为拓扑空间，τ 的每个成员叫 X 的开集，开集的补集叫闭集，全体闭集组成的集族叫余拓扑. $\tau=\{\varnothing,X\}$ 叫平凡拓扑，$\tau=\mathscr{P}(X)$ 叫离散拓扑.

1.2.2 定理 拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的余拓扑 $\sigma=\{F\subset X\mid\mathscr{C}F\in\tau\}$ 满足下述闭集公理：

[C.1] $\varnothing, X\in\sigma$,

[C.2] $F_1,F_2\in\sigma\Rightarrow F_1\cup F_2\in\sigma$,

[C.3] $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\sigma\Rightarrow\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\in\sigma$.

1.2.3 定义 设 $\langle X,\tau\rangle$ 为拓扑空间，$A\subset X, x\in X$.

(1) X 的子集 U 叫做点 x 的邻域 $\Leftrightarrow\exists\ G\in\tau$ s.t. $x\in G\subset U$. x 的全体邻域构成的集族叫做 x 的邻域系，记作 $\mathscr{N}(x)$ 或 $\mathscr{N}_X(x)$, $\mathscr{N}_\tau(x)$. $\mathscr{N}(x)\cap\tau$ 的成员叫做 x 的开邻域.

(2) x 叫做 A 的内点 $\Leftrightarrow\exists\ U\in\mathscr{N}(x)$ s.t. $x\in U\subset A$. A 的全体内点组成的集叫做 A 的内部，记作 $\mathring{A}$ 或Int A, $\mathrm{Int}_X A$, $\mathrm{Int}_\tau A$.

(3) x 叫做 A 的接触点 $\Leftrightarrow\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$, $U\cap A\neq\varnothing$. A 的全体接触点组成的集合叫做 A 的闭包，记作 $\overline{A}$ 或 $\mathrm{Cl}A$, $\mathrm{Cl}_X A$. $\mathrm{Cl}_\tau A$.

(4) x 叫做 A 的边界点 $\Leftrightarrow\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$, $U\cap A\neq\varnothing$ 且 $U\cap\mathscr{C}A\neq\varnothing$. A 的全体边界点组成的集合叫做 A 的边界，记成 $\mathrm{Bd}A$ 或 $\mathrm{Bd}_X A$, $\mathrm{Bd}_\tau A$.

(5) x 叫做 A 的聚点 $\Leftrightarrow\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$, $U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$. A 的全体聚点组成的集合叫做 A 的导集，记成 A'.

易见上述(2)－(5)的陈述中，把 $U\in\mathscr{N}(x)$ 换成 $U\in\mathscr{N}(x)\cap\tau$ 是等价的.

1.2.4 定理 设 (X,τ) 为拓扑空间，则邻域系的全体 $\{\mathscr{N}(x)\mid x\in X\}$ 满足下述邻域公理：

[N.1] $\forall\ x\in X$, $\mathscr{N}(x)\neq\varnothing$, $\forall\ U\in\mathscr{N}(x)$, $x\in U$.

[N.2] $U\in\mathscr{N}(x)$ 且 $U\subset V\Rightarrow V\in\mathscr{N}(x)$