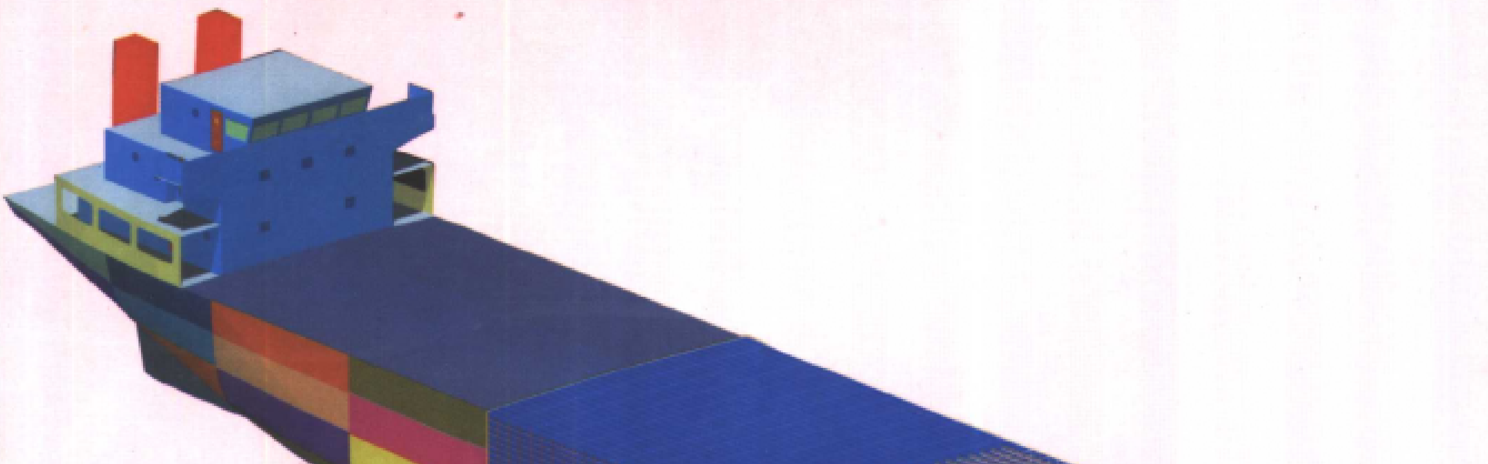
船舶计算结构力学

CHUANBO JISUAN JIEGOU LIXUE

聂武　孙丽萍　编著



哈尔滨工程大学出版社

船舶计算结构力学

聂武　孙丽萍　编著

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

船舶计算结构力学/聂武,孙丽萍编著—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,1999.6

ISBN 7-81007-965-4

Ⅰ.船… Ⅱ.①聂…②孙… Ⅲ.船舶-结构力学:计算力学 Ⅳ.U661.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 45679 号

内容简介

本书阐述了近代计算结构力学的基本原理及其在船舶与海洋工程结构各类具体问题中的应用。内容包括加权残值法、变分法、平面及空间问题有限元法、边界元法、结构动力分析有限元法、弹性稳定问题有限元法、薄壁结构中的有限元法及并行算法,书中还介绍了有限元图形处理和计算结构力学的一些进展。本书既注重理论分析,又列举了工程结构的应用实例。

本书可作为船舶与海洋工程及相关专业研究生教材,并可供从事工程力学、建筑结构等结构工程领域的工程技术人员和高校师生参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话(0451)2519328 邮编:150001
新华书店经销
黑龙江省教委印刷厂印刷
*
开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 23.5 字数 550 千字
2000 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月第 1 次印刷
印数:1~1000 册
定价:28.00 元
如发现印、装质量问题,请与本厂质量科联系调换。
地址:哈尔滨市南岗区和兴路 147 号 邮编:150080

前　言

随着电子计算机技术的发展尤其是微机应用的普及,使得计算结构力学这一学科在工程领域得到了广泛的应用。与90年代初相比,今天计算结构力学取得了长足的进步与发展。一些当时有限元法中内存容量、运算速度与复杂结构所需巨量自由度数的矛盾,随着计算机内存容量惊人的增加与运算速度大大提高已基本上得以解决。计算机图形处理技术的发展也使得结构离散、单元网格划分、运算结果判读与输出十分方便和可视化。国际流行的大型结构有限元分析软件的引进,为工程结构设计与科研提供了有效的工具,掌握与开发这些软件,同样需要计算结构力学的基本知识和相关技术。

本书的目的是使学习本课程的研究生较系统地掌握计算结构力学的基础理论、计算过程、技术及其在船舶与海洋工程结构分析中的应用。本书不但介绍了普通结构力学中的有限元法,还介绍了有限元法在薄壁杆件结构中的应用。

全书共十五章,即变分原理、加权残值法、平面及空间问题有限元法、边界元法、等参元、薄板弯曲问题、二维弹性力学问题边界元法、组合船体结构分析、结构动力分析有限元法、弹性结构稳定性分析有限元法、非线性问题有限元法、薄壁杆件结构有限元法、有限元计算的前后处理、并行算法、计算结构力学中的其它问题。其中第1,2,3,4,6,8,13,14章由孙丽萍编写,第5,7,9,10,11,12,15章由聂武编写。

本书是应船舶与海洋工程专业研究生教学需要而编写的。在编写过程中结合了作者多年研究生教学的经验。在本书成文过程中得到了主审杨永谦教授认真、热情的支持及船舶与海洋工程教材委员会的指导,在此表示由衷的感谢。

编　者

1999年5月

目　录

1 变分原理

变分原理是力学分析中的重要数学工具之一。能量法、有限元法、加权残值法等力学方法都是以变分原理为数学工具的。本章中通过微分与变分的相似关系,初步了解变分原理,学习泛函的积分方程和微分方程的关系。

1.1 变分法的基本概念

变分所研究的不是函数的驻值,而是泛函的驻值。我们以一个简单的例子来说明泛函和变分法的基本概念。

已知 $P_1(x_1,y_1)$和 $P_2(x_2,y_2)$是平面上给定的两点(见图 1.1.1),欲求连接这两点间的最短曲线长度 L。由于长度 L 是由连接P_1、P_2 两点的曲线形状所决定的,曲线形状不同,长度 L 就不同。设 $y=y(x)$是连接 P_1、P_2 两点的任意曲线,则由高等数学可知

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \tag{1.1.1}$$

可见,只要给出具体的曲线方程,就可由上式算出曲线长度 L,而不同的曲线方程对应着不同的长度 L,所以曲线长度 L 是曲线$y=y(x)$的函数。这种函数的函数就称为泛函,记作 $L[y(x)]$,即

$$L[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \tag{1.1.2}$$

我们知道,函数有极值问题。自然,从函数的极值会想到泛函的极值。在上例中,通过 P_1、P_2 两点的函数很多,因此泛函值也很多,然而其中最短的只有一个,这就是泛函极值问题。

研究函数的极值用的是微分学,而研究泛函极值的方法就是变分法,泛函极值问题就是变分命题。下面介绍一个历史上著名的变分命题——最速降线问题。

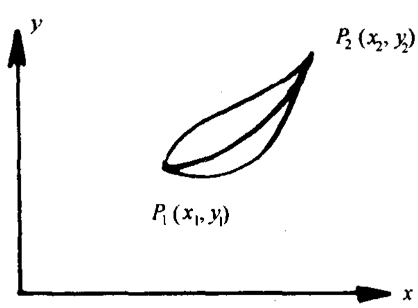


图 1.1.1

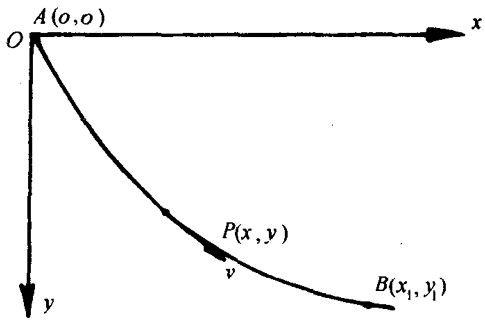


图 1.1.2

在 xoy 平面上有A、B 两点,它们不在同一水平线上,也不在同一铅垂线上,如图 1.1.2 所示。设有一重物沿曲线受重力作用从 A 点向B 点自由下滑,不计重物与曲面之间的摩擦

力,从 A 到 B 自由下滑所需时间随这一曲线的形状不同而各不相同。问下滑时间最短的曲线是哪条曲线?它就是最速降线问题,求出的曲线就是最速降线。下面把这个问题写成数学形式。

设 A 点与坐标原点重合,B 点的坐标为 x_1、y_1。若重物从 A 点下滑到任一点 $P(x,y)$ 时的速度为 v,那么由于从 A 到该点失去的位能为 mgy,获得的动能为 $\frac{1}{2}mv^2$,由能量守恒定律得

$$mgy=\frac{1}{2}mv^2 \quad 或 \quad v=\sqrt{2gy} \tag{a}$$

其中 m 为重物的质量,g 为重力加速度。从另一方面看,若自 A 点沿曲线到任一点 $P(x,y)$的弧长为 s,则由上式有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2gy} \tag{b}$$

而

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{c}$$

所以

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \tag{d}$$

于是,从 A 积分到 B 便得下滑所需的时间,即

$$T=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x \tag{e}$$

可见,下滑时间 T 是函数 $y=y(x)$的泛函,记作 $T[y(x)]$,即

$$T[y(x)]=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{2gy}}\,\mathrm{d}x \tag{f}$$

显然,不同的函数 $y(x)$,对应着不同的时间 T,而最速降线问题就是求时间 T 最小时的函数。总之,这个变分命题可写成:

在满足 $y(0)=0$, $y(x_1)=y_1$ 的一切函数 $y(x)$中,选取一个函数,使(f)式的泛函 $T[y(x)]$为最小值。

由此可见,最速降线变分命题是一个泛函包括一阶导数,具有一个待定函数,含有一个自变量的固定边界的无条件变分命题。这是变分法中一种最简单的变分命题。

1.2 变分的特性

为了进一步理解泛函及其变分的概念,我们可以在与函数及其微分的对比中进行讨论。

1.2.1 函数的定义与泛函的定义

对于函数来说,如果对于变量 x 的某一变域中的每一 x 值,y 有一值与之对应,即数 y 对应于数 x 的关系成立,则我们称因变量 y 是自变量 x 的函数,记为 $y=f(x)$。

对于泛函来说,如果对于某一类函数 $y(x)$中的每一函数 $y(x)$,Π有一值与之对应,即数Π对应于函数 $y(x)$的关系成立,则我们称因变量Π是函数 $y(x)$的泛函,记为$\Pi[y(x)]$。

由此可见,函数是因变量与自变量之间的关系,而泛函是因变量与函数之间的关系。两种概念必须严格区分,尤其不能把复合函数与泛函相混。事实上,在复合函数中,因变量是通过中间变量而依赖于自变量的,因变量与自变量之间有一一对应关系。但在泛函中,因变量直接依赖于函数,与函数中的自变量没有对应关系,因为给定一个自变量后,就有一个对应的函数,而这一个具体的函数值却不能给出一个泛函值。

1.2.2 函数的连续与泛函的连续

对函数 $y=f(x)$来说,如果对于自变量 x 的微小改变,有函数 $f(x)$的微小改变跟它对应,则函数 $f(x)$是连续的。

对泛函$\Pi=\Pi[y(x)]$来说,如果对于自变函数 $y(x)$的微小改变,有泛函$\Pi[y(x)]$的微小改变跟它对应,则泛函$\Pi[y(x)]$是连续的。

可见,泛函的连续与函数的连续是类似的。但是需要明确泛函的自变函数 $y(x)$微小改变的含义。若有两条同类曲线 $y=y(x)$和 $y_1=y_1(x)$,那么自变函数的微小改变是指 $y=y(x)$和 $y_1=y_1(x)$对有定义的一切 x 值,$y(x)$和 $y_1(x)$之差的模要很小,即两条曲线纵坐标之间很接近,如图 1.2.1 所示。有时不但纵坐标之间要接近,而且在对应点处的切线方向之间也要接近,即要求$|y(x)-y_1(x)|$与$|y'(x)-y_1'(x)|$都要很小,如图 1.2.2 所示。当$|y(x)-y_1(x)|$很小时,我们称曲线 $y=y(x)$与 $y_1=y_1(x)$零阶接近,当$|y(x)-y_1(x)|$与$|y'(x)-y_1'(x)|$都很小时,我们称两曲线一阶接近。依此类推,k 阶接近要求零阶至第k 阶导数之差都很小。

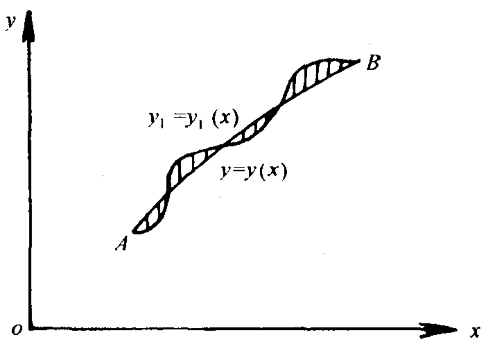


图 1.2.1

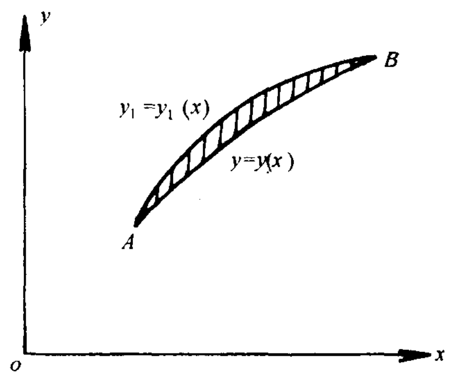


图 1.2.2

1.2.3 函数的微分与泛函的变分

函数的微分有两个定义。

函数的增量 $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$

可展开为线性项和非线性项,$\Delta y=A(x)\Delta x+\beta(x,\Delta x)\Delta x$,其中线性项 $A(x)$和 Δx 无关,高次项 $\beta(x,\Delta x)$与 Δx 有关,当 $\Delta x\to 0$ 时 $\beta(x,\Delta x)\to 0$,这时 $y(x)$是可微的

$$\Delta y=\mathrm{d}y=A(x)\Delta x=y'\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A(x)$$

于是函数的微分是函数增量的主部,即线性部分。

函数的第二个定义是 ε 为一小参数,将 $y(x+\varepsilon\Delta x)$对 ε 求导数,得

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}y(x+\varepsilon\Delta x)=\frac{\partial y(x+\varepsilon\Delta x)}{\partial(x+\varepsilon\Delta x)}\cdot\frac{\partial(x+\varepsilon\Delta x)}{\partial \varepsilon}=y'(x+\varepsilon\Delta x)\cdot\Delta x$$

当 ε 趋近于零时

$$\left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon}y(x+\varepsilon\Delta x)\right|_{\varepsilon\to 0}=y'(x)\Delta x$$

这就说明，$y(x+\varepsilon\Delta x)$在 $\varepsilon=0$ 处对 ε 的导数等于$y(x)$在 x 处的微分。ε 称为拉格朗日乘子，此法称为拉格朗日法。

同样，泛函的变分也有两个定义。自变函数 $y(x)$的变分 $\delta y(x)$所引起的泛函的增量

$$\Delta\Pi=\Pi[y(x)+\delta y(x)]-\Pi[y(x)]$$

可以展开为线性项和非线性项

$$\Delta\Pi=L[y(x),\delta y(x)]+\beta[y(x),\delta y(x)]\delta y_{\max}$$

其中 L 是对δy 的线性泛函项，而 β 是非线性泛函项，是 δy 的同阶或高阶微量，当 $\delta y(x)\to 0$ 时 $\delta y_{\max}\to 0$，同时 β 也趋近于零，这时泛函的增量等于 $\delta y(x)$的线性部分 $L[y(x),\delta y(x)]$，称做泛函的变分，用 $\delta\Pi$来表示。

$$\delta\Pi=\Delta\Pi\Big|_{\delta y\to 0}=\Pi[y(x)+\Delta y(x)]-\Pi[y(x)]=L[y(x),\delta y(x)]$$

所以泛函的变分是泛函增量的主部，而且这个主部对于 $\delta y(x)$来说是线性的。

同样，也有拉格朗日的泛函变分定义。泛函的增量也可以用微小参数 ε 表示为

$$\begin{aligned}\Delta\Pi&=\Pi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]-\Pi[y(x)]\\&=L[y(x),\varepsilon\delta y(x)]+\beta[y(x),\varepsilon\delta y(x)]\varepsilon\delta y_{\max}(x)\end{aligned}$$

因为泛函数是$\Pi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]$对 ε 的导数在$\varepsilon=0$ 时的值，于是有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Pi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]=&\frac{\partial}{\partial \varepsilon}L[y(x),\varepsilon\delta y(x)]+\beta[y(x),\varepsilon\delta y(x)]\delta y_{\max}(x)\\&+\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\beta[y(x),\varepsilon\delta y(x)]\varepsilon\delta y_{\max}(x)\end{aligned}$$

因为线性项 $L[y(x),\varepsilon\delta y(x)]$对 δy 是线性的，故

$$L[y(x),\varepsilon\delta y(x)]=\varepsilon L[y(x),\delta y(x)]$$

并且与 $\varepsilon\to 0$ 时 $\beta[y(x),\varepsilon\delta y(x)]\to 0,\delta y_{\max}\to 0$，得

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Pi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]=L[y(x),\delta y(x)]$$

由此得拉格朗日的泛函变分定义为

$$\delta\Pi=\left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Pi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]\right|_{\varepsilon\to 0}=L[y(x),\delta y(x)]$$

1.2.4 变分运算规则

变分 δ 和导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的运算可互换，变分的导数等于导数的变分，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\delta y(x)]=\delta\left[\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]$$

因为自变函数的变分 $\delta y(x)$是 x 的函数，可以用 x 求导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\delta y(x)]=\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{\mathrm{d}x}=y'(x)-y_1{}'(x)=\delta y'(x)=\delta\left[\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]$$

同理 $\quad [\delta y(x)]'' = \delta y''(x)$

$$[\delta y(x)]^n = \delta y^n(x)$$

其它运算规则如下

$$\delta(\Pi_1 + \Pi_2) = \delta\Pi_1 + \delta\Pi_2$$

$$\delta(\Pi_1\Pi_2) = \Pi_1\delta\Pi_2 + \Pi_2\delta\Pi_1)$$

$$\delta(\Pi_1/\Pi_2) = (\Pi_2\delta\Pi_1 - \Pi_1\delta\Pi_2)/\Pi_2^2$$

$$\delta\Pi^n = n\Pi^{n-1}\delta\Pi$$

$$\delta(y^n) = (\delta y)^n$$

$$\delta\int_{x_1}^{x_2}\Pi\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2}\delta\Pi\mathrm{d}x$$

1.2.5 函数的极值与泛函的极值

对函数 $y=f(x)$来说，如果函数 $f(x)$在一点 x_0 的值 $f(x_0)$比它在 x_0 的适当小的邻域内各点的值都要大(或都要小)，即 $f(x_0)>f(x)$[或 $f(x_0)<f(x)$]，则 $f(x_0)$就是函数 $f(x)$的极大值(或极小值)，而函数的极大值和极小值统称为函数的极值。

对泛函 $\Pi=\Pi[y(x)]$来说，如果泛函 $\Pi[y(x)]$相应于某一条曲线 $y_0(x)$的值 $\Pi[y_0(x)]$比相应于与 $y_0(x)$接近的任一条曲线的值都要大(或都要小)，即 $\Pi[y_0(x)]>\Pi[y(x)]$(或 $\Pi[y_0(x)]<\Pi[y(x)]$)，则泛函 $\Pi[y(x)]$在曲线 $y_0(x)$上达到极大(或极小)值，同样，泛函的极大值与极小值统称为泛函的极值。

实现极值的必要条件是 $\Pi[y(x)]$在 $y=y_0(x)$上达到极值，则在该曲线上有 $\delta\Pi=0$。因为函数接近有零阶和高阶之分，所以变分分为强变分和弱变分。对于零阶接近的变分称为强变分，这样得到的极值叫强极值。对于一阶以上接近，则叫弱变分，所得到的极值叫弱极值。和微分的极值条件一样，一阶变分等于零的条件 $\delta\Pi=0$ 只是存在极值的必要条件，而不是充分条件，只有两阶变分才能确定极大或极小。

1.3 泛函极值问题的求解

现在，我们从简单问题入手来研究泛函的极值问题。仍以 1.1 中的例子为例，求解通过两点的任意曲线 $y(x)$的长度 $L[y(x)]$中最短的一条曲线。这个问题可进一步概括为求泛函

$$\Pi = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\mathrm{d}x \qquad (1.3.1)$$

在边界条件 $\quad y(x_1)=y_1$

$$y(x_2)=y_2 \qquad (1.3.2)$$

下为极值的函数 $y(x)$。其中 $F(x,y,y')=\sqrt{1+y'^2}$。

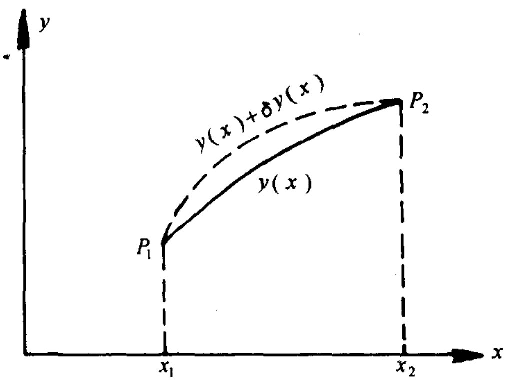


图 1.3.1

设正确解为 $y(x)$，$y_1(x)$为接近于 $y(x)$的任意函数，则

$$y_1(x) = y(x) + \delta y(x) \qquad (1.3.3)$$

其中 $\delta y(x)$为满足边界条件式(1.3.2)的接近于 $y(x)$的变分，如图 1.3.1 所示。显然

$\delta y(x)$在边界上等于零，即

$$\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0 \tag{1.3.4}$$

泛函增量 $\Delta\prod$为

$$\Delta\prod = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y_1,y'_1)\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{1.3.5}$$

根据泰勒级数展开，有

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} F(x,y_1,y_1')\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2!}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y')^2\right)\mathrm{d}x + \cdots\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

令 $$\delta\prod = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x \tag{1.3.7a}$$

$$\delta^2\prod = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y')^2\right]\mathrm{d}x \tag{1.3.7b}$$

$$\vdots$$

则(1.3.5)式可写成

$$\Delta\prod = \delta\prod + \frac{1}{2!}\delta^2\prod + \cdots \tag{1.3.8}$$

其中 $\delta\prod, \delta^2\prod\cdots$称为一阶变分，二阶变分等。

根据泛函实现极值的条件 $\delta\prod = 0$ 有

$$\delta\prod = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x = 0 \tag{1.3.9}$$

对于一般的泛函 $F(x,y,y')$，令其是函数 $y(x)$的函数，假设 F 与 y 及其导数 y'有关，这时泛函的一阶变分自变函数可视为 $y(x)$和其导数 $y'(x)$的函数，因此可以把微分符号 d 用变分符号来代替，故有

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \tag{1.3.10}$$

因泛函的变分只与 $y(x)$和 $y'(x)$的变分有关，故 $\delta x = 0$，则上式为

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \tag{1.3.11}$$

对式(1.3.9)的第二项进行分部积分，得

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\mathrm{d}(\delta y) = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\delta y\,\mathrm{d}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \tag{1.3.12}$$

因 $$\mathrm{d}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x$$

故式(1.3.12)变为

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y \mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \Bigg|_{x_1}^{x_2} \tag{1.3.13}$$

将上式代入式(1.3.9)中得

$$\delta \Pi = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y \mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \Bigg|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{1.3.14}$$

上式第二项是边界条件式，当给定边界条件时，在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 处 $\delta y = 0$，即第二项等于零，这个边界条件称为基本边界条件。当没给定基本边界条件时，δy 在 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 处可能不等于零，则 $\delta \Pi = 0$ 的条件必须要求在边界处 $\partial F / \partial y' = 0$，这一边界条件称为自然边界条件。凡在变分法中因边界值未给定而必须使一阶变分等于零而满足的边界条件，统称为自然边界条件。

式(1.3.14)中 δy 是任意选定的函数，且满足一般性条件，所以由变分法的基本预备定理①得

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{1.3.15}$$

求解这个微分方程的边值问题，就可得到使泛函实现极值的曲线 $y = y(x)$。由此可见，这个微分方程的边值问题，等价于泛函 $\Pi = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') \mathrm{d}x$ 的极值问题。这类由泛函极值条件得到的微分方程叫做欧拉方程，就是说，泛函极值的积分方程转换成欧拉方程——微分方程。

应当指出，假如原来的泛函的积分方程含有一阶导数，则欧拉方程将含有更高一阶导数。对于包括几阶导数的泛函

$$\Pi[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y, y', y'' \cdots y^{(n)}] \mathrm{d}x \tag{1.3.16}$$

的极值问题，其欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) = 0 \tag{1.3.17}$$

这是函数 $y(x)$ 的 $2n$ 阶微分方程，称为欧拉－泊桑方程，$2n$ 个未知常数由 $2n$ 个边界条件确定。

式(1.3.15)是泛函极值的条件式。为判断所得解是极大还是极小，还需考察二阶变分 $\delta^2 \Pi$ 的符号。若对于任意 $\delta y(x)$ 有 $\delta^2 \Pi > 0$，则解使 Π 为极小；反之为极大。

下面讨论欧拉方程(1.3.15)式的两种特殊情况。

(1) 设 F 不依赖于 y，即 $F = F(x, y')$。由于 $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 所以由(1.3.15)式可得

---

① 如果函数 $F(x)$ 在线段 (x_1, x_2) 上连续，且对于只满足某些一般性条件的任意选定的函数 $\delta y(x)$ 有

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\delta y(x) \mathrm{d}x = 0$$

则在线段 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 上 $F(x) \equiv 0$

其中 $\delta y(x)$ 的一般性条件是：一阶或若干阶可微，在线段 (x_1, x_2) 的端点处为零，$|\delta y(x)| < \varepsilon$ 或 $|\delta y(x)|$ 及 $|\delta y'(x)| < \varepsilon$ 等。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{1.3.18}$$

积分得

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=C_1 \tag{1.3.19}$$

以本节提出的连接两点的最短曲线长度为例

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$F=\sqrt{1+y'^2}$$

泛函中只含有 y',其欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y'/\sqrt{1+y'^2}]=0$$

所以有

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$$

由此式得

$$y'=\frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}}$$

对 x 再积分得

$$y=\frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}}x+C_2$$

这显然是一个直线方程,其中常数 C_1、C_2 可由边界条件 $y_0=y(x_0)$, $y_1=y(x_1)$确定。最后得

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

显然,连接两点的曲线长度最短的是一条直线段。

$$\begin{aligned}
\delta^2\prod &=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\delta y'^2\right]\mathrm{d}x\\
&=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y'}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\delta y'^2\right]\mathrm{d}x\\
&=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}-y'^2/\sqrt{1+y'^2}}{1+y'^2}\delta y'^2\mathrm{d}x\\
&=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\delta y'^2\mathrm{d}x>0
\end{aligned}$$

因此,泛函有最小值。

(2)设 F 不依赖于 x,即 $F=F(y,y')$。由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} \tag{1.3.20}$$

因为$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}=0$,所以欧拉方程(1.3.15)式为

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=0 \tag{1.3.21}$$

又
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\right) \tag{1.3.22}$$

综合上面两式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \tag{1.3.23}$$

首次积分得
$$F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1 \tag{1.3.24}$$

1.4 条件极值问题

前面讨论的泛函极值问题,习惯上称为无条件极值问题。所谓无条件,并不是说在自变函数选取中不考虑任何条件。自变函数必须使给定泛函在某一范围内有意义,并满足边界条件,由于这些条件容易被满足,所以称为无条件极值问题。在工程实际中,有些约束条件不易得到满足,这种在给定约束条件下的泛函极值问题,称为条件极值问题。这种极值问题常用拉格朗日乘子法来求解,即将有条件极值问题的旧函数改造成为无条件极值问题的新函数。拉格朗日乘子又称为权数或权函数。

约束条件式 φ_i 为 $x, y_1, y_2\cdots, y_n$ 的函数

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)=0 \quad (i=1,2,\cdots,k) \qquad k<n \tag{1.4.1}$$

在满足式(1.4.1)的约束条件下,求泛函

$$\Pi=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')\mathrm{d}x \tag{1.4.2}$$

的条件极值问题。

求解这类问题,首先选择拉格朗日乘子函数 $\lambda_i(x), i=1,2,\cdots k$,乘以式(1.4.1)后与式(1.4.2)相加,得到新的泛函

$$\begin{aligned}\Pi_1 &=\int_{x_0}^{x_1}\left[F+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x)\varphi_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\right]\mathrm{d}x\\ &=\int_{x_0}^{x_1} F_1\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1.4.3}$$

显然,泛函 Π_1 是自变函数 $y_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的函数,同时又是 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的函数,因此泛函是 $n+k$ 个未知自变函数的极值问题。下面先对式(1.4.3)用 λ_i 求极值,即 λ_i 有变分时极值条件为

$$\delta\Pi_1=\int_{x_0}^{x_1}\varphi_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\delta\lambda_i\,\mathrm{d}x=0 \qquad i=1,2,\cdots,k \tag{1.4.4}$$

因为 $\delta\lambda_i$ 是任意值,不等于零,由此导出

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)=0 \qquad i=1,2,\cdots,k \tag{1.4.5}$$

这就是约束条件式(1.4.1)。考虑到式(1.4.4)和式(1.4.5),式(1.4.3)变为

$$F_1=F$$

这说明,式(1.4.3)的无条件泛函极值问题相当于在约束条件式(1.4.1)下求泛函式(1.4.2)的极值问题。

不难证明,式(1.4.3)的欧拉方程为