重力観測解释

O. A. 什万克　E. H. 柳斯齐赫　著

地质出版社

重力观測解釋

解重力勘探正演和反演問題的理論和实踐

O. A. 什万克和　E. H. 柳斯齐赫著

[redacted]陶譯　馬恩澤校

地质出版社

1959·北 京

Министерство нефтяной промышленности восточных районов
государственный союзный геофизический трест (ГСГТ)
научно-исследовательский институт
прикладной геофизики (НИИПГ)

О. А. 什万克 和 Е. Н. 柳斯齐赫

Интерпретачия
гравитационных
наблюдений

Теория и практика решения прямой и обратной
задачи гравиметрической разведки
под редакцией
проф. Л. В. Сорокина

государственное научно-техническое издательство
нефтяной и горно-топливной литературы
Москва 1947 Ленинград

本書介紹在重力勘探中对观测資料进行定量解釋的原理和方法，并对在解釋中常遇到的各种几何形体以及單層和多層的正演和反演問題作了詳細的討論。

本書可作为从事地球物理勘探工作的工程师和技术員的良好参考資料，也可作为工業大学地球物理勘探專業的教学参考用書。

譯者龔陶，校者馬恩澤。

重力观測解釋

著者： O.A.什万克 E.H.柳斯齐赫
陶

出版者： 地質出版社
北京宣武門外永光寺西街3号
北京市書刊出版業营業許可証出字第050号

發行者： 新华書店
印刷者： 錦州印刷厂

印数（京）1—2700册　1959年6月北京第1版
开本 787×1092 $\frac{1}{32}$　1959年6月第1次印刷
字数 430000　印張19$\frac{2}{25}$　插頁 2
定价（10）2.60元

目 录

第一篇

重力正演問題的解法

第 二 篇
重力反演問題的解法

解在重力观測解釋中的重力正演及反演問題

原　序

所謂重力測量正演勘探問題的意思，是指根据已知体求出重力場的各項分量；而所謂重力測量反演問題的意思，則是指根据已知重力場来确定物体的形狀和位置。以后为簡短起見，將用重力正演或反演問題的名称来代替重力測量勘探正演或反演問題的名称。

本書不打算全面研究有关重力正演或反演問題的各个方面；而只打算研究在重力观測解釋中，对解重力正演或反演問題是直接有关的那些方面。

在某平面上各点处的牛頓重力位的导数的場，跟造成这个場的實体有一定的关系，本書的任务就是要建立起这种关系。

凡所遇見的直角坐标系，除事先作过特别声明的以外，z 軸总是向下，x 軸总是位于圖形所在的平面內由左向右；y 軸总是垂直于圖形的平面指向讀者。要确定重力位导数的那一点的坐标通常用 x, y, z 表示；但形成重力場的物体上的点的坐标則用 ξ, η, ζ 表示。

本書是在假定讀者已經通曉重力位的基本知識这一基础上写成的。

第一篇
重力正演問題的解法

第一章 基本公式

§1. 在直角坐标系中的基本公式

我們知道，如果有某一物体 C，則在物体外一点 $P(x,y,z)$ 的牛頓重力位的值由下式确定：

$$V=f\int_C \frac{\delta d\xi d\eta d\zeta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right]^{1/2}}, \qquad (\mathrm{I},1,1)$$

式中的积分应遍及整个体积 C。字母 δ 表示物体的密度；f 表示引力常数，为 66.7×10^{-9} 厘米-克-秒單位。

在厘米-克-秒單位制中，f 的單位为厘米^3/克-秒^2，δ 的單位为克/厘米^3，故 V 的單位应为厘米^2/秒^2。

一般說来，密度 δ 是积分变量 ξ,η,ζ 的函数。但在以后我們常認为物体是均匀的，即物体的密度在每一点都相同。在这种情况下，就可以把 δ 从式(Ⅰ,1,1)中的积分号里提出来。

我們知道，实际上在野外測量中所使用的重力測量法，并不是測量的重力位本身；而是測量的重力位的一次和二次导数，以及由这些导数所合成的某些值。而通常所要測的一些量則是：

$$\frac{\partial V}{\partial z},\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z},\ \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z},\ 2\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

此外，有时还要考慮跟鉛垂綫傾斜有关系的量 $\frac{\partial V}{\partial x}$，$\frac{\partial V}{\partial y}$。所以我們將要提出来进行研究的問題，也正就是跟这些重力位导数有关的問題。

为了写起来簡單一些，引入了以下的一些符号：

$$\frac{\partial V}{\partial x}=V_x,\quad \frac{\partial V}{\partial y}=V_y,\quad \frac{\partial V}{\partial z}=V_z,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}=V_{xz},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}=V_{yz},$$

$$2\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=2V_{xy},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=V_\Delta. \qquad (\mathrm{I},1,2)$$

直接微分等式(Ⅰ,1,1)，不难得到計算所有这些导数的公式。也就是將有：

$$V_x=f\int\frac{\delta(\xi-x)d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}},$$

$$V_y=f\int\frac{\delta(\eta-y)d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}},$$

$$V_z=f\int\frac{\delta(\zeta-z)d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}},$$

$$V_{xz}=3f\int\frac{\delta(\xi-x)(\zeta-z)d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{5/2}},$$

$$V_\Delta=3f\int\frac{\delta(\eta-y)(\zeta-z)d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{5/2}}, \qquad (\mathrm{I},1,3)$$

$$2V_{xy}=6f\int\frac{\delta[(\xi-x)^2-(\eta-y)^2]d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{5/2}},$$

$$2V_{xy}=6f\int\frac{\delta(\xi-x)(\eta-y)d\xi d\eta d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{5/2}}.$$

在公式(Ⅰ,1,3)中的积分应遍及物体的整个体积。因为 V 的單位是厘米^2/秒^2，所以显然 V_x, V_y, V_z 的單位就是厘米/秒^2. 而 V_{xz}, V_{yz}, V_Δ 的單位是 1/秒^2。

在式(Ⅰ,1,3)中，令 $x=y=z=0$，即得对坐标原点的公式。

公式(Ⅰ,1,1)及(Ⅰ,1,3)仅适用于求体积位。如要得到由面質量所形成的重力位公式；应將各处表示微体积的式子 $d\xi d\eta d\zeta=d\tau$ 改成微面积 dq，將体积分改成面积分。这时 δ 所代表的也就不是体密度而应是面密度了。同样如要从体質量的重力位公式推出綫質量的

公式，則应將各处的微体积改成微綫段 ds，將体积分改成綫积分。这时 δ 所代表的也就不是体密度，而应是綫密度了，最后，如要从体質量推出对質点的公式，就应將各处的积分符号取消，將微体积改成1，將密度改成集中于該点的質量。

§2. 在直角坐标系中的二度体的基本公式

封閉的或不封閉的柱面体叫做二度体。二度体具有以下的性質：

(a) 物体所有平行的横截面都相同，

(b) 物体沿母綫方向向兩端無限延長。

显然，这时物体的垂直于母綫的横截面就完全确定了物体的形狀。所以一切二度体，全都可由某一平面圖形来确定。由此我們就叫这样的物体为二度体。

以后凡提到二度体的横截面，都指的是垂直于母綫方向的截面。通常都令軸 y 平行于母綫。

如果把对二度体的三重积分换成二重积分，还可將公式(Ⅰ,1,3)簡化一下。也就是說我們可先对 η 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 进行积分，并且假定密度 δ 跟 η 無关。

先从 η_1 到 η_2 进行积分。

显然为了对公式(Ⅰ,1,3)中的 η 进行积分，只需取以下积分便可以了：

$$I_1=\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{d\eta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}},$$

$$I_2=\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{(\eta-y)d\eta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}},$$

$$I_3=\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{d\eta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{5/2}},\qquad(\text{Ⅰ},2,1)$$

$$I_4=\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{(\eta-y)d\eta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{5/2}},$$

$$I_5=\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{[(\xi-x)^2-(\eta-y)^2]d\eta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{5/2}}.$$

上式中最后的一个积分可以用在它前面的几个积分来表示。

改变上式，將公式中的分子加减一个量

$$(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2,$$

可得

$$I_5=\int\frac{2(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2-[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{5/2}}d\eta$$

$$=\int\left\{\frac{2(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{5/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}}\right\}d\eta.$$

于是

$$I_5=[2(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2]I_3-I_1. \qquad (\text{I},2,2)$$

根据(I,2,1)，(I,2,2)，經过一系列的簡單积分后求得:

$$I_1=\frac{1}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}\left\{\frac{\eta_2-y}{[(\xi-x)^2+(\eta_2-y)^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\eta_1-y}{[(\xi-x)^2+(\eta_1-y)^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}}\right\},$$

$$I_2=-\left\{\frac{1}{[(\xi-x)^2+(\eta_2-y)^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{[(\xi-x)^2+(\eta_1-y)^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}}\right\},\quad I_3=\frac{1}{3[(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2]^2}$$

$$\left\{\frac{2(\eta_2-y)^3+3[(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2](\eta_2-y)}{[(\xi-x)^2+(\eta_2-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{2(\eta_1-y)^3+3[(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2](\eta_1-y)}{[(\xi-x)^2+(\eta_1-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}}\right\}, \qquad (\mathrm{I},2,3)$$

$$I_4=-\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{[(\xi-x)^2+(\eta_2-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{[(\xi-x)^2+(\eta_1-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}}\right\},$$

$$I_5=\frac{2(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}{3[(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2]^2}$$

$$\left\{\frac{2(\eta_2-y)^3+3(\eta_2-y)[(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2]}{[(\xi-x)^2+(\eta_2-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{2(\eta_1-y)^3+3(\eta_1-y)[(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2]}{[(\xi-x)^2+(\eta_1-y)^2+(\zeta-z)^2]^{3/2}}-\right\}$$

$$-\frac{1}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}\left\{\frac{\eta_2-y}{[(\xi-x)^2+(\eta_2-y)^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\eta_1-y}{[(\xi-x)^2+(\eta_1-y)^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}}\right\}.$$

現在設 η_2 趋于 $+\infty$，而 η_1 趋于 $-\infty$。在 $\eta_1\to-\infty$ 而 $\eta_2\to+\infty$ 时，I_1,I_2,I_3,I_4,I_5 的值分别用 I'_1,I'_2,I'_3,I'_4,I'_5 来表示。从式(Ⅰ,2,3)得：

$$I'_1=\frac{2}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2},$$

$$I'_2=0,$$

$$I'_3=\frac{4}{3}\,\frac{1}{[(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2]^2}, \qquad (\mathrm{I},2,4)$$

$$I'_4=0,$$

$$I_5' = \frac{2}{3} \frac{(\xi-x)^2-(\zeta-z)^2}{[(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2]^2}.$$

根据(Ⅰ,1,3),(Ⅰ,2,1),(Ⅰ,2,4)对二度体將有：

$$V_x = 2f\int \frac{\delta(\xi-x)d\xi d\zeta}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}, \quad V_z = 2f\int \frac{\delta(\zeta-z)d\xi d\zeta}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}$$

$$V_{xz} = 2f\int \frac{2\delta[(\xi-x)(\zeta-z)d\xi d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2]^2}, \qquad (\mathrm{I},2,5)$$

$$V_\Delta = 2f\int \frac{\delta[(\xi-x)^2-(\zeta-z)^2]d\xi d\zeta}{[(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2]^2},$$

$$V_y = V_{yz} = 2V_{xy} = 0.$$

为了从式(Ⅰ,2,5)轉換成相当于面物体及綫物体的公式，应在式(Ⅰ,2,5)中引入以下的变換。当要得到分佈在柱面上并且母綫平行于y軸的面質量的公式，就应該：

(1) 用微綫段ds代替微面积$d\xi d\zeta = d\sigma$；

(2) 把面积分改成綫积分；

(3) 把本来代替体密度的δ用面密度来代替。

当要得到分佈在直綫上并且平行于y軸的綫質量的公式，就应該：

(1) 用單位量度来代替微面积；

(2) 除去积分号；

(3) 把本来代替体密度的δ用綫密度来代替。

§3. 在其他坐标系中的基本公式

很明显，如果我們所取的一些直角坐标系，彼此間的坐标軸都相互平行，那末在空間某一点的重力位以及这些重力位的导数，就都跟所取的坐标系無关了。因此我們总是可以把任一已知点看作是坐标的原点，并应用相当于这情况下的公式来計算未知的重力位导数。但是今后我們將知道，在研究重力反演問題时，常須把所研究的重力位导数看作是地表上各点坐标的函数；因此我們不把公式的結論局限于坐

标原点，而采用普遍的形式把它們表示出来。

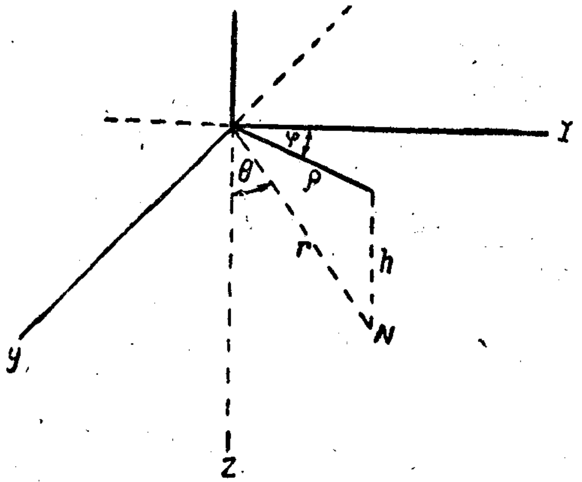

圖 1

对以下所給出的在不同坐标系中的一些基本公式，我們总是假設要計算导数的点位置在坐标原点。

給定某一点N。考虑引入以下的量：h（相当于z）；ρ——从N点在面xoy上的投影到坐标原点的距离；r——N点到原点的距离；θ——軸z跟原点及N点連綫間的夾角，φ——軸x跟原点及N点連綫在面xoy上的投影間的夾角，应順着軸x到軸z为$\frac{\pi}{2}$角的方向起始計算。显然，$h=$常数时，是跟面xoy平行的平面；$\rho=$常数时，是軸綫跟z軸重合的圓柱面；$r=$常数时，是球心在原点的球面；$\theta=$常数时，是軸綫跟z軸重合的圓錐面；$\varphi=$常数时，是以軸z为公共直綫的半平面。如果我們把h,ρ,r,θ,φ作不同的組合，就会得到不同的坐标系。例如：圓柱坐标系(h,ρ,φ)，球坐标系(r,θ,φ)，圓錐坐标系(h,θ,φ)及圓錐-圓柱坐标系(ρ,θ,φ)。由圖（1）立知換算公式会有以下的形式。

在圓柱坐标系中

$$\xi=\rho\cos\varphi,\ \eta=\rho\sin\varphi,\ \zeta=h,d\xi d\eta d\zeta=\rho dh d\rho d\varphi;$$

在球面坐标系中

$$\xi=r\sin\theta\cos\varphi,\eta=r\sin\theta\sin\varphi,\ \zeta=r\cos\theta,d\xi d\eta d\zeta=r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi;$$

在圓錐坐标系中

$$\xi=h\mathrm{tg}\theta\cos\varphi,\ \eta=h\mathrm{tg}\theta\sin\varphi,$$

$$\zeta=h,\ d\xi d\eta d\zeta=\left|\ h^2\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\right|\ dh d\theta d\varphi;$$

在圓錐-圓柱坐标系中

$$\xi=\rho\cos\varphi,\eta=\rho\sin\varphi,\zeta=\rho\operatorname{ctg}\theta,\ d\xi d\eta d\zeta=\frac{\rho^2}{\sin^2\theta}d\rho d\theta d\varphi$$

在公式(Ⅰ,1,3)中，令$x=y=z=0$，經相当的换算后，就知道对所有上述4个坐标系，公式(Ⅰ,1,3)的形式为：

$$\begin{aligned}V_x&=\delta\int D\cos\varphi d\varphi,\\ V_y&=\delta\int D\sin\varphi d\varphi,\\ V_z&=\delta\int Ed\varphi,\\ V_{xz}&=\delta\int B\cos\varphi d\varphi,\\ V_{yz}&=\delta\int B\sin\varphi d\varphi,\\ V_\Delta&=\delta\int A\cos^2\varphi d\varphi,\\ 2V_{xy}&=\delta\int A\sin^2\varphi d\varphi,\end{aligned}\qquad (\mathrm{I},3,1)$$

其中对于圆柱坐标系有

$$\begin{aligned}D_1&=f\int\frac{\rho^2dhd\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}},\ C_1=f\int\frac{\rho hdhd\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}},\\ B_1&=3f\int\frac{\rho^2hdhd\rho}{(\rho^2+h^2)^{5/2}},A_1=3f\int\frac{\rho^3dhd\rho}{(\rho^2+h^2)^{5/2}};\end{aligned}\qquad (\mathrm{I},3,2)$$

对于球坐标系有

$$\begin{aligned}D_2&=f\int\sin^2\theta drd\theta,\ C_2=f\int\sin\theta\cos\theta drd\theta,\\ B_2&=3f\int\frac{1}{r}\sin^2\theta\cos\theta drd\theta,\ A_2=3f\int\frac{1}{r}\sin^3\theta drd\theta,\end{aligned}\qquad (\mathrm{I},3,3)$$

对于圆錐坐标系有

$$\begin{aligned}D_3&=f\int\sin\theta|\operatorname{tg}\theta|dhd\theta,C_3=f\int(\sin h)\operatorname{sig}\theta dhd\theta,\\ B_3&=3f\int\frac{1}{|h|}\sin^2\theta\cos\theta dhd\theta,\ A_3=3f\int\frac{1}{|h|}\sin^3\theta dhd\theta;\end{aligned}\qquad (\mathrm{I},3,4)$$

对于圓錐——圓柱坐标系有

$$D_4=f\int\sin\theta d\rho d\theta,\quad C_4=f\int\cos\theta d\rho d\theta,$$

$$B_4=3f\int\frac{1}{\rho}\sin^2\theta\cos\theta d\rho d\theta,\quad A_4=3f\int\frac{1}{\rho}\sin^3\theta d\rho d\theta.$$

(Ⅰ,3,5)

§4. 在其他坐标系中的二度体的基本公式

在§2中曾經說过，計算二度体的重力位导数时，須要用到二重积分。因此在本段中有必要提出某些在平面上的坐标系。

§3 中所說的所有坐标系，都有一个共同的性質。取其中任何一个来看：不論用什么方法，总可以在某一坐标等于不同的常数值时，引一平面通过軸 z，这时所得到的截面圖形总是相同的。如果令某一平面坐标系的坐标等于不同的常数值而仍能得到相同的圖形，那末我們就說这平面坐标系跟所給定的空間坐标系相当。显然跟圓柱坐标系相当的平面坐标系，不是别的东西，就是通常的平面直角坐标系。因此可以不必再去考虑它了。現在只討論跟球坐标系、圓錐坐标系及圓錐——圓柱坐标系相对应的平面坐标系。

为了这个目的，考虑引入以下的量：

r——从原点到平面上任一点N的距离；

h——可認为相当于z；

ρ——可認为相当于 x；

θ——軸 z 跟原点及N点連綫間的夾角，逆时針从軸 z 的正向起始計算。

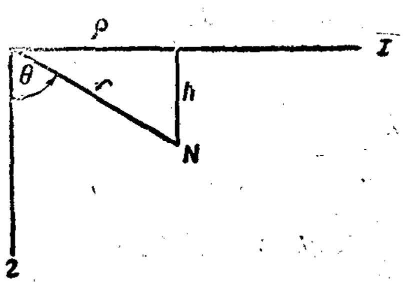

圖 2

显見，r 等于常数时，是以原点为中心的圓；h 及 ρ 都为常数时，是平行于軸 x 及軸 z 的直綫；θ 为常数时，是穿过坐标原点的直綫。

由圖 2 很易証明換算公式將有以下的形式。平面坐标系，如相当于球坐标系有：