同济大学数学辅导系列丛书

硕士研究生入学考试

数学综合练习与模拟考试

同济大学数学教研室 编

同济大学出版社

同济大学数学辅导系列丛书
硕士研究生入学考试
数学综合练习与模拟考试
同济大学数学教研室　编
同济大学出版社出版
（上海市四平路1239号　邮编：200092）
新华书店上海发行所发行
同济大学印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：9.25　字数：265千字
1998年6月第1版　　1998年6月第1次印刷
印数：1—6000　　定价：12.50元
ISBN7-5608-1926-5/O.164

内 容 提 要

本书是《硕士研究生入学考试——数学复习指南》配套使用的辅导材料，全书由高等数学、线性代数和概率统计三部分组成。每部分又包括有综合练习和模拟试题，并系统地提供了不同类型的 11 个综合练习和 14 份模拟试题，各类考生可根据需要选择复习训练。书末附有详细的解答，供读者参考。

本书取材于同济大学应用数学系举办的研复班讲授的讲稿，经反复修改、精心编写而成，力求使考生利用较少的时间复习好硕士研究生考试大纲所规定的内容，掌握较多的审题方法和解题手段，以便取得好成绩。

本书可作为高等工科院校师生的教学参考用书，也可供有关工程技术人员参考。

前　言

本书是《硕士研究生入学考试——数学复习指南》配套使用的辅导材料，它由综合练习及模拟试题两部分组成。报考硕士研究生的学生可以此作为复习训练的重要内容。由于硕士研究生入学考试数学卷分多种类型，各种类型的试题所涉及的范围各不相同，故我们从高等数学、线性代数和概率统计三部分内容分别进行练习及模拟考试，以适应考生的不同要求。

本书是根据同济大学应用数学系举办的研复班多年使用的讲义，经反复修改、精心编写而成的。

本书的高等数学部分由徐建平、李生文、应明、陈茵等整理编写，线性代数部分由陆林生等整理编写，概率统计部分由蒋凤瑛等整理编写，全书由徐建平策划。数学系的许多教师都曾对它提出过许多有益的意见与建议，在出版的过程中，得到了同济大学数学系叶家琛、柴根象等教授的指导，在此一并表示感谢。

编者

1998.1

目　　录

第一部分　高等数学

摸底练习……………………………………………… (1)
综合练习(一)………………………………………… (3)
综合练习(二)………………………………………… (6)
综合练习(三)………………………………………… (8)
综合练习(四) ……………………………………… (10)
综合练习(五) ……………………………………… (12)
综合练习(六) ……………………………………… (14)
模拟试题(一) ……………………………………… (17)
模拟试题(二) ……………………………………… (21)
模拟试题(三) ……………………………………… (24)
模拟试题(四) ……………………………………… (28)
模拟试题(五) ……………………………………… (32)
模拟试题(六) ……………………………………… (36)
模拟试题(七) ……………………………………… (40)
模拟试题(八) ……………………………………… (43)
模拟试题(九) ……………………………………… (46)
模拟试题(十) ……………………………………… (50)
解答与提示 ………………………………………… (54)

第二部分　线性代数

综合练习(一)……………………………………… (173)
综合练习(二)……………………………………… (178)

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

模拟试题(一)…………………………………………………… (183)
模拟试题(二)…………………………………………………… (186)
解答与提示…………………………………………………… (189)

第三部分　概率统计

综合练习(一)…………………………………………………… (233)
综合练习(二)…………………………………………………… (238)
模拟试题(一)…………………………………………………… (242)
模拟试题(二)…………………………………………………… (246)
解答与提示…………………………………………………… (250)

第一部分　高等数学

摸底练习

（本练习主要测试考生当前水平，以便找出薄弱环节，使以后的复习做到有的放矢）

一、计算题(共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分 .)

(1) 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right]$.

(2) 设 $f(t)$连续，$g(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求 $g''(0)$.

(3) 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$，求 $f^{(n)}(0)$.

(4) 设 $\int_{\ln 2}^{2}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^t-1}}=\dfrac{\pi}{6}$，求 x.

(5) 交换二次积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{x}^{2}\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y$ 的次序并求其值.

(6) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ 的敛散性 .

(7) 将函数 $f(x)=\pi-x$ 在$[0,\pi]$上展开为余弦级数 .

(8) 求 $\iint\limits_{S}xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yx^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是曲面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 的外侧 .

(9) 设 $A'B'$ 分别为定点 $A(1,0,3)$，$B(0,2,5)$ 在直线 $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 上的垂直投影点，求 $|\overline{A'B'}|$.

(10) 设 $z=f(x,y)=g(u,v)$可微,其中 $x=u+v$, $y=u-v$,试用$\frac{\partial z}{\partial u}$和$\frac{\partial z}{\partial v}$表示$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$.

二、(10 分)在椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上作一个在各坐标轴的正半轴有相同截距的切平面.

三、(10 分)试证 $x^p-px\leqslant 1-p$,其中 $x>0,0<p<1$.

四、(10 分)已知函数 $y=f(x)$经过 $P_1(0,1)$与 $P_2(1,0)$两点的一段凸的曲线弧,$P(x,y)$为该曲线弧上的任意一点,$\overline{P_1P}$与弧$\overset{\frown}{P_1P}$之间所围面积为 $2x^3$,试求函数 $f(x)$的表达式.

五、(10 分)有三个变力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 作用在点 $P(x,y,z)$上,且 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{F}_3|=1$,方向分别为$\overrightarrow{M_1P}$, $\overrightarrow{M_2P}$, $\overrightarrow{M_3P}$,其中 $M_1(1,0,0)$, $M_2(0,1,0)$, $M_3(0,0,1)$若点 P 由原点 $O(0,0,0)$沿直线移动到点 $M(1,1,1)$,试求力所作的功.

六、(10 分)若 $f(x)$的二阶导数 $f''(x)$在$[2,4]$上连续,且 $f(3)=0$,试证:在$(2,4)$内至少存在一点 ξ,使

$$f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x.$$

综合练习(一)

一、填空题

(1) 设 $f(x)$ 可微，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+3h)-f(x-2h)}{2h}=$______.

(2) $y=\tan(x+y)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______.

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{a-bx}$，其中 a,b 为非零常数，则 $f^{(n)}(x)=$______.

(4) 设 $\varphi(x)$ 是单调可导函数 $f(x)$ 的反函数且 $f(1)=2$，$f'(1)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 则 $\varphi'(2)=$______.

(5) 当 $x\to 0$ 时 $x-x\cos x$ 与 $\sin x-x\cos x$ 是______无穷小.

二、计算下列各极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(e^{x^2}-1)}{\tan^3 x\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}n\tan(\pi\sqrt{n^2+1})$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x\ln(e^x-1)}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \ln\cos x\,\mathrm{d}x}{x^3}$;

(8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left[\int_0^x e^{t^2} dt\right]^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$.

三、计算下列导数

1. 设 $y = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 y' 及 y''.

2. 设 $e^{xy} = 2x + y$，求 $y'(0)$，$y''(0)$.

3. 设 $\begin{cases} x = \int_1^t u \ln u \, du, \\ y = \int_t^2 u^2 \ln u \, du, \end{cases}$ 其中 $t > 0$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

4. 当 $|x|$ 很小时，利用微分推出 $\sqrt{x^2 + a^2}$ 的近似计算公式.

四、设函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & -2 < x < 1; \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 2; \\ 2^x, & 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

(1) 写出该函数的定义域；(2) 讨论该函数的连续性，可导性，间断点类型；(3) 写出该函数的反函数的表达式及其定义域.

五、计算下列积分

1. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$.

2. $\displaystyle\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$.

3. $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$.

4. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\sin x \tan^2 x}{3+\cos 3x} - \ln(1-x)\right] dx$.

5. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{3x-2}} dx$.

6. $\int \frac{\sin x\cos^2 x}{2+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

7. $\int \sec x\tan^5 x\,\mathrm{d}x$.

8. $\int_{-1}^{4} x\sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x$.

9. $\int \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$.

10. $\int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}$.

11. $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

12. 求 $f(x)=\max\{1,x^2\}$ 的一个适合 $F(0)=1$ 的原函数 .

六、设 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数,且 $\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=0$,则 $f(x)$ 的原函数也是以 l 为周期的周期函数 .

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

综合练习(二)

一、利用定积分计算极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

2. $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\cos(b-x)\mathrm{d}x$,其中 $a>0,b>0$ 均与 x 无关.

二、证明下列不等式

1. $1<\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2}$.

2. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,求证 $\sin x+\tan x>2x$.

3. 对于 $a>1,n\geqslant 1$,证明 $\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

4. 当 $0\leqslant x\leqslant 1,p>1$ 时,证明 $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$.

5. 当函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上,$f''(x)>0$ 时,证明 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x>af\left(\frac{a}{2}\right)$,其中 $a>0$.

三、讨论函数 $y=\ln\sqrt{1+x^2}$ 的单调性,凹凸区间,极值,拐点(可列表表示之).

四、抛物线 $y^2=2x$ 分割圆 $x^2+y^2\leqslant 8$ 成两部分,分别求出两部分的面积.

五、由正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 间一段与 x 轴所围图形绕 y 轴旋转,求所得旋转体的体积.

六、在半径为 R 的圆中割出一个半径为 r 的同心圆及与此圆相切的一个弓形,问 r 为何值时,可使剩余部分的面积最大?

七、试证:对于在(1,2)内任一点 x 处均有

$$\left|\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}\right|<\frac{1}{4}(x-1)^3.$$

八、设 $f(x)=pe^{-x}+x^2-x$,若对一切 $x>0$,常数 p 最小应取什么值时,恒有 $f(x)\geq 1$.

九、若 $f'(x)$连续,$f(0)=0,f'(0)\neq 0$,计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^{x}x^2f(t)\mathrm{d}t}.$$

十、设 $f(x)$在$[a,b]$上具有二阶连续导数,且 $f(a)=f(b)$,$f'(a)>0,f'(b)>0$,试证:在(a,b)内至少存在一点 ξ,使 $f''(\xi)=0$.

十一、设 $f(x)$在 $x=0$ 的邻域内具有三阶导数,且

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3.$$

(1) 求:$f(0),f'(0),f''(0)$; (2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

综合练习(三)

一、已知单位向量$\overrightarrow{OA}$与三个坐标轴的夹角相等，B 是点 $M(1,-3,2)$关于点 $N(-1,2,1)$的对称点，求$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

二、求与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线，且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标表示式.

三、一直线 l 平行于平面 $3x+2y-z+6=0$，且与直线$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{4}=z$ 垂直，试求直线 l 的方向余弦.

四、求直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$在平面 $x+y+2z-5=0$ 上的投影直线的方程.

五、平面过 z 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，求该平面方程.

六、经过平面 $x+28y-2z+17=0$ 与平面 $5x+8y-z+1=0$ 的交线作球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的切平面.

七、计算下列偏导数

1. 设$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $u=x^{\frac{y}{z}}$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

3. 设 $F(x,x+y,x+y+z)=0$，其中 F 可微，求$\frac{\partial z}{\partial x}$.

4. 设 $u=xf\left(x,\frac{y}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续导数，求$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

5. 设 $u=f(x,y,z)$又 $y=\varphi(x,t)$. $t=\psi(x,z)$，且 f,φ,ψ 是任意可微函数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

八、求空间曲线 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\sin\frac{t}{2}$ 在点

$\left(\frac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$处的切线与法平面方程.

九、在曲面 $z=xy$ 上求一点,使曲面在该点处的法线垂直于平面 $x+3y+z=5$,并写出该法线的方程.

十、设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,试求

1. $\mathrm{grad}\ u$; 2. 满足 $|\mathrm{grad}u|=1$ 的点的轨迹.

十一、设$\begin{cases}u^2-v+x=0,\\u+v^2-y=0,\end{cases}$求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

十二、证明曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点处的切平面过某定点,其中 $f(u,v)$为可微函数.

十三、求原点到曲面$(x-y)^2-z^2=1$ 上点的最短距离.

十四、已知曲面 $e^{2x-z}=f(\pi y-\sqrt{2}z)$,且 $f(u)$可微,证明曲面为柱面.

综合练习(四)

一、交换下列各题的积分次序

1. $\int_0^2\int_1^{e^x} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

2. $\int_0^2\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_2^{2\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

二、计算下列二重积分

1. $\iint\limits_D (2x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D 由 $x=y^2$ 及 $x-y-2=0$ 围成.

2. $\iint\limits_D |x^2+y^2-4|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D 由 $x^2+y^2=9$ 围成.

3. $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D 由 $x^2+y^2=2y$ 围成.

三、计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

四、将三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 用直角坐标和柱面坐标分别化为三次积分,其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ 和 $z\geqslant\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 交成的空间区域.

五、求由两曲面 $z=8-x^2-y^2$ 和 $z=x^2+3y^2$ 所围成的体积.

六、设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$,若 $f(t)$ 在 Ω 上具有连续导数,且 $f(0)=0$,试求 $\lim\limits_{a\to 0}\frac{1}{\pi a^4}\iiint\limits_\Omega f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}V$.

七、密度 $\mu=1$ 的均匀物体 Ω 由曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 及平面 $z=0, z=1$ 围成,求 Ω 关于 z 轴的转动惯量.

八、设物体由曲面 $x^2+y^2+z^2\geqslant 1, x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ 及 $y^2\geqslant x^2+$

z^2 所围成，其密度 μ 与各点的纵坐标成正比例，比例系数为 8，求此物体的质量.

九、立体 Ω 的上部分为半球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant 0$，下部分为圆柱体 $x^2+y^2\leqslant R^2, -h\leqslant z\leqslant 0$，已知 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V=0$，求 $\dfrac{R}{h}$ 之值.

十、计算下列曲线积分

1. $\int_l \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S$，其中 $l: x^2+y^2=-2y$

2. $\int_l -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中 l 为沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的有向弧段.

十一、计算曲面积分 $\iint\limits_{S} z\mathrm{d}S$，其中 S 为曲面 $z=x^2+y^2$ 位于 $0\leqslant z\leqslant h$ 内的部分.

十二、验证曲线积分 $\int_l (\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-2x})y\mathrm{d}x-(\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并求 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-2x})y\mathrm{d}x-(\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$ 的值.

十三、计算曲面积分 $\iint\limits_{S} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+4x(x-z)\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2, 0\leqslant z\leqslant 4$ 部分取上侧.

十四、求均匀圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 对原点的转动惯量.

十五、在平面上一质点在某力场沿曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 从点 $A(a,0)$ 反时针方向移到点 $B(0,a)$，力的大小与作用点到原点的距离成正比，方向与向径的方向(反时针)成 $\dfrac{\pi}{2}$ 夹角，求所作的功.

十六、由曲面 $z=2-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的立体 Ω，其密度为 1，求 Ω 关于直线 $l: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 的转动惯量.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com