

非线性科学丛书

圆映射

陈式刚 编著

上海科技教育出版社

内 容 提 要

本书是“非线性科学丛书”中的一种,介绍圆映射及其描写的分岔与混沌行为。全书计分六章,即:圆映射描述的周期与准周期运动,圆映射的符号动力学,由准周期向混沌过渡的标度律,超临界圆映射的分岔行为与标度律,实际问题中的圆映射举例,作为圆映射在高维情况推广的环面映射。本书可供大学物理系、数学系教师,研究生和高年级学生阅读,也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

非线性科学丛书

圆 映 射

陈式刚 编著

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路393号 邮政编码:200235)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张:6 字数:153 000

1998年12月第1版 1998年12月第1次印刷

印数:1-3200

ISBN 7-5428-1855-4/O·209 定价:(精装本)12.40元

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：（按姓氏笔画为序）

丁鄂江	文志英	朱照宣
刘式达	刘寄星	孙义燧
杨清建	李邦河	张洪钧
张景中	陈式刚	周作领
赵凯华	胡 岗	顾 雁
倪皖荪	徐京华	郭柏灵
陶瑞宝	谢惠民	蒲富恪
霍裕平	魏荣爵	

出版说明

现代自然科学和技术的发展,正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科,与日新月异的新技术相结合,使用数值、解析和图形并举的计算机方法,推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征,可以概括为“非”字当头,即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中,非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”,而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时,非线性还被人们当作个性极强,无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法,运用新颖的技巧。诚然,力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程,物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过,这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品,人们还没有悟出它们的普遍启示,也没有看到它们之间的内在联系。

20世纪60年代中期,事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面,描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算,揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径,即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念,反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了80年代,反散射方法推广到量子问题,发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理。于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域。虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的。

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例。这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识。原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测。然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构。

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象。从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律。如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程。标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用。

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题。物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用。“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和。非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法。

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人員,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人員和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人員更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者們将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我们衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

Abstract

In this book an introduction to Circle Maps is given. Topics include the fundamental properties and symbolic dynamics of circle maps, the scaling law for transition from quasiperiod to chaos, the bifurcation behavior and scaling law of supercritical circle maps, some examples for circle maps in physical reality, and the torus maps as a generalization of circle maps from one dimension to high dimension.

目 录

第 1 章	圆映射描述的周期与准周期运动	1
§ 1	圆映射的定义	1
§ 2	可逆圆映射	5
§ 3	法里树的数论与法里序列的符号表示	10
§ 4	正弦圆映射参数平面上的相结构	16
§ 5	转数区间、阿诺尔德舌头、双稳和拓扑混沌	19
第 2 章	圆映射的符号动力学	23
§ 6	周期轨道的符号表示	23
§ 7	法里序列的符号动力学	26
§ 8	新生轨道与拓扑度定理	29
§ 9	法里序列与 M.S.S. 序列的 * 积及二元树	32
第 3 章	由准周期向混沌过渡的标度律	36
§ 10	标度行为的数值研究	36
§ 11	临界准周期轨道的分形结构	42
§ 12	重正化群分析	47
§ 13	临界线上转数阶梯标度性质的数值研究	51
§ 14	关于魔梯的重正化研究	57
§ 15	圆映射的一般标度性	60
第 4 章	超临界圆映射的分岔行为与标度律	71
§ 16	超临界圆映射的一般分岔行为	71
§ 17	$\omega = 0$ 超临界圆映射所描述的扩散行为	74

§ 18	接近临界线处阿诺尔德舌头的相似性	78
§ 19	倍周期分岔的矢量标度律	81
§ 20	菲波那契序列阿诺尔德舌头中分岔的相似性	88
§ 21	超临界圆映射的混沌测度及其标度律	90
第 5 章	实际问题中的圆映射举例	98
§ 22	周期驱动阻尼单摆、约瑟夫逊结与电荷密度波系 统	98
§ 23	周期强迫瑞利 - 贝纳德对流系统	106
§ 24	Frenkel-Kontorova 模型中的整体普适性	109
§ 25	可激振子的周期扰动与心脏的搏动节律	112
§ 26	神经原对周期脉冲的锁相与混沌响应	119
§ 27	累积 - 释放模型与由准周期至完全锁相的非混沌 转变	125
§ 28	调制弛豫振子的完全锁相与混沌	129
第 6 章	环面映射	137
§ 29	环面映射及其共振区	137
§ 30	关于环面映射的数值实验	142
§ 31	一个非线性电子振荡线路中的三频问题	149
§ 32	三频问题的重正化群分析	151
§ 33	准周期强迫圆映射	157
§ 34	非混沌奇怪吸引子的鉴别与实验观测	163
参考文献		169

Content

Chapter 1	Periodic and quasiperiodic motion described by circle maps	1
§ 1	The definition of circle maps	1
§ 2	Invertible circle maps	5
§ 3	Number theory of the Farey tree and symbolic representation of the Farey sequence	10
§ 4	Phase structure in parametric plan of the sine circle map	16
§ 5	Rotation intervals, Arnol'd tongues, bistability and topological chaos	19
Chapter 2	Symbolic dynamics of circle maps	23
§ 6	Symbolic representation of periodic orbits	23
§ 7	Symbolic dynamics of Farey sequence	26
§ 8	Newborn orbits and theorem for topological degree	29
§ 9	The $*$ product of Farey sequence and M.S.S. sequence and the binary tree	32
Chapter 3	Scaling law for transition from quasiperiod to chaos	36
§ 10	Numerical research on the scaling behavior	36
§ 11	Fractal structure of the critical quasiperiodic orbits	42
§ 12	Renormalization group analysis	46

§ 13	Numerical research on the scaling properties of rotation number staircase at critical line	51
§ 14	Renormalization group analysis for devil's staircase ..	57
§ 15	Universal scaling in circle maps	60
Chapter 4 Bifurcation behavior and scaling law of		
	supercritical circle maps	71
§ 16	General bifurcation behavior of the supercritical circle map	71
§ 17	The diffusion behavior described by supercritical circle map	74
§ 18	The similarity of the Arnol'd tongues near critical line	78
§ 19	Universal vector scaling of period-doubling bifurcation	81
§ 20	The similarity of the bifurcation in Arnol'd tongues for Fibonacci sequence	88
§ 21	Chaotic measures and scaling for supercritical circle map	90
Chapter 5 Examples for circle maps in physical		
	reality	98
§ 22	Periodically forced damped pendulum, Josephson junction and charge-density wave systems	98
§ 23	Periodically forced Rayleigh-Benard Convective fluid	106
§ 24	Global universality in the Frenkel-Kontorova model	109

§ 25	Excitable oscillator under periodic perturbation and rhythm of heartbeat	112
§ 26	Phase locking and chaotic responses of a biological neuron under periodic stimulation	119
§ 27	Integrate-and-fire models and the transition from quasiperiodicity to nonchaotic complete phase locking	125
§ 28	Complete phase locking and chaos in modulated relaxation oscillators	129
Chapter 6	Torus maps	137
§ 29	Torus maps and resonance regions	137
§ 30	Numerical experiments on N-frequency quasiperiodicity	142
§ 31	Three frequency competing in a nonlinear electronic oscillator circuit	149
§ 32	Renormalization group analysis for three frequency quasiperiod	151
§ 33	The quasiperiodically forced circle map	157
§ 34	Identification and experimental observation for a strange nonchaotic attractor	163
References		169

第 1 章

圆映射描述的周期与准周期运动

§1 圆映射的定义

周期外力作用下的弛豫振荡是一种常见的运动形式. 例如强迫非线性振子, 外加周期电流下的约瑟夫森结, 外场驱动的电荷密度波, 耦合振荡电路, 周期外力作用下的贝纳德对流, 窦房结驱动下心肌的搏动, 一定条件下自激励的神经元等. 这些运动通常可用三维相空间中的轨线来描述. 如按外力的周期采样, 可得一个二维映射. 这二维映射在强耗散极限下成为一维映射, 这个一维映射就是一种圆映射.

圆映射 的定义是: 由满足关系式

$$f(x+p) = p + f(x) \quad p \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

的实函数 $f(x)$ 所表示的映射

$$x \rightarrow f(x). \quad (1.2)$$

如把 $f(x)$ 写作

$$f(x) = x + g(x), \quad (1.3)$$

则 $g(x)$ 是 x 的周期函数: $g(x+p) = g(x)$. 由于 $g(x)$ 是周期函数, 相差整数的 x 可以看作是等价的, (1.2) 也可以写作

$$T: x \rightarrow f(x) \pmod{1}. \quad (1.4)$$

在这个意义上, T 是圆到圆的映射 $S^1 \rightarrow S^1$, 简称 **圆映射**, 也称 **庞加莱映射**. 映射 (1.2) 与 (1.4) 虽然是等价的, 但 (1.2) 是实轴上的映射, (1.4) 是圆上的映射. 为了表示这种差别, 称 (1.2) 为 **圆映射的提升**.

(1.1) 还可推广为

$$f(x+p) = pN + f(x). \quad (1.5)$$

其中 N 是整数, 称为相应的圆映射 (1.2) 或 (1.4) 的 **拓扑度**. $N=0$ 相当于一种区间映射. $|N| > 1$ 的映射总有大于 0 的拓扑熵. $N=-1$ 的光滑映射总是通过倍周期分岔到达混沌. 最有物理意义的情况是 $N=1$, 它描写由准周期到混沌的转变, 本书着重讨论 $N=1$ 的圆映射.

被研究得最多的圆映射是标准正弦圆映射

$$f_{\omega,k}(x) = x + \omega - (k/2\pi) \sin(2\pi x). \quad (1.6)$$

它所描述的系统是周期脉冲沿固定方向作用于其一定点上的有摩擦力与外加转矩的转子, 曾作为周期强迫非线性振子模型而提出. 考虑如图 1-1 所示的有一周期性脉冲外力作用于其上的转子^[1]. 它的运动方程为

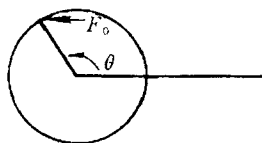


图 1-1

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum_n r F_0 \sin \theta \delta(t - NT).$$

在外力周期 T 内对上式积分, 得

$$I(\omega_{n+1} - \omega_n) = r F_0 \sin \theta_n, \quad \theta_{n+1} - \theta_n = \omega_{n+1} T.$$

适当地重新定义变量与参数, 上式可以写为

$$J_{n+1} = J_n + k \sin \theta_n, \quad \theta_{n+1} - \theta_n = \omega_{n+1} T. \quad (1.7)$$

(1.7) 称为标准映射, 是保守系混沌理论中有现实背景的最基本的映射, 是任意二维保守映射共振区的局部近似, 因而有普适意义. 进一步考虑一耗散系统, 设转子有外加力矩 M 与摩擦力矩 $-\gamma\omega$, 则运动方程成为

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega, \\ I \frac{d\omega}{dt} &= M - \gamma\omega + \sum_n r F_0 \sin \theta \delta(t - nT). \end{aligned}$$

作替换 $\omega = M/\gamma + \Omega e^{-\gamma t/I}$, 上述第二式变为

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \sum_n r F_0 e^{\gamma t/I} \sin \theta \delta(t - nT).$$

对运动方程积分, 得

$$\begin{aligned} I(\Omega_{n+1} - \Omega_n) &= r F_0 e^{\frac{\gamma}{I} nT} \sin \theta_n, \\ \theta_{n+1} - \theta_n &= MT/\gamma + \Omega_{n+1} \frac{I}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{I} T}) e^{-\frac{\gamma}{I} nT}. \end{aligned}$$

将 $\Omega_n = \left(\omega_n - \frac{M}{\gamma}\right) e^{\frac{\gamma n}{I} T}$ 代入, 重新定义变量与参数后, 得

$$J_{n+1} - 1 = \lambda(J_n - 1) - (k/2\pi) \sin(2\pi\theta_n),$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega + J_{n+1} - 1. \quad (1.8)$$

式中 $\lambda = e^{-\frac{\gamma}{T}}$, $\omega = MT/2\pi\gamma$, $k \propto rF_0$ 为参量. 式 (1.8) 的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(J_{n+1}, \theta_{n+1})}{\partial(J_n, \theta_n)} = \lambda,$$

所以 λ 为映射 (1.8) 的收缩因子. 在强耗散的极限情况 $\lambda = 0$, 可从 (1.8) 中消去 J , 得到

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n),$$

此即映射 (1.6). 由推导过程可知, ω 为外力周期与无脉冲外力时转子周期之比, k 代表周期脉冲外力与转子的耦合强度.

当 $f(x)$ 是 x 的连续单调函数, 例如正弦圆映射 (1.6) 中的 $|k| \leq 1$ 时, 可对 f 的序列

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1.9)$$

唯一地定义转数

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0)/n. \quad (1.10)$$

以后将可看到, 它与初值 x_0 无关. $\rho(f)$ 是转子转数与外力周期数之比. $\rho(f)$ 是有理数时, 系统作周期运动; $\rho(f)$ 是无理数时, 系统作准周期运动. 当 f 由单调变为非单调时, 准周期运动首先变成混沌运动. 因此圆映射被作为由准周期向混沌转变的典型系统来研究, 其转变临界点处的标度律对于这类转变具有普适性.

茹厄勒 (D. Ruelle) 和塔肯斯 (F. Takens) 曾提出三频准周期向混沌过渡的机制^{[2],[3]}, 称为“通向混沌的茹厄勒 - 塔肯斯之

路”。其论证向混沌过渡的思路是：三频准周期由三维环面 T^3 描述，如以其中之一的周期采样，则得一二维映射；对其作扰动，可以产生混沌运动。这种思路与前面所述的论证二频准周期向混沌过渡的思路相同。不同的是，我们的研究都是基于物理定律的，物理规律的基础是牛顿力学。牛顿力学中的一个自由度由两个变量描述，因此二频准周期也要用三维空间描述。这样，不一定要有三频准周期，二频准周期也会过渡到混沌。

以后将可看到，三频准周期向混沌过渡时不存在标度律。一般地说，标度律具有普适性。二频准周期向混沌过渡时具有标度律，因此，对它的研究有更基本的意义。

§2 可逆圆映射

连续单调圆映射是可逆的。对于可逆圆映射，通过庞加莱 (H. Poincare)^[4] 与 A. Denjoy^[5] 的经典工作，已有了透彻的了解。下面引用几个定理表述它的性质^[6]。

定理 1 对单调圆映射 $T : x \rightarrow f(x) \pmod{1}$ ，存在与初值 x_0 无关的极限 (1.10)，即转数 $\rho(f)$ ，当且只当对某正整数 n ， $f^{(n)}(x)$ 有不动点时， $\rho(f)$ 为有理数。

证明 先设至少有一 x_0 使极限 (1.10) 存在。选任意 $x \in \mathbb{R}^1$ ，取整数 m 使

$$x_0 + m \leq x \leq x_0 + m + 1.$$

因为对任意 n ， $f^{(n)}(x)$ 是单调的，据 (1.3) 有

$$f^{(n)}(x_0) + m \leq f^{(n)}(x) \leq f^{(n)}(x_0) + m + 1.$$