曲 线 与 曲 面

复旦大学数学系《曲线与曲面》编写组 编

科 学 出 版 社

1 9 7 7

内 容 简 介

本书是工厂的工人、技术人员和学校的师生密切配合，对机械加工中提出的几何问题归纳整理，又补充了必要的基础知识而编写的一部几何教材．各章重点放在解决一些实际问题上，内容通俗易懂、便于应用．全书共分六章：第一章讲述了向量的基本概念及运算．第二章结合凸轮型线的计算讨论了等距曲线．第三章讨论了空间坐标变换及一些空间曲面和曲线．第四章以微分学为工具讨论了曲线和曲面的包络问题．第五章讨论了齿轮的啮合问题．第六章结合生产实际，讨论了曲线拟合的几种方法．

曲线与曲面

复旦大学数学系《曲线与曲面》编写组 编

*

科学出版社出版

北京朝阳門内大街137号

北京印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1977年2月第一版 开本：787×1092 1/32

1977年2月第一次印刷 印张：8 1/4

印数：0001—70,450 字数：185,000

统一书号：13031·507

本社书号：748·13—1

定价：0.66元

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

理论的基础是实践，又转过来为实践服务。

读书是学习，使用也是学习，而且是更重要的学习。

序

恩格斯教导我们："**数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的.**"

可是，在无产阶级文化大革命以前，高等学校里"几何学"的研究，却是"论文一篇篇，实际不沾边"，一味跟在洋人后面爬行，严重脱离我国三大革命的实践.

在伟大的无产阶级文化大革命和批林批孔运动中，我们批判洋奴哲学、爬行主义，贯彻"**独立自主，自力更生**"的方针，在生产实践中，工厂的工人、技术人员和学校的师生密切配合，一起研究了一些实际课题，并且应用到生产中去，取得了一些成绩. 我们把这些课题归纳整理出来，补充了一些必要的基础知识，编成教材，曾在上海工具厂业余的基础数学班上试用. 经过教学实践，参加学习的同志认为，这些内容对工厂里的同志和学校的师生都有一定的参考价值，同时提出了许多宝贵的修改意见，并指出教材中存在的一些错误. 在此基础上，我们作了修改和补充，编写成这本《曲线与曲面》.

在编写中我们力求做到：

一、概念、公式与方法的引入尽量通俗易懂，便于应用.

二、每章都把重点放在解决一些实际问题上，力求改变过去以定理为主、例题为辅的写法.

三、在叙述中，充分运用工人老师傅在实际生产过程中所常用的分析方法，即用运动的、相互联系的观点来考察问题，避免过去那种拘泥于空间形式的形而上学方法.

这本书的编写工作，得到了上海工具厂、江南造船厂、上

海汽轮机厂、上钢五厂、上海化工机修总厂、上海变压器厂等单位的一些同志的帮助.

工人教员、上海工具厂施嗣伯同志参加了编写、教学、修改和定稿的全部工作. 上海工具厂部分听课的同志校阅了前五章，并且绘制了全部插图. 江南造船厂的几位同志校阅了第六章.

由于我们学习马列著作和毛主席著作不够，业务水平不高，同时实践也很少，又很不全面，书中一定还有缺点和错误，请读者批评指正.

目　　录

第一章 向 量

本章共六节.

前四节的内容是向量，叙述有关向量的概念和一些向量运算. 对于向量的坐标表示，这里只讨论平面向量. 因为大家对平面几何的内容比较熟悉，所以我们想利用这个条件，使读者便于掌握向量的基本内容，等到第三章再引入空间向量的坐标表示就十分容易了.

向量是以后几章的工具.

第五节和第六节叙述了平面曲线方程的各种形式，并且介绍了曲线的切线和法线的求法，切向量和法向量的求法. 这部分的叙述十分简单. 这对于知道这些内容的读者，是一种复习；对于初次学习这些内容的读者，应该说是简单的介绍，借助于以后几章的内容就能够很好地掌握它.

1. 向量的概念

我们经常碰到的有两种量. 一种叫数量(或标量)，如时间、距离、体积、温度等等. 这种量在取定量度单位以后，就可由数值的大小完全表示出来. 例如，时间用多少秒，距离用多少米，体积用多少立方米，温度用多少度，等等. 另一种量，例如力、速度、位移等等，除了用一定的量度单位的数值表示它们的大小以外，还必须指明它们的方向，才能完全表示出来. 例如，仅仅说力是多少斤，速度是每秒几米，位移是多少米，都是不够的，不指出它们的方向是不行的. 这种既有大小又有

方向的量叫做向量(或矢量).

向量可以用有向线段(规定了起点和终点的直线段)来表示. 如图 1-1, 从 O 点到 A 点的有向线段 OA 的长度表示向量的大小, 而它的指向表示向量的方向.

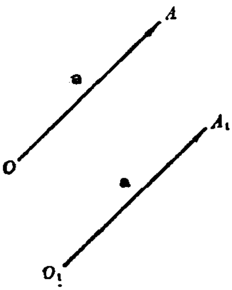

图 1-1

对于数量, 经常用字母 a, b 或 x, y 等等来表示. 为了同数量有所区别, 我们用附有箭头的 $\overrightarrow{OA}$ 或用斜黑体字母 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 表示向量. 用 $\overrightarrow{OA}$ 表示向量时, O 就是它的起点, A 是它的终点.

向量的模 表示向量大小的数值叫做它的模(或长度). 向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 的模就是线段 OA 的长度, 用记号 $|\overrightarrow{OA}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$ 表示.

向量的相等 如果两个向量 $\overrightarrow{O_1A_1}$ 和 $\overrightarrow{OA}$ (如图 1-1 所示), 它们的大小相等, 指向相同(相互平行并且从起点到终点的箭头同向), 那末我们讲这两个向量相等, 写成

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O_1A_1}.$$

如图 1-2 所示的两个向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$, 虽然它们的大小相等, 即:

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=4,$$

但它们的方向不相同, 所以

$$\overrightarrow{OA}\neq\overrightarrow{OB}.$$

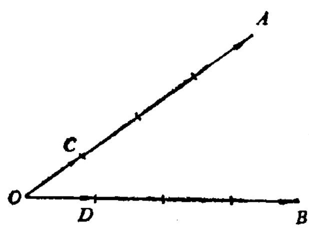

图 1-2

单位向量 模等于 1 的向量叫做单位向量.

如图 1-2 所示, $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|=1$, 所以 $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OD}$ 都是单位向量, 但是它们的方向不相同, 所以 $\overrightarrow{OC}\neq\overrightarrow{OD}$. 我们讲, $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OD}$ 是不同方向的两个单位向量. 我们也经常讲, $\overrightarrow{OC}$ 是 $\overrightarrow{OA}$ 的单位向量, $\overrightarrow{OD}$ 是

$\overrightarrow{OB}$ 的单位向量.

零向量 模等于零的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$. 它是起点和终点重合的向量.

对于两个向量，譬如 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OD}$，我们不能说 $\overrightarrow{OA}$ 大于 $\overrightarrow{OD}$ 或 $\overrightarrow{OD}$ 小于 $\overrightarrow{OA}$，我们只能说 $\overrightarrow{OA}$ 的模大于 $\overrightarrow{OD}$ 的模，可把它写成 $|\overrightarrow{OA}|>|\overrightarrow{OD}|$.

2. 向量的加减和数乘

在物理学中，我们已经学过这样的事实：作用在一个物体上的互成角度的两个力 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，可以合成一个力 $\boldsymbol{c}$. 它的大小和方向，可以用表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的有向线段 OA 和 OB 作邻边的平行四边形的对角线来表示，对角线的长度表示 $\boldsymbol{c}$ 的模，对角线的方向就是 $\boldsymbol{c}$ 的方向. 这个结论，叫做力的平行四边形法则(图 1-3).

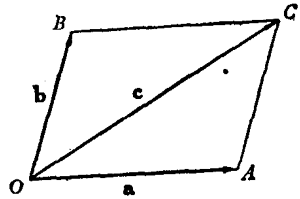

图 1-3

我们再观察车床上的刀架的位移. 设大拖板向左移动了 30 毫米，中拖板向前移动了 40 毫米. 这两个位移都是向量，分别记为 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$. 实际结果是，车刀架向左前方移动了 $\sqrt{30^2+40^2}=50$ 毫米. 车刀架的位移也是一个向量，它是由大拖板的位移向量 $\boldsymbol{p}$ 和中拖板的位移向量 $\boldsymbol{q}$ 合成起来的. 它也是以 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 为邻边所组成的平行四边形的对角线(图 1-4).

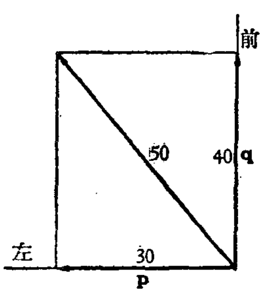

图 1-4

力的合成，还有速度的合成都

符合平行四边形法则．因此，我们规定向量的加法如下：

向量的加法 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, 以 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$, 取对角线 $\overrightarrow{OC}$, 它也表示一个向量，记作 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$, 向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和，写成

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

或

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

显然，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 是一样的，所以我们说，向量的加法是可交换的．用平行四边形的对角线求出两个向量的和这个法则，叫做向量加法的*平行四边形法则*．它是从力的合成、位移的合成的平行四边形法则中抽象出来的．

由于 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$（参见图 1-3），因此我们还可以这样来作出两向量的和：作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, 以 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 为起点作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, 连接 $\overrightarrow{OC}$, 它就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$．这种方法叫做向量加法的*三角形法则*．三角形法则实质上是和平行四边形法则一样的．

负向量 大小和 $\boldsymbol{a}$ 相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的*负向量*，记为 $-\boldsymbol{a}$.

显然，$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$, 这说明 $\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{a}$ 互为负向量．

向量的减法 当 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 时，我们把向量 $\boldsymbol{b}$ 叫做 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的*差*，记作

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}.$$

同样有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}.$$

按照向量加法的三角形法则，从图 1-3 的 $\triangle OBC$ 可得

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{a}),$$

于是我们有

$$\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}.$$

例 1-1 如图 1-5, 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 交成 120° 角, 它们和铅垂线的夹角都是 60°, $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=100$, 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

解 以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形, 对角线就是它们的和, 即

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

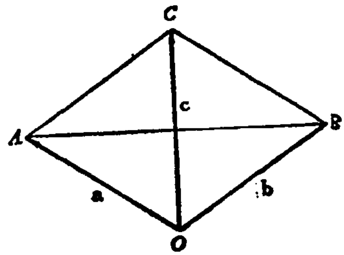

图 1-5

我们要求出 $\boldsymbol{c}$ 的大小和方向. 它的方向是垂直向上的. 因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, 所以这个平行四边形是菱形. 又由于 $\angle BOC=60^\circ$, 所以 $\triangle OBC$ 是正三角形, 因此

$$|\overrightarrow{OC}|=|\boldsymbol{a}|=100.$$

从这个例子可以看出, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的模不一定比 $\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{b}$)的模来得大. 也就是说, 不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|$$

不一定成立. 在上面例子中 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$.

如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角再大一点, 如 150°, 那末它们和铅垂线的夹角是 75°, $\triangle OBC$ 是底角为 75° 的等腰三角形, $\angle OBC=30^\circ$. 根据余弦定理我们有:

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OC}|^2&=|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{b}|\cos 30^\circ\\&=2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos 30^\circ)\\&=(2-\sqrt{3})\,|\boldsymbol{b}|^2,\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2-\sqrt{3}}\,|\boldsymbol{b}|\approx 0.518|\boldsymbol{b}|.$$

这时

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{b}|.$$

例 1-2 求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$.

解 根据三角形法则

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$
$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\mathbf{0},$$
所以
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}.$$

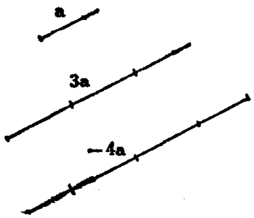

图 1-6

向量和数量的乘积 已知一个向量 $\boldsymbol{a}$, 就是知道它的方向和模. 有另一个向量 $\boldsymbol{b}$, 它与 $\boldsymbol{a}$ 同方向, 并且 $|\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}|$, 我们很自然地记 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}$ (图 1-6).

一般地, 如果 $\lambda>0$, 那末 $\lambda\boldsymbol{a}$ 表示一个向量, 它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同, 它的模是 $\lambda|\boldsymbol{a}|$; 如果 $\lambda<0$, 那末 $\lambda\boldsymbol{a}$ 也表示一个向量, 但它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反, 它的模是 $-\lambda|\boldsymbol{a}|$; 如果 $\lambda=0$, 那末 $\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$. 向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 乘以数量 λ 的结果. 这种运算叫做向量的数乘.

当然, 把 λ 写在 $\boldsymbol{a}$ 的右侧也是一样的: $\boldsymbol{a}\lambda=\lambda\boldsymbol{a}$.

如果 μ 是另一个数量, 那末

$$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}.$$

例如, $3(2\boldsymbol{a})=6\boldsymbol{a}$.

任何一个向量都可以写成它的模和单位向量的乘积. 例如, 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量是 $\boldsymbol{a}_0$, 我们就可写下

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0.$$

当 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$ 时,

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

所以, 对于一个已知的非零向量 $\boldsymbol{a}$, 如要求它的单位向量只须用 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$ 去乘 $\boldsymbol{a}$ 就可以了, 或更简便地讲, 向量 $\boldsymbol{a}$ 除以它的模就是它的单位向量.

如果 $\boldsymbol{b}$ 和单位向量 $\boldsymbol{a}_0$ 平行，那末

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}_0,$$

其中，当 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}_0$ 方向相同时，$\lambda=|\boldsymbol{b}|$；当它们方向相反时，$\lambda=-|\boldsymbol{b}|$.

由向量加法的平行四边形法则立刻可知(图 1-7)：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. 这就是说，向量的数乘满足分配律.

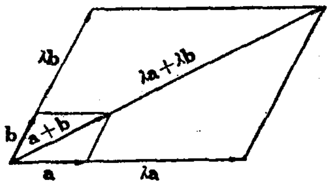

图 1-7

3. 平面直角坐标

用有向线段表示向量的方法很直观，也很清楚．但是，为了进行向量的运算，这种表示方法是很不够的，因此我们引进向量的坐标表示．在这之前，回顾一下点的坐标表示．

点的坐标　过平面上一个定点 O 作两条相互垂直的直线，分别称为 x 轴和 y 轴．它们都取定一个方向为正向．我们约定从 x 轴的正向到 y 轴的正向要逆时针旋转 90°．两个轴上还取好相同的单位长度．这样，我们就有了一个平面直角坐标系 Oxy．定点 O 叫做坐标原点.

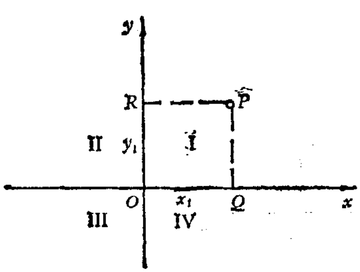

图 1-8

对于平面上任意一点 P，可作 PQ 使垂直于 x 轴，可作 PR 使垂直于 y 轴．设它们的垂足分别是 Q 和 R (图 1-8)．$x_1=OQ$ 是 Q 点在 x 轴上的坐标(当从 O 到 Q 的方向和 x 轴的正向一致时，$OQ=|OQ|$，否则 $OQ=-|OQ|$，

这里 $|OQ|$ 表示 O 到 Q 的距离), $y_1=OR$ 是 R 点在 y 轴上的坐标. 我们称有序数组 (x_1, y_1) 为 P 点的坐标. x_1 叫做 P 点的横坐标, y_1 叫做 P 点的纵坐标. 从上面的作法可以看出, P 点唯一地决定了有序数组 (x_1, y_1). 反过来, 有了有序数组 (x_1, y_1), 就可以在 x 轴上找到 Q 点, 在 y 轴上找到 R 点, 于是过 Q 点作 x 轴的垂线, 过 R 点作 y 轴的垂线, 这两条垂线必定相交于一点 P. 所以 P 点和有序数组 (x_1, y_1) 是一一对应的. 这种利用有序数组表示平面上的点的方法叫做直角坐标法.

x 轴和 y 轴把平面分成四个部分. 分别称为第 I、II、III、IV 象限, 如图 1-8 所示.

坐标法把点和数联系起来, 从而把图形和方程联系起来, 还可以用变数描述运动的点. 恩格斯给它以极高的评价说: **"数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数, 运动进入了数学, 有了变数, 辩证法进入了数学, 有了变数, 微分和积分也就立刻成为必要的了, ⋯."**

平面上两点间的距离 设 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 是平面上的任意两点. 过 P_1, P_2 分别作 x 轴和 y 轴的垂线, 垂足分别为 Q_1, Q_2; R_1, R_2. 再过 P_1 点作 P_2Q_2 的垂线, 垂足为 P_3. 在直角三角形 $P_1P_2P_3$ 中, 根据勾股定理得到

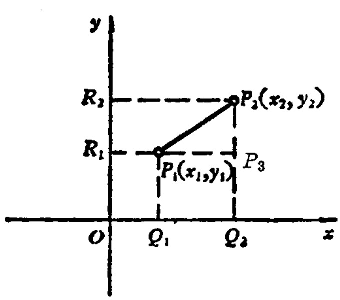

图 1-9

$$|P_1P_2|=\sqrt{(P_1P_3)^2+(P_3P_2)^2},$$

而

$$P_1P_3=Q_1Q_2=OQ_2-OQ_1=x_2-x_1,$$
$$P_3P_2=R_1R_2=OR_2-OR_1=y_2-y_1.$$

所以

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

这就是平面上任意两点之间的距离公式.

向量的坐标　在平面直角坐标 Oxy 中，我们沿 x 轴和 y 轴分别作单位向量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，它们叫做这坐标系 Oxy 的基本向量(图 1-10).

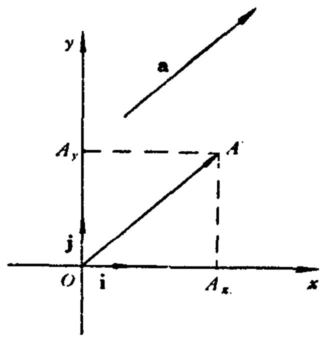

图 1-10

任一向量 $\boldsymbol{a}$，总可以把它平行移动(不改变方向和大小)使得它的起点是原点 O. 过它的终点 A 作 x 轴和 y 轴的垂线，垂足分别是 A_x 和 A_y. 根据平行四边形法则可以把 $\boldsymbol{a}$ 分解成两个向量的和:

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_x}+\overrightarrow{OA_y}.$$

因为 $\overrightarrow{OA_x}$ 和 $\boldsymbol{i}$ 平行，所以

$$\overrightarrow{OA_x}=a_x\boldsymbol{i}\text{（}a_x\text{ 是 }A_x\text{ 点在 }x\text{ 轴上的坐标）}.$$

同理，

$$\overrightarrow{OA_y}=a_y\boldsymbol{j}\text{（}a_y\text{ 是 }A_y\text{ 点在 }y\text{ 轴上的坐标）}.$$

所以

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}.$$

数组 (a_x, a_y) 就叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，或写成

$$\boldsymbol{a}=(a_x, a_y).$$

这式的意义就是:

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}.$$

a_x 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{i}$ 方向的分量，a_y 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{j}$ 方向的分量。特别是，$\boldsymbol{i}=(1, 0)$，$\boldsymbol{j}=(0, 1)$.

要特别注意的是，A 点的坐标也是 (a_x, a_y). 这就是说，从原点出发的向量的坐标同它的终点的坐标一致.

用坐标进行向量的运算 设 λ 是一个数，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个向量，$\boldsymbol{a}=(a_x, a_y)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y)$. 我们来求 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$ 的坐标和 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标，运算如下：

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j},\\ \lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j})\\&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y),$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y).$$

从这些式子可以看出，向量的加减与数乘可以归结成它们的坐标的加减和数乘。

例 1-3 已知向量 $\boldsymbol{a}=(4, -1)$，$\boldsymbol{b}=(5, 2)$，求 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j},$

$2\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}, \quad 3\boldsymbol{b}=15\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j},$

$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=23\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}=(23, 4).$

例 1-4 已知两点 P_1 和 P_2. 设它们的坐标分别为 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2)，求向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 和 $\overrightarrow{P_2P_1}$.

解 由三角形法则看出

$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2},$$
$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}.$$

因为从原点出发的向量的坐标同它的终点的坐标一致，所以

$$\overrightarrow{OP_2}=(a_2, b_2),$$