Engineering Industry and Technics

工程师用有限元素法

l'Industrie Mécanique et Technipue

[美] K· H· 侯伯纳著

きかいこうぎょうぎじゅつとしょ

chinenbauindustrie und Technologie

ской Промыщленности и Технике

机 械 工 业 出 版 社

工程师用有限元素法

［美］K· H· 侯伯纳著

谢贻权　何福保　丁皓江　译校
邹十践　张超和　译

机械工业出版社

本书是一本阐述有限元素法的基本概念、基础理论和实际应用的较全面的著作。它体现了理论和实践有机地结合。全书共分两个部分和四个附录。第一部分着重从物理和数学的角度论述了有限元素法的基本概念和基础理论，叙述了矩阵、变分法和连续介质问题；第二部分偏重于有限元素法的实际应用，它涉及了弹性力学、一般场、润滑、流体力学等问题和使用电子计算机的问题等等，在四个附录中介绍了矩阵、变分法、线性弹性理论的基本方程和流体力学的基本方程。

本书可供大专院校理工科的师生、工程技术人员和有关人员参考。

The Finite Element Method for Engineers

Kenneth H. Huebner JOHN WILEY & SONS 1975

* * *

工程师用有限元素法

[美] K·H·侯伯纳 著

谢贻权 何福保 丁皓江 译校

邹十践 张超和 译

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

重庆印制一厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本850×1168 1/32 · 印张15 3/4 · 字数412千字

1981年12月重庆第一版 · 1981年12月重庆第一次印刷

印数 0,001—7,600 · 定价 1.95 元

*

统一书号：15033 · 4992

前　言

有限元素法是工程师和科学家正在到处应用的最新、最流行的数值分析技术之一。借助于高速数字计算机的配合，有限元素法已大大地扩大了适用数值分析的工程问题的范围。

十五年前，有限元素法作为分析复杂的飞机结构的一个有效方法而出现于航空工业。开始时它被看作结构分析矩阵法的扩展，但是现在已公认它是一个有效和用途广泛的数值分析工具，它几乎使得应力分析中所有以前难处理的问题都可能有一个计算机解。许多分析人员认为有限元素法的出现标志着固体力学的一个真正的突破。

有限元素法的一个引人注目的特点是：它的应用不局限于固体力学领域。虽然这一重要事实早在八年前就已被认识到，但是有限元素法直到最近才应用于其他领域。实际上，它能应用于几乎所有的连续介质问题或场问题。因此，今天有限元素法在工程、物理和数学上引起极大的注意是不足为奇的。

本书是为从事物理学的分析工作并想知悉有限元素分析的性质和效能的人们编写的。这是一本启蒙教科书，以易懂和入门的程度介绍有限元素法。以往大多数有限元素法的论述都集中于结构力学问题。本书把有限元素法看得更为普遍，作为工程力学问题的一个数值分析工具。方法取自各种技术杂志，并将分散的资料加以汇编整理。希望本书做到了理论和实例并重。

在本书中，作者试图达到三个目标：（1）尽可能简单地阐述有限元素法的基本原理；（2）使读者熟练地掌握这些基本原理，以便能毫无困难地应用有限元素法解问题；（3）为有限元素法提供有用的全面展望，为进一步研究在文献中不断出现的专门高等课题，建立方便的起点。

著作尽力由浅入深地讨论每个课题，假定读者具备工程力学，以及有关的数学和计算机技术的初等知识。然而，对有限元素法中所应用的矩阵代数和变分法的专门知识，则充分详细地给以阐述。为了简单起见，省去了张量记号（虽然在此领域中它是有用的）。

本书分为两部分。第一部分介绍有限元素法的基本概念和基础理论。以大量的历史论述开始，为读者提供一个全貌和总的趋向。然后，为了确定有限元素法的物理基础，阐述了此法的详细发展（有如它起源于结构力学）。因为矩阵和变分法对于理解有限元素法分析来讲是重要的，所以这些课题在前两个附录中也作了阐述。一经确定了物理基础，便可提出有限元素法的数学基础。本书向读者阐明怎样把该法应用于工程力学中许多类型的问题。这部分的第四章介绍了最新的广义有限元素概念。总之，第一部分使读者了解有限元素法，它怎样从分析结构问题发展到分析一般的连续介质问题，并且了解它的局限性。

本书第二部分共五章，介绍有限元素法在工程力学中的应用。第六章介绍了线性弹性理论的有限元素法公式的建立，附录C提供固体力学有关的基本方程的简短复习。弹性问题的公式是根据常用的位移分析法建立的，但是也提到若干论述其他可能的公式的参考文献。例如热传导、电磁学和扭转等一般的场问题，这些是第七章的主题。因为有很多实际的场问题，其中时间是一个独立参数，所以在一些细目中也研究了有限元素概念推广到时间范畴的情况。整个第八章阐述了一个特殊类型的场问题，即流体薄膜的润滑问题。这一章包含的内容反映了作者在这方面的特殊兴趣。

本书倒数第二章研究了有限元素法在流体力学中的应用（在附录D中则复习了流体力学的基本方程和要用到的变分原理），这一章的中心课题是讨论适用有限元素法分析的各种类型的流体力学问题。在这里读者可找到有限元素法的最新应用的论述。用有限元素法求解一个问题最终化为编制一个计算机程序，以建立

和求解一组联立方程。为了指导读者掌握这个过程，在第十章中提出了一个典型的程序，并加以详细的解释。在此，也讨论了关于在数字计算机上完成有限元素法计算的其他实际问题。

作者竭力使本书内容齐全，使得要应用有限元素法解决其特殊问题者只需学习一本教科书就够了。虽然本书对有限元素法分析的最重要的方面都作了讨论，但是限于篇幅，对于某些特殊问题只得作必要的省略或较大的删减。相信为了满足学生以及大多数从事实际工作的工程师和科学家的需要，这种处理是完全可以理解的。

在每章末的参考文献中，读者可以找到另外的资料或某些高等课题的进展细目。由于本课题的参考文献的急剧增多，因此所列的参考文献表是不全的，只是选取来代表某些较基本的研究工作。

K· H· 侯伯纳

一九七四年七月

于美国密执安州华伦市

目　　录

第 一 部 分

第 二 部 分

第一部分

第一章 有限元素法的提出

1.1 什么是有限元素法

有限元素法是使类型繁多的工程问题获得近似解的一种数值分析技术。虽然它最初是用来研究复杂的飞机结构中的应力，但是现在它已经发展并应用于连续介质力学的广阔领域。有限元素法作为一种数值分析工具，由于它的多样性和灵活性，目前在工科院校和工业上已引起了极大的注意。

虽然对于有限元素法的这一简短的评论已经回答了本节标题所提出的问题，但是它并没有给我们一个运算的定义，而这种运算定义正是我们应用有限元素法去求解特定问题所需要的。像这样一个运算定义与有限元素法原理的叙述放在一起需用较多的章节。因此本书的第一部分着重于叙述基本概念和基础理论。在详细讨论有限元素法的许多方面以前，我们首先应考虑导致它起源的某些情况，并且还应把它同其他数值计算方法进行简单的对比。

今天在越来越多的工程技术领域内，我们发现许多问题只需求出近似的数值解，而不需要正确的封闭形式的解。例如，我们可能需要求出具有一些加强筋和奇特形状孔的板的承载能力，需要求出在非匀质大气中污物的浓度，或者需要求出通过一个任意形状的管道流体的流量。不必花很大力气，便能写下这些问题的基本方程和边界条件，但是立即可以看出，不可能找到简单的解析解。在这三个例子中的困难在于以下的事实：即物体的几何形状或者问题的某些其他特征是不规则的或“任意的”。这类问题很少有解析解，而这类问题正是需要工程师和科学家们去解决的。

分析家的智慧常能机智地摆脱困境，并且提供克服这种困难的若干其他方法。一种可能性是作简化假设；回避难点，把问题简化为一个能够处理的问题。这种方法有时是可行的，但是通常将导致极不准确甚至是错误的解答。现在，随着大型数字计算机广泛地应用，一个比较可行的选择就是保留问题的复杂性，并尝试寻求近似的数值解。

在这些年来已发展了若干近似的数值分析法，而最常用的就是一般的有限差分法[1,2]㊀。熟知的某问题的有限差分模型可给出其基本方程的逐点近似。当采用较多的节点时，该模型(由列出网格点排列的差分方程所构成）便得到改进。借助于有限差分法的技术，我们能够处理某些相当困难的问题；但是举例来说，当我们碰到不规则的几何形状或者非常见的要特加说明的边界条件时，我们发现有限差分法就难以应用了。

除了有限差分法以外，出现了另一个较新的数值方法（称为“有限元素法”)。它不像有限差分法那样把求解区域看作是网格点的排列，有限元素法把求解区域看作由许多小的、互相连接的子区域或元素所构成。问题的有限元素法模型给出基本方程的分片近似。有限元素法的基本前提是：用一组离散元素集合体来代替求解区域，便能解析地模拟或逼近求解区域。因为这些元素可按各种不同的方式组合在一起，所以能用来表示极其复杂的形状。

作为怎样采用有限差分法模型和有限元素法模型来表示复杂几何形状的例子，现在来考察图（1.1）中涡轮叶片的横截面。对此部件来讲，我们可能是需要求出在给定的力荷载条件下的位移和应力分布，或者需要求出给定的热荷载条件下的温度分布。叶片内部的冷却油路以及它的外形使它呈现出复杂的几何形状。

一个均匀的有限差分法网格将会合理地布置在叶片（求解区域）上，但边界必须通过一系列水平线和垂直线（或梯级）来逼近。另一方面，有限元素模型（采用最简单的二维元素——三角

㊀ 括弧中的数字1,2代表章末参考文献的序数。

形元素）则为求解区域提供一个较好的近似，并且只需要较少的节点。又因为曲线边界为一系列直线所替代，所以对边界形状产生一个较好的近似。但是并不打算用这个例子来暗示，在所有的

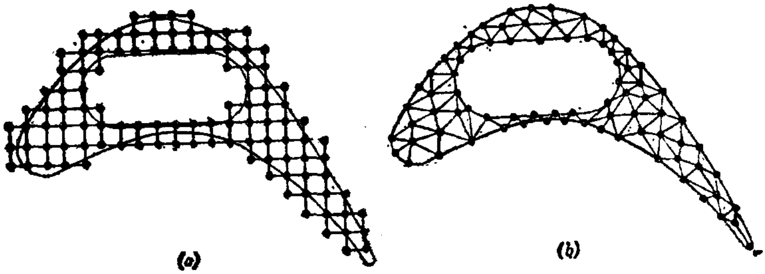

图1.1 用有限差分法和有限元素法将一个涡轮叶片的横截面离散化
(a)典型的有限差分法模型 (b)典型的有限元素法模型

问题中有限元素法模型绝对优于有限差分法模型。本例的唯一目的是用来说明，有限元素法特别适合于具有复杂几何形状的问题。

1.2 有限元素法怎样进行运算

我们一直在谈论有限元素法的实质，但是现在我们将加以详细地讨论。在任何维数的连续介质㊀问题中，场变量（无论它是压力、温度、位移、应力或者某些其他的量）具有无限多的值，因为它是物体或求解区域内每个点的函数，因此这是一个具有无限个未知数的问题。把求解区域分成很多元素，并用每个元素内假设的近似函数来表示未知的场变量，那么通过有限元素离散化过程便把问题简化为有限个未知数的问题。近似函数（有时称为插值函数）则由称为节或节点的指定点上的场变量值来确定。节点通常位于元素的边界上，相邻的元素被认为是在节点处互相连接在一

㊀ 我们把连续介质定义为物质（固体、液体或气体）的实体，或者简单地定义为发生特殊现象的空间区域。

起的。除边界节点外，元素也可能有一些内部节点。场变量的节点值和元素的插值函数完全确定了元素内部场变量的特性。因为一个问题用有限元素表示后，场变量的节点值变成了新的未知数。一旦求出这些未知数，则插值函数便确定了整个元素集合体的场变量。

很明显，解的性质和近似程度不但取决于所采用的元素的大小和数目，而且还取决于所选择的插值函数。正像人们所料想的那样，因为必须满足某些协调性条件，所以函数不能任意地选择。通常函数要选得使场变量或其导数在通过相邻元素的边界时是连续的。在第三章和第五章中将讨论选择插值函数的基本准则。这些准则被应用来建立各种不同的有效元素的公式。

到此为止，我们已经简单地讨论了用离散元素的集合体模拟任意形状的求解区域的概念；并指出插值函数必须是针对每个元素来定义的。然而，我们还未提到有限元素法的一个重要特点，它使得有限元素法不同于其他的近似数值方法。这个特点是在把各个单独的元素集合在一起表示整个问题之前，能够为各单独元素的解建立公式。这意味着，例如我们处理一个应力分析问题，我们能够求出各单独元素的力-位移特性亦即刚度特性，然后把这些元素集合起来而求出整个结构的刚度。其实质是把一个复杂的问题简化为考虑一系列大为简单的问题。

有限元素法的另一个优点是建立各单独元素特性公式的途径的多样性。有限元素法基本上有四种不同的方法。第一种得到元素特性的方法称为直接法，因为它的来源可直接追溯到结构分析的直接刚度法。虽然直接法只能用于比较简单的问题，但因第一次接触有限元素法时，它最易领会，故在第二章中作了介绍。直接法也建议应用矩阵代数（附录 A）处理有限元素方程。

由直接法得到的元素特性也可通过用途更广更高深的变分法来确定。变分法依靠变分计算（附录 B），并且涉及到泛函的极值问题。对于固体力学问题，泛函成为势能、余能、或者这些势能的导数，例如雷斯纳（Reissner）变分原理。变分法的知识