

FUHE CAILIAO LIXUE

复合材料力学

吕恩琳 编著



重庆大学出版社

复 合 材 料 力 学

吕 恩 琳 编 著

重 庆 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书以各向异性体弹性力学基本方程为基础，以实用的宏观力学方法为主，系统地介绍了纤维增强复合材料——单向板、多向层合板以及层合梁的弹性特性、强度特性、湿热效应、耦合效应等方面的经典理论；还介绍了层合板的层间应力分析方法以及横向剪切变形理论和高阶理论；给出了预测复合材料工程常数的细观力学方法；最后还介绍了层合结构的优化设计方法。对书中讲述的部分计算过程给出了用FORTRAN语言编制的计算程序。

本书可供高等院校机械、土建、化工、材料、力学、航空、航天、造船、能源、汽车等专业高年级学生和研究生使用，也可供从事上述专业工作的科技人员参考。

复 合 材 料 力 学

吕恩琳 编著

责任编辑 周 任

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆大学出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16印张：16.25 字数：406 千

1992年1月第1版 1992年1月第1次印刷

印数：1—3000

标准书号：ISBN 7-5624-0416-X 定 价：4.26元
TB·3

前 言

材料、能源、信息是现代科学技术的三大支柱，当今世界上的新技术革命就是依靠电子、材料、能源等方面的重大突破来实现的。随着材料科学的发展，各种性能优良的新材料不断地出现，并立即得到广泛的应用，复合材料就是新材料家族中的主要一员。复合材料是包含多学科、多层次的一门综合性学科，其中对复合材料的力学性能的研究占有非常重要的地位。历年来，国内外发表的有关复合材料的学术论文中，关于复合材料力学方面的总是占绝对多数。目前，复合材料力学正处于蓬勃发展的阶段，国内许多高等院校的有关专业都已将复合材料力学列入了本科生和研究生的选修或必修课程。本书是作者在自己编写的一本讲义的基础上，结合近几年为本科生和研究生教学的经验与体会，并参考国内外新近文献编写而成的。

书中以各向异性体弹性力学基本方程为基础，系统地介绍了单向板、多向层合板以及层合梁的弹性特性、强度特性、湿热效应、耦合效应等方面的经典理论；还介绍了层合板的弯曲、稳定与振动分析以及层间应力和横向剪切变形影响的处理。由于复合材料的一个显著特点是具有可设计性，所以书中在不同的层次上讨论了复合材料的优化设计问题。由于复合材料是各向异性的，因而计算过程比较复杂，为此书中给出了部分计算过程的 FORTRAN 程序。这些程序都是以子程序形式编写的，读者可根据需要灵活地调用它们。这些程序对于培养在校学生的电算能力，或是对于工程设计人员解决实际问题都会带来方便。

作者希望通过本书，使读者能在较短的时间内掌握复合材料力学以及复合材料结构分析与设计中最基本的原理和方法，为继续深造打下坚实的基础。

阅读本书所需要的预备知识是材料力学和弹性力学基础。

张培源教授对本书手稿进行了详细的审阅，提出了很多宝贵的意见，作者谨向他表示衷心的感谢。

限于作者的学识水平和工作经验，书中谬误之处必然很多，恳请读者批评指正。

吕恩琳

1990年6月于重庆

目 录

前 言

第一章 绪论	(1)
§ 1 - 1 复合材料的定义和种类.....	(1)
§ 1 - 2 复合材料的特性.....	(2)
§ 1 - 3 复合材料的应用.....	(3)
§ 1 - 4 复合材料力学分析的主要特点.....	(4)
第二章 各向异性体弹性力学基本方程	(6)
§ 2 - 1 应力.....	(6)
§ 2 - 2 应变.....	(9)
§ 2 - 3 应力和应变关系.....	(13)
习题.....	(23)
第三章 单向层合板的弹性特性	(24)
§ 3 - 1 单向板的正轴弹性特性.....	(24)
§ 3 - 2 单向板的偏轴弹性特性.....	(28)
§ 3 - 3 单向板的工程常数.....	(38)
§ 3 - 4 计算程序.....	(43)
习题.....	(50)
第四章 多向层合板的弹性特性	(53)
§ 4 - 1 一般层合板的刚度.....	(53)
§ 4 - 2 对称层合板的刚度.....	(64)
§ 4 - 3 反对称层合板.....	(67)
§ 4 - 4 规则非对称正交层合板.....	(69)
§ 4 - 5 层合板的刚度变换.....	(70)
§ 4 - 6 计算程序.....	(73)
习题.....	(78)
第五章 单向复合材料的强度理论	(80)
§ 5 - 1 单向板的基本强度.....	(80)
§ 5 - 2 最大应力理论.....	(81)
§ 5 - 3 最大应变理论.....	(83)
§ 5 - 4 蔡-希尔(Tsai-Hill) 理论.....	(83)
§ 5 - 5 蔡-吴(Tsai-Wu) 张量理论.....	(85)
§ 5 - 6 强度比方程.....	(89)
§ 5 - 7 计算程序.....	(92)
习题.....	(94)

第六章 湿热效应	(95)
§ 6-1 单向板的热弹性与湿弹性.....	(95)
§ 6-2 多向层合板考虑湿热变形的本构关系.....	(98)
§ 6-3 层合板的残余应变和残余应力.....	(101)
§ 6-4 残余应力对复合材料强度的影响.....	(103)
§ 6-5 计算程序.....	(104)
习题.....	(106)
第七章 多向层合板的强度	(107)
§-1 铺层 应力计算.....	(107)
§ 7-2 最上一层失效强度.....	(119)
§ 7-3 层合板的最上一层失效包络面.....	(121)
§ 7-4 层合板的极限强度.....	(123)
§ 7-5 计算程序.....	(126)
习题.....	(143)
第八章 层合板的弯曲、屈曲与振动	(144)
§ 8-1 层合板的弯曲.....	(144)
§ 8-2 层合板的屈曲.....	(154)
§ 8-3 层合板的横向振动.....	(161)
§ 8-4 耦合刚度对层合板力学性能的影响.....	(163)
习题.....	(167)
第九章 层间应力和横向剪切变形分析	(168)
§ 9-1 横向载荷作用下的层间应力分析.....	(168)
§ 9-2 面内载荷作用下的层间应力分析.....	(171)
§ 9-3 层间应力的分布规律.....	(176)
§ 9-4 一阶横向剪切变形理论.....	(180)
§ 9-5 高阶变形理论.....	(187)
习题.....	(194)
第十章 层合梁	(195)
§10-1 经典层合梁理论.....	(195)
§10-2 承受横向载荷的层合梁.....	(199)
§10-3 承受轴向载荷的层合梁.....	(202)
§10-4 横向剪切变形理论.....	(204)
习题.....	(215)
第十一章 复合材料的细观力学	(216)
§11-1 引言.....	(216)
§11-2 工程常数的材料力学分析方法.....	(217)

§11-3	工程常数的弹性力学分析方法.....	(220)
§11-4	预测工程常数的修正公式.....	(224)
§11-5	强度的材料力学分析方法.....	(224)
§11-6	湿、热膨胀系数的细观力学分析.....	(230)
	习题.....	(233)
第十二章	层合结构的优化设计.....	(235)
§12-1	纤维螺旋缠绕压力容器筒身段的设计.....	(235)
§12-2	层合圆杆的设计.....	(237)
§12-3	层合梁的优化设计.....	(238)
§12-4	层合板的优化设计.....	(242)
主要参考书目	(249)

第一章 绪 论

§ 1-1 复合材料的定义和种类

复合材料是指由两种或两种以上的材料组成的一种新材料，它的组分材料具有不同的化学或物理性质，且各组分材料之间具有明显的界面。在工程上，所谓复合材料通常是指将一种材料人为均匀地分散在另一种材料中，以克服单一材料的某些弱点，使之具有优于各组分材料的综合性能，有时甚至是组分材料所没有的优良性能的新材料。组分材料中的分散相材料称为增强材料，包容相材料称为基体。例如纤维增强塑料，就是由拉伸强度大、模量高但却很脆的纤维分散在拉伸强度小、模量低但韧性较大的塑料基体中而得到的。这种复合材料的很多力学性能指标超过了一般钢材，在国民经济建设中得到越来越广泛的应用。

复合材料的种类很多，表 1-1 归纳了按 3 种不同分类方式的结果。按照增强材料的形状，复合材料可以分为颗粒增强复合材料和纤维增强复合材料。前者的增强材料呈微小的颗粒状，对于直径为 $0.01 \sim 0.1 \mu\text{m}$ 的细微颗粒的分散相材料，由于具有阻止复合材料位错运动而起到增强作用；而对于直径为 $1 \sim 50 \mu\text{m}$ 的微小颗粒，则具有阻止复合材料变形或硬化而起到增强作用。纤维增强复合材料的分散相材料是直径极细的纤维，这种纤维与同材质的块状材料相比，其显著特点是强度高，如块状玻璃的拉伸强度仅为 200MPa ，而玻璃纤维的拉伸强度可高达 4000MPa 。虽然纤维比较脆，易折断，但当它被均匀地分散在韧性好的基体（如塑料）中时，由于基体把纤维分别固定起来，起到保护纤维并使之不易折断的作用。这样，该复合材料就能承受较大的载荷而不失效。

表 1-1 复合材料的种类

分类的方式	名 称	说 明
按分散相材料分	颗粒增强复合材料	分散相为微小颗粒构成的复合材料
	纤维增强复合材料	分散相是由直径近于晶体大小的纤维构成的复合材料
按基体相材料分	金属基复合材料	基体相材料为金属构成的复合材料。依据金属材料的不同种类有铝基复合材料、钛基复合材料等
	非金属基复合材料	基体相材料为非金属构成的复合材料。依据非金属材料的不同种类，有塑料基复合材料、陶瓷基复合材料、橡胶基复合材料等
按应用情况分	工程复合材料	通常指在工程上已广泛应用的复合材料，如玻璃纤维增强塑料（俗称玻璃钢）
	先进复合材料	象碳、硼、芳纶等纤维增强的塑料，这种复合材料的比强度、比模量比较大

本书研究的对象是目前在工程中应用最广泛的一类复合材料：纤维增强复合材料。图 1

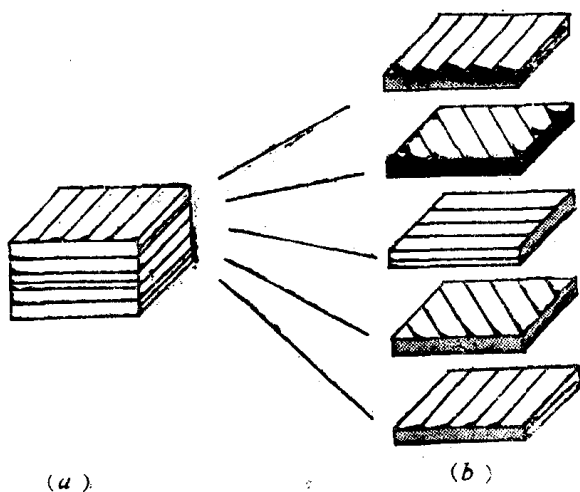


图 1-1

1-1a所示的层合板就是一种典型的纤维增强复合材料，它由图1-1b所示的5个铺层紧密粘合在一起而制成。如果把某一铺层单独分离出来进行研究，习惯上便将其称为单层板，因此也可以说图1-1a的层合板是由5个单层板粘合而成的。由于单层板是层合板的基本组成部分，所以本书将先研究单层板的力学特性，然后研究层合板的力学特性。

§ 1-2 复合材料的特性

复合材料之所以得到迅速发展和广泛应用，是由于复合材料与传统材料（主要是金属材料）相比较，具有很多优点，主要是：

1. 比强度和比模量高

1. 比强度和比模量高

强度除以密度、模量除以密度之值，在很多情况下是度量材料承载能力的一个极重要的指标。表1-2给出了几种高强度工程材料性能之间的比较。仅就强度和刚度而论，复合材料并不具有明显的优越性，但当考虑到材料单位密度的模量（比模量）和单位密度的强度（比强度）时，复合材料的优点便十分明显了。具有高的比模量和比强度就意味着可以减轻构件的重量。这一点对于运动构件，特别是各种形式的运输工具是很重要的，对于非常注重重量的航空航天设备而言，这更是一类理想的材料，因为减轻重量就可以提高效率和节省能源。

表1-2 常用金属材料 and 纤维增强复合的比强度和比刚度值

料 料 名 称	密 度 (g/cm ³)	拉 伸 强 度 (GPa)	弹 性 模 量 (GPa)	比 强 度 (×10 ⁷ cm)	比 刚 度 (×10 ⁸ cm)
钢	7.8	1.010	205.940	0.13	0.27
铝	2.8	0.461	73.550	0.17	0.26
玻璃/环氧	2.0	1.040	39.227	0.53	0.20
碳/环氧	1.6	0.990	235.360	0.63	1.50
硼/环氧	2.1	1.353	205.940	0.66	1.00
凯美拉49/环氧	1.45	1.353	75.511	0.95	0.53
硼/铝	2.65	0.981	196.133	0.38	0.75

2. 具有可设计性

我国著名学者钱学森说：“可以让工程设计人员、力学工作者，和材料工作者一道工作，再加上电子计算机，把一项工程设计一直设计到细观或微观的水平，而不是象过去那样材料只能选用不能设计，材料工作和工程设计分两段干的局面，这个新的发展将大大提高将

来工程设备的使用性能。”复合材料正具有这种可设计的优点，因为复合材料的性能，除了取决于纤维和基体本身的性能外，在很大程度上还取决于纤维的含量及铺设方式，这样就可以根据实际需要进行优化设计。例如承受内压的圆筒，其环向应力是轴向应力的两倍，根据计算，可以在与圆筒轴线成正负 54.7° 的方向上铺设等量纤维而实现优化设计，也可以按2:1的比例在环向与纵向铺设纤维。

3. 抗疲劳性能好

疲劳破坏是材料在交变载荷作用下，由于裂缝的形成和扩展而形成的低应力破坏。金属材料的疲劳破坏是由里向外突然发展的，事前没有任何预兆，例如飞机坠毁的主要原因之一就是疲劳破坏；而纤维增强复合材料中纤维与基体的界面能阻止裂纹的扩展，因此其疲劳破坏总是从纤维的薄弱环节开始，逐步扩展到结合面上，破坏前有明显的预兆。大多数金属材料的疲劳极限是其拉伸强度的40~50%，而碳纤维聚脂树脂复合材料则可达70~80%。

4. 减振性能好

结构的自振频率除与结构本身形状有关外，还与材料的比模量的平方根成正比。高的自振频率可以避免工作状态下的共振而引起的早期破坏。此外，复合材料的纤维与基体间的界面具有吸振能力，因此其振动阻尼很高。例如对相同形状和尺寸的梁进行的试验可知，轻金属合金梁需9秒钟才能停止的振动，碳纤维复合材料只需2.5秒钟就停止了。

5. 高温性能好

一般铝合金在 400°C 时，其弹性模量大幅度下降并接近于零，强度也显著下降，而用碳纤维增强的铝合金能在 400°C 高温下长期工作，力学性能稳定。纤维增强陶瓷基复合材料能承受 $1200\sim 1400^\circ\text{C}$ 的高温，碳/碳复合材料甚至能承受 3000°C 的高温。

6. 破损安全性好

纤维复合材料中有大量独立的纤维，每平方厘米上的纤维数有几千根至几万根，因而是典型的静不定体系。当这类材料的构件超载并有少量纤维断裂时，其载荷会迅速重新分配在未破坏的纤维上，这样使构件不致在短期内迅速丧失承载能力。

7. 制造工艺简单

复合材料适合于整体成型，并且能用模具制造构件，可一次加工成型，从而减少了零部件、紧固件和接头的数目，因此缩短了生产周期，降低了成本。例如验证试验用的F-16的复合材料前机身段，由于采用了碳纤维复合材料，零件数从金属的968个减少到642个，并且使新的结构比原结构轻53kg。

§ 1-3 复合材料的应用

由于复合材料具有很多独特的优点，因而在工程中的应用迅猛增长，方兴未艾。表1-3给出了塑料基纤维增强复合材料的某些应用。

从50年代到60年代初期，玻璃纤维增强复合材料曾大量用于导弹武器和航天飞行器上。用玻璃纤维缠绕成型的大型固体火箭发动机燃烧室比金属结构减重一半以上，如美国的北极星-II壳体由S-994纤维缠绕代替高强合金钢结构，其重量由原238kg减轻为97kg，使该导弹的射程由1600km增加到2400km。美国从本世纪40年代起开始生产玻璃钢，日本始于50年代中期。我国的玻璃钢工业从1958年开始，最初在军事和建筑部门，现在渗透到了国民经济的

表1-3

塑料基纤维增强复合材料的应用

行 业	实 例
飞机制造	机翼、机身、起落架、直升飞机旋翼叶片
汽车制造	车身、灯壳罩、前后护板、保险横杠、板弹簧、座椅架、驱动轴
造 船	船壳体、甲板、桅杆
化 工	管道、储油罐、压力容器
家具与设备	各种台板、住房、椅子、桌子、梯子
电气工业	仪表面盘、配电盘、绝缘材料
运动器材	鱼杆、高尔夫球杆、游泳池、滑雪板、游艇

各个领域。我国已用玻璃蜂窝夹层材料制成直升飞机的旋翼和直径几十米的雷达天线罩。随着我国战略导弹及空间技术的发展，高弹、高强玻璃纤维缠绕结构已经用于制造固体火箭发动机壳体和各种蓄压器，玻璃钢已用于制造导弹弹头的防热结构和回收卫星的再入舱。在民用工业中，玻璃钢的应用更是比比皆是，玻璃钢瓦、冷却塔、游艇等就是最常见的产品。

为了提高复合材料的性能，现在研究和发展的许多新型的纤维和晶须材料。用它们作为增强相的复合材料称为高级复合材料或称为第二代复合材料。碳纤维复合材料是它们的典型代表。碳纤维的优异性能表现在密度低、强度高、模量高、热膨胀系数小并能耐多种介质的腐蚀，是一种较为理想的增强材料。美国目前已用碳/环氧复合材料制造飞机的机身、翼尖安定面、起落架、舱门、地板等构件；全复合材料的飞机已经试飞成功；在导弹和航天飞行器上应用碳纤维增强复合材料的更多。我国对碳纤维的发展始于60年代中期，目前碳纤维的质量和产量正不断提高，开展研制或投入应用的有飞机发动机风扇叶片、进气道外侧壁板、舱口盖、垂直尾翼及水平尾翼翼面、直升飞机旋翼、卫星壳体、太阳能电池基板、天线及天线支架等。

1968年美国杜邦公司研制成功一种高强度，高模量的有机纤维——芳纶，1972年正式投入生产，商品名称为Kevlar。芳纶抗拉强度大、弹性模量高、密度小且易于同树脂亲和，是制造结构复合材料的良好增强材料。美国近年来已在飞机和宇宙飞行器上大量使用这种材料。现在芳纶已完全代替高强玻璃纤维制成大型固体火箭发动机燃烧室壳体。我国已经开始研制芳纶及其复合材料。

作为复合材料的发展方向，混杂复合材料的呼声很高。这种复合材料采用两种或两种以上的纤维作为增强材料，使制成的产品性能更优良。

§ 1-4 复合材料力学分析的主要特点

在复合材料可供利用的各种优异性能中，力学性能处于最重要的地位。从力学分析的角度看，复合材料同常规材料（如金属材料）的显著区别是，后者被看作是均质的和各向同性的，而前者是非均质和各向异性的。所谓均质就是物体各点的性能相同，也就是说物体的

性能不是物体内位置的函数，而非均质正好与此相反。所谓各向同性就是在物体内一点的每个方向上都表现有相同的性能，也就是说某点的性能不是该点方向的函数，而各向异性则正好与此相反。

一种材料可以视为均质的，也可以视为非均质的，这取决于分析时观察问题的尺度。从微观（原子水准）来看，任何材料都是不连续的和非均质的。当所考虑的维度增大到某种程度时，原子结构在分析中便失去了意义，连续介质力学理论开始有效，对于常规材料，即可视为均质的，而对于复合材料则不然，例如多向层合板在厚度方向的非均质性是十分明显的。即使对于单向板，由于存在明显的相间界面，也必须运用非均质力学的方法以尽可能准确地描述各相中的真实应力场和应变场。上述方法也称为“细观力学”方法。细观力学方法的主要目标是利用各组分材料的力学性能参数去预测复合材料的宏观力学性能。所谓“宏观力学”方法是指假定单向复合材料是均匀的，而将各相材料的影响仅仅作为复合材料的平均表现性能来考虑。在宏观力学中，应力和应变定义在比各相特征尺寸大得多的尺度上，这样定义的应力和应变称为宏观应力和宏观应变，它们既不是基体的应力和应变，也不是增强相的应力和应变，而是在宏观尺度上的某种平均值。在宏观力学中，各类材料参数在理论上可以从细观力学分析得到，但实际上由于细观力学方法尚不够成熟，故通常需用实验来获取这些参数。

由于复合材料的各向异性和非均质性，导致有关的计算过程变得相当复杂和繁琐，如果有条件使用计算机解题，那是再好不过的了，在计算机不断推广和普及的今天，应该说这并非难事。为此，本书用 FORTRAN 语言为部分算法编制了参考程序，这些程序不仅可以作为教学参考，还可直接用于科研和某些实际工程结构的分析和设计。这些程序的移植和扩充都很方便。

第二章 各向异性体弹性力学基本方程

通常材料力学、弹性力学教材是以均质各向同性材料为研究对象的。这是因为作为工业主要材料使用的金属材料，尽管从微观水平上看未必是均质各向同性的，但是在宏观上将其视为均质各向同性材料处理，所得到的结果是足够精确的。所谓均质各向同性，意味着在该材料内的任一点的任一方向上有相同的力学、热学、电学等物理性质。一般的复合材料，特别是长纤维增强复合材料，由于纤维和基体的物理特性差异太大，所以即使从宏观角度来看，也呈现出较强的各向异性。本章介绍各向异性体弹性力学基本方程是今后各章的基础。

§ 2-1 应 力

一、应力分量和平衡微分方程

应力是物体内力的度量，是物体内力分布的集度。在物体内的某一点 P (图 2-1)，不同方向截面上的应力的方向和大小是不同的。为了显示该点处的应力，可以用三对无限邻近的坐标平面在 P 点处假想地切割出一个正六面体微元 $PABCD$ (图 2-2)。微元体每个侧面上单位面积的内力称为作用在相应侧面上的应力向量。将每一侧面上的应力向量分解到与坐标平行的方向上，如图 2-2。图中垂直于作用面的应力分量 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} 称为法向应力或正应力，其余的平行于作用面的应力分量 σ_{xy} 等称为剪应力。应力符号的双下标中，第一个表示作用面的外法线方向，第二个表示应力分量的指向。应力的正负号可按这两个下标的指向来判定：如果作用面的外法线指向坐标系中相应坐标轴的正向，而应力分量也指向对应坐标轴的正向，则此应力分量为正；当两个下标中只有一个指向坐标轴的正向时，该应力分量就为负。图 2-2 中所示应力分量都是正的。注意上述正负号的规定，对于正应力来说，

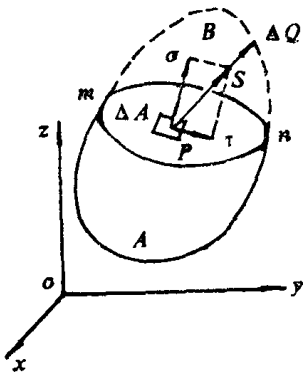


图 2-1

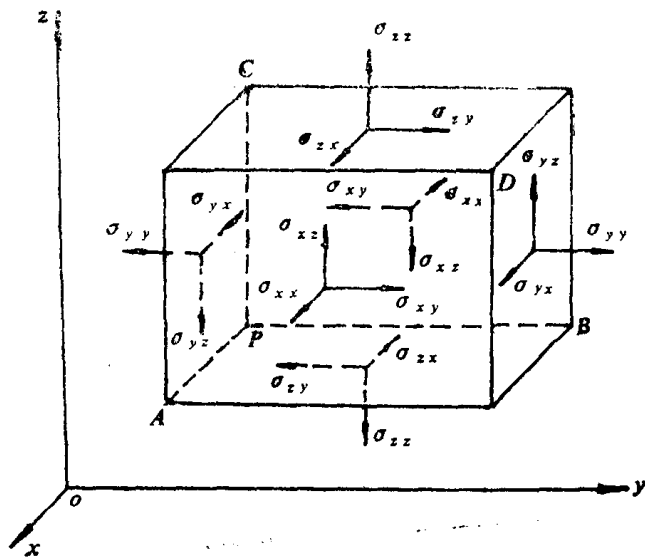


图 2-2

结果和材料力学中的规定相同，但对于剪应力来说，结果和材料力学中的规定不完全相同。

将 9 个应力分量用矩阵形式写成

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

称 (σ) 为应力张量。用简单的方法就可以证明 6 个剪应力之间具有如下的互等关系

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (2-2)$$

因此应力张量是对称张量。于是微元体上只剩下 6 个独立的应力分量，即 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} 、 σ_{xy} 、 σ_{yz} 、 σ_{zx} 。以后可以证明，在物体内的任意一点，如果已知这 6 个分量，便可求得经过该点的任意截面上的正应力和剪应力。因此，一点的应力张量 (σ) 可以完全确定该点的应力状态。

为了方便，有时使用应力分量的简写符号，它们之间的关系列在表 2-1 中，凡是表中位于同一行的符号均表示同一物理量，以后不再说明。

表 2-1 应力张量符号与简写符号对照表

张量符号	简写符号
σ_{xx} σ_{11}	σ_x σ_x σ_1 σ_1
σ_{yy} σ_{22}	σ_y σ_y σ_2 σ_2
σ_{zz} σ_{33}	σ_z σ_z σ_3 σ_3
σ_{xy} σ_{21}	τ_{yx} σ_t σ_t τ_{21}
σ_{xz} σ_{31}	τ_{zx} σ_r σ_r τ_{31}
σ_{yz} σ_{12}	τ_{zy} σ_s σ_s τ_{12}

物体各点的应力，一般说来是不相同的，可以用坐标的连续函数来表示

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y, z)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y, z)$$

.....

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z)$$

因此，作用在体微元两对面上的应力分量有微小增量。由于体微元是无限小的，因而可以认为其各面上的应力是均匀分布的，若体微元还受到体积力的作用，则体积力在体微元内的分布也可以认为是均匀的。

若物体在外界因素作用下处于平衡状态，则体微元在应力和体积力作用下也应当处于平衡状态。由体微元的静力平衡条件可以求得

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0$$

(2-3)

以及式 (2-2)。上式中的 X 、 Y 、 Z 为作用于体微元的体积力分量。式 (2-3) 即平衡微分方程。

二、斜面应力

现在假定物体任一点 P 的 6 个应力分

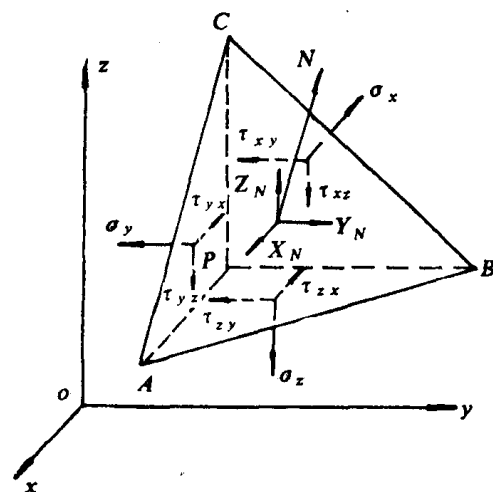


图 2-3

量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 为已知, 欲求经过 P 点的任一斜面上的应力。为此, 在 P 点附近取一个四面体微元 $PABC$ (图2-3)。斜面 ABC 的外法线为 N , 令 N 的方向余弦为

$$\begin{aligned}\cos(N, x) &= l \\ \cos(N, y) &= m \\ \cos(N, z) &= n\end{aligned}$$

设 ΔABC 的面积为 ΔS , 则 $\Delta BPC, \Delta CPA$ 和 ΔAPB 的面积分别为 $l\Delta S, m\Delta S$ 和 $n\Delta S$; 四面体 $PABC$ 的体积用 ΔV 代表; 三角形 ABC 上的应力 S_N 在坐标轴方向的分量用 X_N, Y_N 和 Z_N 代表。由四面体的平衡条件 $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$ 和 $\Sigma F_z = 0$ 可以求得

$$\begin{aligned}X_N &= l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} \\ Y_N &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ Z_N &= l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z\end{aligned}\quad (2-4)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} X_N \\ Y_N \\ Z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}\quad (2-5)$$

当平面 ABC 无限趋近于 P 点时, X_N, Y_N 和 Z_N 便为过 P 点外法线方向为 N 的截面上的应力。

三、应力转轴公式

现在研究坐标转轴时对应力分量的影响。假如原来的坐标系是 (x, y, z) , 转轴后的新坐标系是 (x', y', z') , 如图2-4。令 x', y', z' 轴对于原来坐标轴的方向余弦分别为 $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3$ 。新旧坐标系间的关系列于表2-2。

表2-2

旧系 \ 新系	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

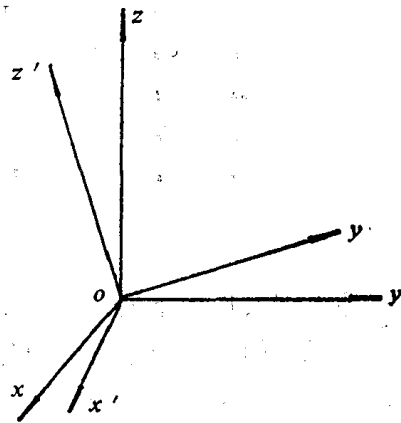


图2-4

在物体任一点, 分别取外法线方向为 x', y' 和 z' 的三个斜截面, 则这些斜截面上的应力沿着 x, y 和 z 坐标方向的分量可以按式(2-5)求得, 把它们合并在一起写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} X_{x'} & X_{y'} & X_{z'} \\ Y_{x'} & Y_{y'} & Y_{z'} \\ Z_{x'} & Z_{y'} & Z_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}\quad (2-6)$$

再将这些应力分量向新坐标轴方向投影, 例如在 x' 面上的 $X_{x'}, Y_{x'}$ 和 $Z_{x'}$ 向 x' 方向投影, 得 $\sigma_{x'}$ 为

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= X_{x'}\cos(x, x') + Y_{x'}\cos(y, x') + Z_{x'}\cos(z, x') \\ &= X_{x'}l_1 + Y_{x'}m_1 + Z_{x'}n_1\end{aligned}$$

将所有分量的投影结果合并在一起，写成矩阵形式，得

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{x'} & X_{y'} & X_{z'} \\ Y_{x'} & Y_{y'} & Y_{z'} \\ Z_{x'} & Z_{y'} & Z_{z'} \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

将式(2-6)代入式(2-7)，得应力分量转轴公式

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \quad (2-8a)$$

简记为

$$\{\sigma'\} = \{l\} \{\sigma\} \{l\}^T \quad (2-8b)$$

将式(2-8a)展开，并按一定次序排列应力分量，可以得到另一种形式的应力分量转轴公式

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 & 2l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 & 2l_2m_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 & 2l_3m_3 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & m_2n_3+m_3n_2 & n_2l_3+n_3l_2 & l_2m_3+l_3m_2 \\ l_3l_1 & m_3m_1 & n_3n_1 & m_3n_1+m_1n_3 & n_3l_1+n_1l_3 & l_3m_1+l_1m_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & m_1n_2+m_2n_1 & n_1l_2+n_2l_1 & l_1m_2+l_2m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (2-9a)$$

简记为

$$\{\sigma_{x'}\} = \{T\}_\sigma \{\sigma_x\} \quad (2-9b)$$

令 z' 轴与 z 轴重合，于是 $l_3=m_3=n_3=n_2=0$ ， $n_3=1$ ，此时式(2-9a)变为

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^2 & m_1^2 & 0 & 0 & 0 & 2l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & 0 & 0 & 0 & 2l_2m_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & l_1 & 0 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & 0 & 0 & 0 & l_1m_2+l_2m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (2-10)$$

若再设与 z 方向有关的应力分量为零，这意味着空间问题退化为平面问题，此时式(2-10)变为

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^2 & m_1^2 & 2l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & 2l_2m_2 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & l_1m_2+l_2m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (2-11)$$

此即平面问题的应力转轴公式。

§ 2-2 应 变

一、应变分量和应变位移关系

物体在外界因素的作用下，内部各点之间的距离发生了变化，这就形成了物体的变形。

应变就是对弹性体变形的度量。

物体内各点的位移是向量，它们是坐标的连续函数，可以把位移向量分解为坐标方向的3个分量，通常记为

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned}$$

可以证明应变分量与位移分量间应当满足下列6个几何方程，即所谓哥西方程

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (2-12)$$

称 ϵ_x 、 ϵ_y 和 ϵ_z 为线应变分量， γ_{yz} 、 γ_{xz} 和 γ_{xy} 为剪应变分量。

从剪应变的表达式形式可知，调换其足标，物理意义不变，亦即

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad (2-13)$$

有时将应变分量写成矩阵形式

$$(\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yx} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2-14)$$

称 (ϵ) 为应变张量。请注意式(2-14)中的剪应变分量的记号与式(2-12)中的剪应变记号是不一样的。式(2-14)中的 ϵ_{xy} 等称为张量剪应变，而式(2-12)中的 γ_{xy} 等称为工程剪应变，两者之间的关系为

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \quad \epsilon_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} \quad (2-15)$$

由于式(2-13)，显然应变张量也是对称张量。后面将要证明，应变张量完全决定了一点的应变状态。

为了方便，有时也使用应变分量的简写符号，它们之间的关系列在表2-3中，凡是位于表中同一行的符号均表示同一物理量，但在数值上要注意关系式(2-15)，以后不再说明。

表2-3 应变张量符号与简写符号对照表

张量符号	简写符号	记号
ϵ_{xx}	ϵ_{11}	$\epsilon_x, \epsilon_x, \epsilon_1, \epsilon_1$
ϵ_{yy}	ϵ_{22}	$\epsilon_y, \epsilon_y, \epsilon_2, \epsilon_2$
ϵ_{zz}	ϵ_{33}	$\epsilon_z, \epsilon_z, \epsilon_3, \epsilon_3$
ϵ_{yz}	ϵ_{23}	$\epsilon_{yz}, \gamma_{yz}, \epsilon_{23}, \gamma_{23}$
ϵ_{xz}	ϵ_{31}	$\epsilon_{xz}, \gamma_{xz}, \epsilon_{31}, \gamma_{31}$
ϵ_{xy}	ϵ_{12}	$\epsilon_{xy}, \gamma_{xy}, \epsilon_{12}, \gamma_{12}$

二、应变转轴公式

现在研究坐标转轴时对应变分量的影响。为此，首先研究过物体任一点P处，

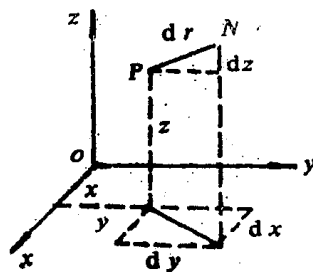


图2-5