

重力觀測解釋

O. A. 什万克 E. H. 柳斯齐赫 著

地质出版社

重力觀測解釋

解重力勘探正演和反演問題的理論和實踐

O. A. 什万克和 E. H. 柳斯齐赫著

龔陶譯 馬恩澤校

地質出版社

1959 • 北京

Министерство нефтяной промышленности восточных районов
государственный союзный геофизический трест (ГСГТ)
научно-исследовательский институт
прикладной геофизики (НИИПГ)

О. А. 什万克 和 Е. Н. 柳斯齐赫

Интерпретация
гравитационных
наблюдений

Теория и практика решения прямой и обратной
задачи гравиметрической разведки
под редакцией

проф. Л. В. Сорокина

государственное научно-техническое издательство
нефтяной и горно-топливной литературы

Москва 1947 Ленинград

本書介紹在重力勘探中对观测資料进行定量解釋的原理和方法，
并对在解釋中常遇到的各种几何形体以及單層和多層的正演和反演問
題作了詳細的討論。

本書可作为从事地球物理勘探工作的工程师和技术員的良好参考
資料，也可作为工業大学地球物理勘探專業的教學參考用書。

譯者龔陶，校者馬恩澤。

重力观测解釋

著者： О. А. 什万克 Е. Н. 柳斯齐赫

陶

出版者： 地 質 出 版 社

北京宣武門外永光寺西街3号

北京市書刊出版圖書審計登記證出字第050号

發行者： 新 華 書 店

印刷者： 錦 州 印 刷 厂

印数(京) 1—2700册 1959年6月北京第1版

开本 787×1092 1/32 1959年6月第1次印刷

字数 430000

印張 19 1/2 插頁 2

定价(10) 2.60元

目 录

原序.....	7
---------	---

第 一 篇

重力正演問題的解法

第一章 基本公式 O. A. 什万克	8
§ 1. 在直角坐标系中的基本公式	8
§ 2. 在直角坐标系中的二度体的基本公式	10
§ 3. 在其他坐标系中的基本公式	13
§ 4. 在其他坐标系中的二度体的基本公式	16
第二章 簡体重力正演問題的解法 O. A. 什万克	19
A. 有限体	
§ 1. 点質量	19
§ 2. 球体	21
§ 3. 有限直綫	24
§ 4. 有限水平平面帶	26
§ 5. 各边平行于坐标軸的長方体	27
§ 6. 扁球体	34
B. 二度体	
§ 7. 綫質量	35
§ 8. 圓柱体	36
§ 9. 半平面	39
§ 10. 無限伸延層	45
§ 11. 組合半平面	63
§ 12. 組合無限伸延層	67
§ 13. 密度不均勻的無限伸延層	78
§ 14. 橢圓柱体	80
第三章 單層界面或多層界面时的重力正演問題的解法 O. A. 什万克	82
第四章 重力正演問題的近似解法 O. A. 什万克	94

A. 表 and 圖表

§ 1. 在各坐标系中用来计算表和图表的公式在对 ρ 积分后的形式	94
§ 2. 略论求函数 A, B, C, D 的一般方法	113
§ 3. 表和图表在圆柱坐标系中的作法	116
§ 4. 图表在球坐标系中的作法	151
§ 5. 图表在圆锥坐标系中的作法	158
§ 6. 图表在圆锥、圆柱坐标系中的作法	160
§ 7. 图表在直角坐标系中的作法	164
B. 二度体重力正演问题近似解法中的表和图表	
§ 8. 略论计算二度体的作用的图表	170
§ 9. 图表在直角坐标系中的作法	172
§ 10. 图表在跟空间球坐标系相当的极坐标系中的作法	176
§ 11. 图表在跟空间圆锥及圆锥、圆柱坐标系相当的坐标系中的作法	180
C. 解重力正演问题的面积测定法	
§ 12. 解重力正演问题的面积测定法	183
第五章 重力积分仪 E. H. 柳思齐译	186
A. 一般原理	
§ 1. 测轮	186
§ 2. 计数器	190
§ 3. 对围线的积分	190
B. 三度体的积分仪	
§ 4. 马尔金积分仪	193
§ 5. 立体角积分仪	202
§ 6. 梯度积分仪	210
§ 7. 曲率积分仪	221
§ 8. 阿斯卡尼亚-维克求积仪	223
§ 9. 费定斯基光积分仪及其他仪器	224
B. 二度体积分仪	
§ 10. 求 V_z 和 V_x 的汉堡尔差夫积分仪	226
§ 11. 复重力仪	231
§ 12. 求二次导数的汉堡尔差夫积分仪	232
§ 13. 阿斯卡尼亚-维克求积仪	237
§ 14. 席维达尔积分仪	246

§ 15. 光电积分仪.....	247
------------------	-----

第 二 篇

重力反演問題的解法

第六章 任意形体的質量及重心坐标的确定 O. A. 什万克	248
§ 1. 三度体的質量及重心坐标的确定	248
§ 2. 二度体的綫密度及橫截面的重心坐标的确定	253
§ 3. 决定体質量时的精确度。由無限积分轉为有限积分时的校正	257
第七章 簡体重力反演問題的解法 O. A. 什万克	265
§ 1. 球体	265
§ 2. 圓柱体	269
§ 3. 半平面	272
§ 4. 無限伸延的層和背斜層。根据每一条曲綫 V_{xz} 和 V_{Δ} 上的特征点 来解問題	282
§ 5. 無限伸延層。根据曲綫 V_{xz} 和 V_{Δ} 上的某些特征点的組合 来解問題	325
§ 6. 無限伸延層。根据限制在曲綫 $ax^k V_{xz} b, cx^l V_{\Delta} + d$ 和 x 軸中間的 面积来解問題	341
§ 7. 無限伸延的層和背斜層。根据对曲綫 V_{xz} 和 V_{Δ} 在形狀上的綜合 研究来解問題	348
§ 8. 水平的面断層	356
§ 9. 水平的板狀断層	361
§ 10. 水平平面帶	369
§ 11. 截面为矩形的物体	374
§ 12. 截面为等腰三角形的物体	389
§ 13. 焦綫为水平的橢圓柱体	397
第八章 單層界面或多層界面时的重力反演問題的解法	401
§ 1. 由曲綫 V_{xz} 和 V_{Δ} 求二度体的解	401
§ 2. 由曲綫 V_z 求二度体的解	439
§ 3. 由值 V_{xz} 和 V_z 求三度体的解	454
§ 4. 有兩個接触面时的解	474
第九章 重力反演問題中的选择解法 O. A. 什万克	477
参考文献目录	479
所用的縮写	480

解在重力觀測解釋中 的重力正演及反演問題

原 序

所謂重力測量正演勘探問題的意思，是指根据已知体求出重力場的各項分量；而所謂重力測量反演問題的意思，則是指根据已知重力場来确定物体的形狀和位置。以后为簡短起見，將用重力正演或反演問題的名称来代替重力測量勘探正演或反演問題的名称。

本書不打算全面研究有关重力正演或反演問題的各个方面；而只打算研究在重力觀測解釋中，对解重力正演或反演問題是直接有关的那些方面。

在某平面上各点处的牛頓重力位的导数的場，跟造成这个場的質体有一定的关系，本書的任务就是要建立起这种关系。

凡所遇見的直角坐标系，除事先作过特別声明的以外， z 軸总是向下， x 軸总是位于圖形所在的平面內由左向右； y 軸总是垂直于圖形的平面指向讀者。要确定重力位导数的那一点的坐标通常用 x, y, z 表示；但形成重力場的物体上的点的坐标則用 ξ, η, ζ 表示。

本書是在假定讀者已經通曉重力位的基本知識这一基础上写成的。

第 一 篇

重力正演問題的解法

第一章 基本公式

§ 1. 在直角坐标系中的基本公式

我們知道，如果有某一物体 C ；則在物体外一点 $P(x, y, z)$ 的牛頓重力位的值由下式确定：

$$V = f \int_C \frac{\delta d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}}, \quad (I, 1, 1)$$

式中的积分应遍及整个体积 C 。字母 δ 表示物体的密度； f 表示引力常数，为 66.7×10^{-9} 厘米-克-秒單位。

在厘米-克-秒單位制中， f 的單位为 厘米³/克-秒²， δ 的單位为 克/厘米³，故 V 的單位应为 厘米²/秒²。

一般說来，密度 δ 是积分变量 ξ, η, ζ 的函数。但在以后我們常認為物体是均匀的，即物体的密度在每一点都相同。在这种情况下，就可以把 δ 从式 (I, 1, 1) 中的积分号里提出来。

我們知道，实际上在野外測量中所使用的重力測量法，并不是測量的重力位本身，而是測量的重力位的一次和二次导数，以及由这些导数所合成的某些值。而通常所要測的一些量則是：

$$\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}, \quad 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

此外，有时还要考虑跟鉛垂綫傾斜有关系的量 $\frac{\partial V}{\partial x}$ ， $\frac{\partial V}{\partial y}$ 。所以我們將要提出来进行研究的問題，也正就是跟这些重力位导数有关的問題。

为了写起来簡單一些，引入了以下的一些符号：

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = V_y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = V_z, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = V_{xz}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = V_{yz},$$

$$2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 2V_{xy}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V_{\Delta}. \quad (I, 1, 2)$$

直接微分等式(I, 1, 1), 不难得到計算所有这些导数的公式。

也就是將有:

$$V_x = f \int \frac{\delta(\xi - x) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}},$$

$$V_y = f \int \frac{\delta(\eta - y) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}},$$

$$V_z = f \int \frac{\delta(\zeta - z) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}},$$

$$V_{xz} = 3f \int \frac{\delta(\xi - x)(\zeta - z) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{5/2}},$$

$$V_{\Delta} = 3f \int \frac{\delta(\eta - y)(\zeta - z) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{5/2}}, \quad (I, 1, 3)$$

$$2V_{xy} = 6f \int \frac{\delta[(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2] d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{5/2}},$$

$$2V_{xy} = 6f \int \frac{\delta(\xi - x)(\eta - y) d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{5/2}}.$$

在公式(I, 1, 3)中的积分应遍及物体的整个体积。因为 V 的單位是厘米²/秒², 所以显然 V_x, V_y, V_z 的單位就是厘米/秒². 而 $V_{xz}, V_{yz}, V_{\Delta}$ 的單位是 1/秒².

在式(I, 1, 3)中, 令 $x=y=z=0$, 即得对坐标原点的公式。

公式(I, 1, 1)及(I, 1, 3)仅适用于求体积位。如要得到由面質量所形成的重力位公式; 应將各处表示微体积的式子 $\delta \xi d\eta d\zeta = dv$ 改成微面积 dq , 將体积分改成面积分。这时 δ 所代表的也就不是体密度而应是面密度了。同样如要从体質量的重力位公式推出綫質量的

公式，則應將各處的微體積改成微綫段 ds ，將體積分改成綫積分。這時 δ 所代表的也就不是體密度，而應是綫密度了，最後，如要從體質量推出對質點的公式，就應將各處的積分符號取消，將微體積改成 1，將密度改成集中於該點的質量。

2. 在直角坐標系中的二度體的基本公式

封閉的或不封閉的柱面體叫做二度體。二度體具有以下性質：

- (a) 物體所有平行的橫截面都相同，
- (b) 物體沿母綫方向向兩端無限延長。

顯然，這時物體的垂直於母綫的橫截面就完全確定了物體的形狀。所以一切二度體，全都可由某一平面圖形來確定。由此我們就叫這樣的物體為二度體。

以後凡提到二度體的橫截面，都指的是垂直於母綫方向的截面。通常都令軸 y 平行於母綫。

如果把對二度體的三重積分換成二重積分，還可將公式 (I, 1, 3) 簡化一下。也就是說我們可先對 η 從 $-\infty$ 到 $+\infty$ 進行積分，並且假定密度 δ 跟 η 無關。

先從 η_1 到 η_2 進行積分。

顯然為了對公式 (I, 1, 3) 中的 η 進行積分，只需取以下積分便可以了：

$$I_1 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2]^{3/2}},$$

$$I_2 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{(\eta-y)d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2]^{3/2}},$$

$$I_3 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2]^{5/2}}, \quad (I, 2, P)$$

$$I_4 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{(\eta - y) d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{5/2}},$$

$$I_5 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{[(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2] d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{5/2}}.$$

上式中最后的一个积分可以用在它前面的几个积分来表示。

改变上式，將公式中的分子加減一个量

$$(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2,$$

可得

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \frac{2(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 - [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{5/2}} d\eta \\ &= \int \left\{ \frac{2(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{5/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} \right\} d\eta. \end{aligned}$$

于是

$$I_5 = [2(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] I_3 - I_1. \quad (\text{I}, 2, 2)$$

根据(I, 2, 1), (I, 2, 2), 经过一系列的簡單积分后求得:

$$I_1 = \frac{1}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \left\{ \frac{\eta_2 - y}{[(\xi - x)^2 + (\eta_2 - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}} - \frac{\eta_1 - y}{[(\xi - x)^2 + (\eta_1 - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}} \right\},$$

$$I_2 = - \left\{ \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\eta_2 - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\eta_1 - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}} \right\},$$

$$I_3 = \frac{1}{3[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2}.$$

$$\left\{ \frac{2(\eta_2 - y)^3 + 3[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2](\eta_2 - y)}{[(\xi - x)^2 + (\eta_2 - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} - \frac{2(\eta_1 - y)^3 + 3[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2](\eta_1 - y)}{[(\xi - x)^2 + (\eta_1 - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} \right\}, \quad (I, 2, 3)$$

$$I_4 = -\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\eta_2 - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\eta_1 - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} \right\},$$

$$I_5 = \frac{2(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}{3[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2}$$

$$\left\{ \frac{2(\eta_2 - y)^3 + 3(\eta_2 - y)[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]}{[(\xi - x)^2 + (\eta_2 - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} - \frac{2(\eta_1 - y)^3 + 3(\eta_1 - y)[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]}{[(\xi - x)^2 + (\eta_1 - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} \right\} \\ - \frac{1}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \left\{ \frac{\eta_2 - y}{[(\xi - x)^2 + (\eta_2 - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}} - \frac{\eta_1 - y}{[(\xi - x)^2 + (\eta_1 - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}} \right\}.$$

現在設 η_2 趨于 $+\infty$ ，而 η_1 趨于 $-\infty$ 。在 $\eta_1 \rightarrow -\infty$ 而 $\eta_2 \rightarrow +\infty$ 時， I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 的值分別用 $I'_1, I'_2, I'_3, I'_4, I'_5$ 來表示。從式(I, 2, 3)得：

$$I'_1 = \frac{2}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2},$$

$$I'_2 = 0,$$

$$I'_3 = \frac{4}{3} \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2}, \quad (I, 2, 4)$$

$$I'_4 = 0,$$

$$I'_0 = \frac{2}{3} \frac{(\xi-x)^2 - (\zeta-z)^2}{[(\xi-x)^2 + (\zeta-z)^2]^2}.$$

根据(I, 1, 3), (I, 2, 1), (I, 2, 4)对二度体将有:

$$V_x = 2f \int \frac{\delta(\xi-x)d\xi d\zeta}{(\xi-x)^2 + (\zeta-z)^2}, \quad V_z = 2f \int \frac{\delta(\zeta-z)d\xi d\zeta}{(\xi-x)^2 + (\zeta-z)^2}$$

$$V_{xz} = 2f \int \frac{2\delta[(\xi-x)(\zeta-z)d\xi d\zeta]}{[(\xi-x)^2 + (\zeta-z)^2]^2}, \quad (\text{I}, 2, 5)$$

$$V_\Delta = 2f \int \frac{\delta[(\xi-x)^2 - (\zeta-z)^2]d\xi d\zeta}{[(\xi-x)^2 + (\zeta-z)^2]^2},$$

$$V_y = V_{yz} = 2V_{xy} = 0.$$

为了从式(I, 2, 5)转换成相当于面物体及綫物体的公式, 应在式(I, 2, 5)中引入以下的变换。当要得到分佈在柱面上并且母綫平行于 y 軸的面質量的公式, 就應該:

- (1) 用微綫段 ds 代替微面积 $d\xi d\zeta = d\sigma$;
- (2) 把面积分改成綫积分;
- (3) 把本来代替体密度的 δ 用面密度来代替。

当要得到分佈在直綫上并且平行于 y 軸的綫質量的公式, 就應該:

- (1) 用單位量度来代替微面积;
- (2) 除去积分号;
- (3) 把本来代替体密度的 δ 用綫密度来代替。

§ 3. 在其他坐标系中的基本公式

很明显, 如果我們所取的一些直角坐标系, 彼此間的坐标軸都相互平行, 那末在空間某一点的重力位以及这些重力位的导数, 就都跟所取的坐标系無关了。因此我們总是可以把任一已知点看作是坐标的原点, 并应用相当于这情况下的公式来計算未知的重力位导数。但是今后我們將知道, 在研究重力反演問題时, 常須把所研究的重力位导数看作是地表上各点坐标的函数; 因此我們不把公式的結論局限于坐

标原点，而采用普遍的形式把它们表示出来。

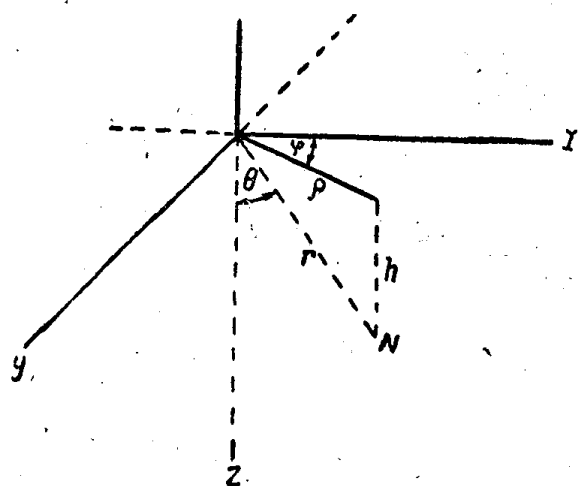


圖 1

对以下所給出的在不同坐标系中的一些基本公式，我們总是假設要計算导数的点位置在坐标原点。

給定某一点 N 。考虑引入以下的量： h （相当于 z ）； ρ ——从 N 点在面 xoy 上的投影到坐标原点的距离； r —— N 点到原点的距离； θ ——軸 z 跟原点及 N 点連線間的夾角， φ ——軸 x 跟原点及 N 点連線在面 xoy 上的投影間的夾角，应順着軸 x 到軸 z 为 $\frac{\pi}{2}$ 角的方向起始計算。显然， $h = \text{常数}$ 时，是跟面 xoy 平行的平面； $\rho = \text{常数}$ 时，是軸綫跟 z 軸重合的圓柱面； $r = \text{常数}$ 时，是球心在原点的球面； $\theta = \text{常数}$ 时，是軸綫跟 z 軸重合的圓錐面； $\varphi = \text{常数}$ 时，是以軸 z 为公共直綫的半平面。如果我們把 $h, \rho, r, \theta, \varphi$ 作不同的組合，就会得到不同的坐标系。例如：圓柱坐标系 (h, ρ, φ) ，球坐标系 (r, θ, φ) ，圓錐坐标系 (h, θ, φ) 及圓錐-圓柱坐标系 (ρ, θ, φ) 。

由圖(1)立知換算公式会有以下的形式。

在圓柱坐标系中

$$\xi = \rho \cos \varphi, \eta = \rho \sin \varphi, \zeta = h, d\xi d\eta d\zeta = \rho dh d\rho d\varphi;$$

在球面坐标系中

$$\xi = r \sin \theta \cos \varphi, \eta = r \sin \theta \sin \varphi, \zeta = r \cos \theta, d\xi d\eta d\zeta = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi;$$

在圓錐坐标系中

$$\xi = h \operatorname{tg} \theta \cos \varphi, \eta = h \operatorname{tg} \theta \sin \varphi,$$

$$\zeta = h, d\xi d\eta d\zeta = \left| h^2 \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right| dh d\theta d\varphi;$$

在圓錐-圓柱坐标系中

$$\xi = \rho \cos \varphi, \eta = \rho \sin \varphi, \zeta = \rho \operatorname{ctg} \theta, d\xi d\eta d\zeta = \frac{\rho^2}{\sin^2 \theta} d\rho d\theta d\varphi$$

在公式(I, 1, 3)中, 令 $x=y=z=0$, 經相当的换算后, 就知道对所有上述 4 个坐标系, 公式(I, 1, 3)的形式为:

$$V_x = \delta \int D \cos \varphi d\varphi,$$

$$V_y = \delta \int D \sin \varphi d\varphi,$$

$$V_z = \delta \int E d\varphi,$$

$$V_{xz} = \delta \int B \cos \varphi d\varphi,$$

$$V_{yz} = \delta \int B \sin \varphi d\varphi, \quad (\text{I}, 3, 1)$$

$$V_\Delta = \delta \int A \cos^2 \varphi d\varphi,$$

$$2V_{xy} = \delta \int A \sin^2 \varphi d\varphi,$$

其中对于圆柱坐标系有

$$D_1 = f \int \frac{\rho^2 dh d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}}, \quad C_1 = f \int \frac{\rho h dh d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}}, \quad (\text{I}, 3, 2)$$

$$B_1 = 3f \int \frac{\rho^2 h dh d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}}, \quad A_1 = 3f \int \frac{\rho^3 dh d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{5/2}};$$

对于球坐标系有

$$D_2 = f \int \sin^2 \theta dr d\theta, \quad C_2 = f \int \sin \theta \cos \theta dr d\theta, \quad (\text{I}, 3, 3)$$

$$B_2 = 3f \int \frac{1}{r} \sin^2 \theta \cos \theta dr d\theta, \quad A_2 = 3f \int \frac{1}{r} \sin^3 \theta dr d\theta,$$

对于圆锥坐标系有

$$D_3 = f \int \sin \theta |\operatorname{tg} \theta| dh d\theta, \quad C_3 = f \int (\sinh) \operatorname{sig} \theta dh d\theta, \quad (\text{I}, 3, 4)$$

$$B_3 = 3f \int \frac{1}{|h|} \sin^2 \theta \cos \theta dh d\theta, \quad A_3 = 3f \int \frac{1}{|h|} \sin^3 \theta dh d\theta;$$

对于圓錐——圓柱坐标系有

$$D_4 = f \int \sin \theta d\rho d\theta, \quad C_4 = f \int \cos \theta d\rho d\theta,$$

$$B_4 = 3f \int \frac{1}{\rho} \sin^2 \theta \cos \theta d\rho d\theta, \quad A_4 = 3f \int \frac{1}{\rho} \sin^3 \theta d\rho d\theta.$$

(I, 3, 5)

§ 4. 在其他坐标系中的二度体的基本公式

在 § 2 中曾經說過，計算二度体的重力位导数时，須要用到二重积分。因此在本段中有必要提出某些在平面上的坐标系。

§ 3 中所說的所有坐标系，都有一个共同的性質。取其中任何一个来看：不論用什么方法，总可以在某一坐标等于不同的常数值时，引一平面通过軸 z ，这时所得到的截面圖形总是相同的。如果令某一平面坐标系的坐标等于不同的常数值而仍能得到相同的圖形，那末我們就說这平面坐标系跟所給定的空間坐标系相当。显然跟圓柱坐标系相当的平面坐标系，不是別的东西，就是通常的平面直角坐标系。因此可以不必再去考虑它了。現在只討論跟球坐标系、圓錐坐标系及圓錐——圓柱坐标系相对应的平面坐标系。

为了这个目的，考虑引入以下的量：

r ——从原点到平面上任一点 N 的距离；

h ——可認為相当于 z ；

ρ ——可認為相当于 x ；

θ ——軸 z 跟原点及 N 点連線間的夾角，逆时針从軸 z 的正向起始計算。

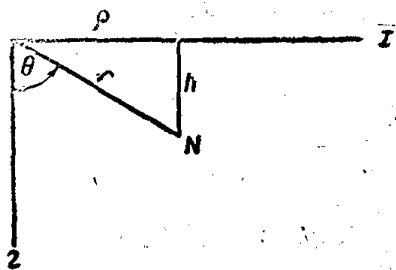


圖 2

显見， r 等于常数时，是以原点为中心的圓； h 及 ρ 都为常数时，是平行于軸 x 及軸 z 的直綫； θ 为常数时，是穿过坐标原点的直綫。

由圖 2 很易証明換算公式將有以下形式。平面坐标系，如相当于球坐标系有：