怎样指导高中学生进行数学总复习

北京出版社

怎样指导高中学生进行数学总复习

北京教育学院教学研究部编

北 京 出 版 社

怎样指导高中学生进行
数学总复习
北京教育学院教学研究部编

北 京 出 版 社 出 版
（北京崇文门外东兴隆街51号）
新华书店北京发行所发行
北 京 印 刷 一 厂 印 刷

*

787×1092毫米 32开本 9印张 198,000字
1983年11月第1版 1983年11月第1次印刷
印数 1—222,000

书号：7071·946 定价：0.77元

前　言

本书选编了部分数学教师，于 1981 年和 1982 年在全市高中数学总复习经验交流会上的讲稿。它包括代数、平面几何、立体几何、三角、解析几何等十篇文章。这些文章对中学数学的基础知识作了深刻的分析，指出了复习的重点和要求，介绍了复习方法，围绕重点通过例题阐述了如何培养学生综合运用知识的能力。

本书不仅适合于数学教师教学参考，而且对于高中毕业生进行总复习也大有帮助。

本书选编的各篇文章基本上是由作者在原来讲稿的基础上加以整理的，这次汇编成册时，结合教学要求又作了必要的修改和补充。最后，由北京教育学院教学研究部数学教研室作了审阅和修改。

由于我们的水平有限，难免出现一些错误和缺点，希望读者批评指正。

北京教育学院教学研究部

一九八三年三月

目　　录

打好基础　培养能力

——谈怎样进行《方程》总复习……………肖淑英（1）

代数式复习的几个问题……………………卞学诗（24）

怎样复习“函数”……………………………明知白（47）

平面几何总复习中的一些想法和作法…………于宗英（73）

复习立体几何的几点体会……………………张振江（92）

立体几何复习中的几个问题…………………任光辉（117）

抓住基础知识　进行三角复习………………马国璋（153）

在三角复习课中怎样提高学生三角恒等

变形的能力…………………………………贺信淳（193）

谈谈解析几何的复习…………………………王建民（222）

关于建立轨迹方程的复习

——兼谈导数在解析几何中的应用………纪烈圻（257）

打好基础　培养能力

——谈怎样进行《方程》总复习

肖　淑　英

在中学数学教材中方程和方程组是一个重点．由于它的绝大部分内容都是学生在初中阶段学习的，平时也用得较多，因此复习时常常被学生忽视．在教学过程中我觉得学生解方程的能力比较差，运用方程知识解题的能力就更差．分析其原因，有的是计算能力问题，有的是没有掌握有关的基础知识．此外随着所学数学知识增多，方程的应用范围也逐渐广泛，这对学生也提出了较高的要求．因此在总复习时我根据教材的重点和学生存在的问题进行复习，既抓基础知识又注意培养能力，在加深学生对知识的理解、掌握基础知识、提高解题能力等方面都取得一定的效果．下面谈谈我是怎样进行复习的．

一、熟练掌握有关的基础知识

方程和方程组的有关概念、定理、公式和基本解法是提高解题能力的基础，必须使学生牢固掌握．

1．*掌握方程变形定理*

方程和方程组的变形定理是解各种类型的方程或方程组的理论根据，通过例题除了要求学生会叙述定理外，还要能

解具体问题，这样，既加深学生对定理的理解，还认识解分式方程、无理方程和对数方程时验根的必要性．

例 1 下列各对方程是否同解？为什么？

(1) $x-2=4-x$ 和 $x-2+\dfrac{5}{x-3}=4-x+\dfrac{5}{x-3}$；

(2) $2x-3=9-x$ 和

$2x-3+\sqrt{1-x}=9-x+\sqrt{1-x}$；

(3) $\sqrt{x-2}\sqrt{2x+3}=3$ 和 $\sqrt{2x^2-x-6}=3$；

(4) $x^2-2x-3=0$ 和 $(x^2-2x-3)\cdot 3^x=0$；

(5) $\log_a x=\log_a(2x-5)$ 和 $x=2x-5$；

(6) $\lg x+\lg(x-3)=1$ 和 $\lg x(x-3)=\lg 10$；

(7) $x=\sqrt{2x+3}$ 和 $x^2=2x+3$；

(8) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}=\dfrac{x+5}{x(x-1)}$ 和 $3(x-1)+6x=x+5$．

2．*掌握方程和方程组的解的概念*

学生对方程、方程组的解多停留在会叙述定义上或验证某数是不是方程（或方程组）的解，而如何根据定义联系有关的知识，探求解题方法则是许多学生的弱点．我通过以下例题使学生掌握基本解题方法．

例 2 已知实数系数方程 $x^4+(m-5)x^2+m+3=0$ 的四个根都是实数，求 m 的范围．

分析 这是个双二次方程，设 $x^2=y$，则原方程化为二次方程 $y^2+(m-5)y+m+3=0$． (A) 若原方程的解为实数，则 $x^2\geq 0$，方程 (A) 的解 $y\geq 0$．故求使方程 (A) 有非负数解的实数 m 的值，则原方程的四个根都是实数．

解 设 $x^2=y$ 代入原方程，得方程

$$y^2+(m-5)y+m+3=0$$

若这个方程的解不小于 0，m 的值应满足不等式组：

$$\begin{cases}(m-5)^2-4(m+3)\geqslant 0,\\ -(m-5)\geqslant 0,\\ m+3\geqslant 0.\end{cases}\qquad 解得 -3\leqslant m\leqslant 1.$$

$\therefore$ $-3\leqslant m\leqslant 1$ 时，原方程的解都是实数.

例 3 已知 2 是方程 $4x^3-24x^2+mx+18=0$ 的一个根，求 m 的值，并求其余两个根.

分析 因为这是一个三次方程，应有三个根. 已知有一个根等于 2，要求其余两个根，首先要确定 m 的值. 因为 2 是方程 $f(x)=0$ 的根，那么 $f(2)=0$，从而可以求出 m 的值. 并且还可以确定 $f(x)$ 有因式 $x-2$，从而可以得一个二次方程，求得其余两个根. 还可以用根与系数关系求 m 的值.

解略.

答 $m=23$，方程的其余两个根是 $-\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{9}{2}$.

例 4 确定参数 m 和 p，使方程组

$$\begin{cases}(3m-5p+b)x+(8m-3p-a)y=1,\\ (2m-3p+b)x+(4m-p)y=2\end{cases}$$ 有无穷多组解.

解 这是二元一次方程组，要使方程组有无穷多组解，必须

$$\frac{3m-5p+b}{2m-3p+b}=\frac{8m-3p-a}{4m-p}=\frac{1}{2}，即$$

$$\begin{cases}2(3m-5p+b)=2m-3p+b, & (1)\\ 2(8m-3p-a)=4m-p. & (2)\end{cases}$$

解方程组，得 $$\begin{cases}m=\dfrac{14a+5b}{64},\\ p=\dfrac{2a+3b}{16}.\end{cases}$$

所以当 $m=\dfrac{14a+5b}{64}$，$p=\dfrac{2a+3b}{16}$ 时原方程组有无穷多组解.

例 5 已知方程组

$$\begin{cases} x+(1+k)y=0, & (1)\\ (1-k)x+ky=1+k, & (2)\\ (1+k)x+(12-k)y=-(1+k). & (3)\end{cases}$$

有唯一解，求 k 的值，并求出方程组的解.

分析 这是由三个二元一次方程组成的方程组，若方程组有唯一解，则由其中任意两个方程组成的方程组的解必满足第三个方程. 任意两个方程所组成的方程组的解是用参数 k 表示的，将此组解代入第三个方程，则得一个以 k 为未知数的方程，解这个方程即可求出 k 的值，方程组的解也随着确定.

解法一 由(1)、(2)得 $\begin{cases} x=\dfrac{-(1+k)^2}{k^2+k-1}, \\ y=\dfrac{1+k}{k^2+k-1}. \end{cases}$ 将此组解代入(3)，得

$$-(1+k)^3+(12-k)(1+k)=-(1+k)(k^2+k-1),$$

$$(k+1)(-k^2-2k-1+12-k+k^2+k-1)=0,$$

$$(k+1)(-2k+10)=0,$$

$$\therefore\quad k_1=-1,\ k_2=5.$$

当 $k=-1$ 时，$\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases}$ 当 $k=5$ 时 $\begin{cases} x=-\dfrac{36}{29}, \\ y=\dfrac{6}{29}. \end{cases}$

$\therefore$ 当 $k=-1$ 或 $k=5$ 时原方程组有唯一解.

解法二 $\because$原方程组有唯一解

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 1-k & k & -1-k \\ 1+k & 12-k & 1+k \end{vmatrix}=0,$$

即 $k(1+k)-(1+k)^3+(1+k)(12-k)-(1+k)^2(1-k)=0,$

整理后得 $(1+k)(-2k+10)=0,$

$\therefore \quad k_1=-1, \ k_2=5.$

当$k=-1$时，原方程组为

$$\begin{cases} x=0, \\ 2x-y=0, \\ 13y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$是此方程组的解。

当$k=5$时，原方程组为

$$\begin{cases} x+6y=0, \\ -4x+5y=6, \\ 6x+7y=-6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{36}{29}, \\ y=\dfrac{6}{29}. \end{cases}$$是此方程组的解。

$\therefore$ 若所给方程组有唯一解，k值为-1或5。

以上例题用到方程的解、方程组的解的概念，以及解的几种情况等基础知识．结合具体问题中涉及到的基础知识，如实数概念、不等式或不等式组的解法等，可以根据已知条件，列出新的方程，进而确定方程中的未定系数或求出有关的未知量．这样既巩固了重要的概念也复习了一些基本解题方法。

3．在熟练掌握基本解法的基础上注意应用换元法解题

在复习中首先应使学生熟练掌握方程和方程组的基本类型及解法．通过对例题的分析、对比、归纳，使学生理解解

法的基本思想在于通过方程的合理变形，逐步“消元”、“降次”，从而实现由“未知”到“知”的转化。

在熟练掌握基本解法的同时，还应教会学生把一些特殊类型的方程转化为基本类型的方程而求解，换元法就是很重要的一种方法。根据方程的特点使用换元法，可以起到化难为易、化繁为简的作用。

例 6 解方程 $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$。

分析 将原方程变为 $\frac{6}{x^2+3x+2}+\frac{8}{x^2+3x-4}=1$。

去分母得方程 $x^4+6x^3-7x^2-48x=0$，解这个方程：$x(x^3+6x^2-7x-48)=0$，$x_1=0$，还需解方程 $x^3+6x^2-7x-48=0$，计算方法较繁。若比较分式方程的两个分母 x^2+3x+2 和 x^2+3x-4，它们仅常数项不同，若令 $x^2+3x+2=y$，则原方程变为 $\frac{6}{y}+\frac{8}{y-6}=1$，此方程的分母为一次式，去分母后得一元二次方程，从而可以起到化繁为简的作用。

原方程的解为 $x_1=0$，$x_2=-3$，$x_3=\frac{-3+\sqrt{73}}{2}$，$x_4=\frac{-3-\sqrt{73}}{2}$。

例 7 解方程 $(x+4)(x-3)+\sqrt{(x+3)(x-2)}=36$。

分析 用一般解无理方程的方法，就会得到一个四次方程，而解高次方程需要通过较复杂的计算。

如果将原方程变为 $x^2+x-12+\sqrt{x^2+x-6}=36$，再变为 $x^2+x-6+\sqrt{x^2+x-6}=42$，令 $\sqrt{x^2+x-6}=y$，

则方程变为 $y^2+y-42=0$，通过二次方程求解。

原方程的解为 $x_1=-7$，$x_2=6$。

例 8 解方程 $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x+(\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x=6$。

分析 这是指数方程，从两个底看，

$\because$ $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1$.

$\therefore$ $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$，原方程可以写成 $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)^x=6$，这样，这个方程就可以用换元法解.

解 $\because$ $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1$.

$$\therefore\quad \sqrt{3-2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}.$$

设 $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x=y$，则原方程变为

$$y+\frac{1}{y}=6,\quad y^2-6y+1=0,$$

$$y=3\pm2\sqrt{2}.$$

$$\therefore\quad (\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x=3+2\sqrt{2}, \qquad (1)$$

$$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x=3-2\sqrt{2}. \qquad (2)$$

由(1) $(3+2\sqrt{2})^{\frac{x}{2}}=3+2\sqrt{2}$，$\therefore$ $\dfrac{x}{2}=1$，$x=2$.

由(2) $(3+2\sqrt{2})^{\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$，$\therefore$ $\dfrac{x}{2}=-1$，$x=-2$.

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=2$，$x_2=-2$。

例 9 解方程 $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$.

分析 如果把方程两边展开，再整理，将得五次方程，这个过程的计算量较大. 根据方程左边的特点，联系到 $(x+a)^n$ 与 $(x-a)^n$ 的展开式的关系：有些项完全相同，而其余的项系数互为相反数，$(x+a)^n+(x-a)^n$ 的计算就比原题的计算简单了. 将原方程变形，使之出现 $(x+a)^n+(x-a)^n$，简化方程的解法.

解 设 $\frac{(x-1)+(x+3)}{2}=y$，即 $x=y-1$，代入原方程，得方程 $(y-2)^5+(y+2)^5=242y$,

$$2(y^5+40y^3+80y)=242y,$$

$$y^5+40y^3-41y=0,$$

$$y(y^2-1)(y^2+41)=0,$$

$\therefore\quad y=0$，$y=\pm1$，$y=\pm\sqrt{41}i$.

y 值代入 $x=y-1$，得原方程的解为 -1、0、-2、$-1\pm\sqrt{41}i$.

通过这几个例，说明换元法是解方程的一个有效方法. 明确换元法的关键在于根据方程的特点选元，设辅助元后，原方程应转化为可解的方程. 有时为了选元，还需对原方程作适当的变形. 但并不是所有不易解的方程都可以通过换元法解决，必须善于观察、分析方程的特点，在具有化繁为简、化难为易的转化条件时方可使用.

4. 熟练掌握一元二次方程的根的判别式

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式是一元二次方程有无实数根的充要条件，应用比较广泛，是教材中的重点内容之一，应要求牢固掌握并会灵活运用.

例 10 方程 $(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)$

$(x+a)=0$，a、b、c 为实数．求证：

（1）此方程必有实数根；

（2）若此方程有两个相等的实数根，则 $a=b=c$．

分析 将原方程整理成一元二次方程的标准形式，若其判别式的值是非负数，就可以得到(1)的结论；

因为(2)中已知方程有两个相等的根，故从判别式等于0，推证 $a=b=c$．

证明 原方程整理为 $3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$，

$$\Delta=[2(a+b+c)]^2-4\times 3(ab+bc+ca)$$
$$=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

（1）$\because$ $4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$，

$\because$ a、b、c 为实数，$(a-b)^2\geqslant 0$，$(b-c)^2\geqslant 0$，$(c-a)^2\geqslant 0$．

$\therefore$ $2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0$，即 $\Delta\geqslant 0$．

$\therefore$ 原方程必有实数根．

（2）$\because$ 原方程有两个相等的实数根，

$\therefore$ $\Delta=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$，

即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$．（A）

$\because$ a、b、c 为实数，$\therefore$ $(a-b)^2\geqslant 0$，$(b-c)^2\geqslant 0$，$(c-a)^2\geqslant 0$．若（A）成立，必须 $a-b=0$、$b-c=0$、$c-a=0$．即 $a=b=c$．

$\therefore$ 原方程若有等根，则 $a=b=c$．

例 11 k 是什么实数值时，方程组

$$\begin{cases} x=\sqrt{y-2}, & (1) \\ kx-y-2k-10=0 & (2) \end{cases}$$

的两组解相同？并求出这两组解.

分析 本题通过代入法可得一元二次方程，当此方程的两个根相等时，原方程则有两组相同的解. 又由（1）得知 $y\geqslant 2$，$x\geqslant 0$，这是在确定 k 值时应注意的条件.

解 由（2），$\quad y=kx-2k-10 \qquad (3)$

（3）代入（1），得 $x=\sqrt{kx-2k-12}$，

两边平方：$x^2=kx-2k-12$，

$$x^2-kx+2k+12=0 \qquad (4)$$

当 $\Delta=(-k)^2-4(2k+12)=0$ 时，此方程有两个相等的解.

即 $k^2-8k-48=0$，$(k-12)(k+4)=0$.

$k_1=12$，$k_2=-4$.

当 $k=12$ 时，方程（4）为 $x^2-12x+36=0$，

$x_1=x_2=6$，

k_1 和 x 的值代入(3)，$y=38$. $x=6$，$y=38$ 符合原方程组.

当 $k=-4$ 时，方程（4）为 $x^2+4x+4=0$，$x_1=x_2=-2$. ∵ 由(1)得知 $x\geqslant 0$；∴ 此解不合题意.

∴ 当 $k=12$ 时，原方程组有两组相同的解：

$$\begin{cases}x_1=6\\ y_1=38,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=6\\ y_2=38.\end{cases}$$

例 12 证明：如果 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$，则两个方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 和 $x^2+p_2x+q_2=0$ 中至少有一个方程有实数根（p_1、p_2、q_1、q_2 是实数）.

分析 这两个方程的根之间的关系共有三种情况：一、都有实数根；二、一个有实数根，一个没有实数根；三、都没有实数根. 本题要证明两个方程中至少有一个有实数根，那

么只要从已知条件，证明这两个方程的根不能出现第三种情况即可．

证明 假设两个方程都没有实数根，那么它们的判别式都小于0，即

$$p_1^2-4q_1<0 \tag{1}$$

$$p_2^2-4q_2<0 \tag{2}$$

(1)式加(2)式得 $p_1^2+p_2^2<4(q_1+q_2)$．$\because$ p_1、p_2、q_1、q_2都是实数，

$\therefore$ $p_1^2+p_2^2\geqslant 2p_1p_2$，$2p_1p_2<4(q_1+q_2)$，

即 $p_1p_2<2(q_1+q_2)$．这与已知条件 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$ 相矛盾，因此方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 和 $x^2+p_2x+q_2=0$ 不可能同时没有实数根．$\therefore$ 它们至少有一个方程有实数根．

例 13 若 x_1、x_2 为方程 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$ 的两个根，且 $0<x_1<1<x_2<2$，问实数 k 应满足什么条件？

分析 $\because$ k 为实数，且方程的两个根是不相等的实数．$\therefore$ 根的判别式 $\Delta>0$，在这个条件下求出用 k 表示的方程的两个根 x_1 和 x_2，然后根据 $0<x_1<1<x_2<2$，求出满足条件的 k 的值．

解法一 方程 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$，

$$\begin{aligned}\Delta&=[-(k+13)]^2-4\times 7(k^2-k-2)\\&=-27k^2+54k+225,\end{aligned}$$

$\because$ $0<x_1<1<x_2<2$，$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根：

$$x_1=\frac{k+13-\sqrt{-27k^2+54k+225}}{14},$$

$$x_2=\frac{k+13+\sqrt{-27k^2+54k+225}}{14}.$$

$\therefore$ 实数 k 应满足下列条件：

$$\begin{cases} -27k^2+54k+225>0 & (1) \\ 0<\dfrac{k+13-\sqrt{-27k^2+54k+225}}{14}<1 & (2) \\ 1<\dfrac{k+13+\sqrt{-27k^2+54k+225}}{14}<2 & (3) \end{cases}$$

由(1) 得：$\dfrac{3-2\sqrt{21}}{3}<k<\dfrac{3+2\sqrt{21}}{3}$；

由(2) 得：$-2<k<-1$，$2<k<4$；

由(3) 得：$-2<k<0$，$3<k<4$. 如图 1 所示.

$\therefore$ $-2<k<-1$，$3<k<4$ 是不等式组的解. 即当 $-2<k<-1$ 或 $3<k<4$ 时，原方程的解满足 $0<x_1<1<x_2<2$.

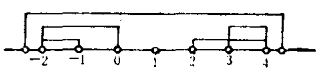

图 1

上面的解法是依题意直接分析出的解法，但计算量比较大. 还可以利用二次函数的图象，形数结合，得出下列的解法：

解法二 设 $f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$，

$\because$ 方程 $f(x)=0$ 的两个根 x_1、x_2 满足 $0<x_1<1<x_2<2$，从图 2 中得到：

$$\begin{cases} f(0)>0, \\ f(1)<0, \\ f(2)>0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} k^2-k-2>0, & (1) \\ k^2-2k-8<0, & (2) \\ k^2-3k>0. & (3) \end{cases}$$

由(1) 得 $(k+1)(k-2)>0$，$\therefore$ $k<-1$ 或 $k>2$，

由(2) 得 $(k+2)(k-4)<0$，$\therefore$ $-2<k<4$，