医用高等数学

（微积分、微分方程与数理统计）

胡 纪 湘 主编

人民卫生出版社

医用高等数学

（微积分、微分方程与数理统计）

胡纪湘 主编

胡纪湘 冯耀庭 李中英
罗泮祥 张惠安 编写

人民卫生出版社

医用高等数学

（微积分、微分方程与数理统计）

胡纪湘　主编

人民卫生出版社出版

（北京市崇文区天坛西里10号）

人民卫生出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米16开本　21$\frac{1}{2}$印张　4插页　504千字

1987年6月第1版　1987年6月第1版第1次印刷

印数：00,001—15,450

统一书号：14048·5463　定价：3.65元

〔科技新书目142—87〕

前　　言

本书是根据1981年10月卫生部武汉会议上决定从1983年级起高等数学为高等医学院校的必修课而编写的。内容包括一元微积分、多元微积分、微分方程、概率论初步和数理统计等五章。以医学基础和科学研究中常用的数学知识为主，并力求使其具有医用高等数学的特点。

本书主要阐述基本概念，介绍基本方法，说理清楚，文字通俗易懂。编有较多的例题和习题，书后附有答案，便于自学。可作为高等医学院校本科各专业、进修生及研究生的教材，也可供生物科学和医学工作者的参考书。

使用本书时，可视各院校及专业的具体情况，在第一学年可讲授第一至第三章，或第一、三、四章，也可选讲各章中的主要部分，而将第四、五章在第三年级讲授，即将本书作为微积分和微分方程以及数理统计两门课程的教材。

本书由胡纪湘、冯耀庭、李中英、罗泮祥和张惠安等同志编写。卢侃同志提了宝贵的意见。

目　　录

绪　论

本书的内容不仅包括一元及多元微积分和作为高等数学理论基础的极限论，还包括微分方程、概率论与数理统计初步知识．编写时以医学基础和医学科学研究中常用的必备知识为前提，并在保证体系的完整性和逻辑的合理性的基础上适当地与医学相结合，是生物科学和医学各个领域所必需的数学基本知识，因此叫做“医用高等数学”．学好本书的全部内容，可为医学工作者打下良好的数学基础．

在开始学习高等数学的时候，首先对高等数学的研究对象及特点、它与生产实践的关系和它对生物科学和医学的作用、以及它同初等数学的联系与区别等问题，有一个初步的了解是十分必要的，这不仅能帮助我们对高等数学有一个正确的认识，而且也有助于今后的学习．

数学研究的对象是什么呢？初等数学中的算术和代数研究的是数量关系；几何学研究的是图形，或者说是空间形式；三角学则既研究数量关系也研究空间形式．由此可知，初等数学研究的对象就是数量关系与空间形式．事实上任何数学分科，包括高等数学在内，也仍然是以这两者为其研究对象，所以说数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的学科．

数学研究的对象决定了它具有高度的抽象性和应用的广泛性的特点．数学的抽象性表现在它能暂时抛开事物的具体内容，而单纯从量的关系进行考察．这样就可以把现实世界中各种复杂的数量关系，表现为抽象的形式．正是由于它的抽象性，使得数学的应用较其它任何自然科学的应用更具有广泛性．这是因为数学上的某一个数量关系，往往不仅适用于某一个具体问题，而是适用于很多的具体问题．例如数学上的函数关系 $y=ax^2$，它可以表示抛物线的方程；也可以描述圆的面积 y 与半径 x 的关系；也可以描述自由落体下落的路程 y 与时间 x 的关系等等．各种不同性质的问题具有相同的数量关系，是因为这种数量关系不只存在于某一特定的物质形态或其特定的运动形式中，而是普遍地存在于各种物质形态和运动形式之中．正因为数学是从现实世界中抽象出来而又正确地反映了客观事物的数量关系和空间形式，所以它才被广泛地应用于实践之中，成为自然科学与工程技术理论研究不可缺少的重要工具．

数学的发展依赖于人类的生产实践，是从人们的需要中产生的．自从人类有了比较事物的多少时起就产生了数的概念和量的关系；由于丈量土地和测量容积的需要就产生了几何学．随着生产力的不断发展，自然科学的进步以及生产实践的需要，在十六世纪，对于运动的研究成为当时自然科学的中心问题．对各种变化过程和各种变化着的量之间的依赖关系的研究，引起了一系列新的数学问题．要解决这些问题，初等数学已无能为力，这就需要创立全新的概念和方法，从而引进了变量和坐标的概念，函数与极限的概念，促使数学飞跃地向前发展，微积分学也就在此时期应运而生了．由此可见，生产实践是数学知识的源泉，并不断地推动数学由初级向高级发展．

初等数学和高等数学虽然都以空间形式和数量关系为其研究对象，但前者主要是研究常量与固定的图形，而后者则是以变量和图形的变化为其研究对象，因而在方法上也

有根本的区别．初等数学的方法一般说是静止的，孤立的；而高等数学则是运动的，连续的．世界本来是在永恒的运动变化之中，所以只有从运动变化之中去认识事物，才能获得更深刻的了解．

与其他自然科学一样，生物科学和医学也在不断地发展，目前正处在从宏观走向微观，从定性描述走向定量计算，从细胞水平向分子水平发展的过程中．在这些发展过程中所提出的种种问题，如果没有高等数学这一有力的工具，是不可能解决的．可以说高等数学是生物科学和医学理论研究的重要工具，而且将起着越来越重要的作用．因此，对于生物科学和医学工作者来说，高等数学是必须具备的基础知识之一．

在生产斗争，科学实验和日常生活中，我们经常遇到面积的计算问题，因此，它不仅成为初等几何的重要内容，而且在历史上也是微积分学的一个最早的起源问题．现在我们就通过对面积的计算来了解怎样从初等几何向微积分过渡的．

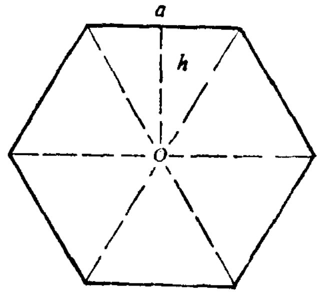

图 0-1

1．多边形面积的计算　在初等几何里我们可以计算任何多边形的面积，办法是把多边形分成许多三角形，算出这些三角形的面积，然后相加就得到多边形的面积．对于正 n 边形，其面积可以由 n 个等腰三角形的面积之和求得，如图 0-1 所示．

$$S=\left(\frac{1}{2}ah\right)n=\frac{1}{2}(na)h=\frac{1}{2}lh$$

式中 $l=na$ 是正 n 边形的周长，h 是边心距．

2．圆的面积　由上面的推导可知，正多边形的面积 S 等于周长与边心距乘积的一半。当圆内接正多边形的边数 n 无限增加时，多边形的面积和圆的面积就越来越接近．因此，可以设想，对于圆面积也会有类似的计算公式．圆的周长是 $2\pi R$，我们很容易地就可以推想到圆面积的公式为

$$S=\frac{1}{2}(2\pi R)R=\pi R^2$$

这正是我们在初等数学里很熟悉的公式．但这毕竟是由推想而得的，真正要从内接多边形的面积过渡到圆面积，我们必须在观念上和思想方法上来一个突破．

多边形的面积之所以容易求得，是因为它的周界是一些直线段，我们可以把它分成许多三角形，先求出三角形的面积再求和就行了，而圆的周界则处处是曲线，困难就在这个“曲”字上．

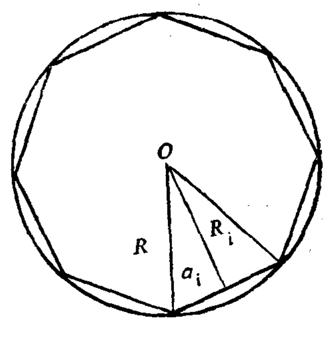

图 0-2

其实，在一定条件下，“曲”是可以近似地用“直”来代替的．例如，整个圆周是弯曲的，但对于一段很小的圆弧却可以近似地“以直代曲”，即以弦代替圆弧．按照这种思想，我们把圆周分成许许多多小段，例如分成 n 个等长的小段，如图 0-2 所示．则内接正 n 边形的面积为

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_iR_i=\frac{1}{2}l_nR_n$$

式中l_n和R_n分别是内接正n边形的周长和边心距（它们都是n的函数），当n很大时，面积S_n就很接近于圆的面积S，n越大，近似程度就越高.

但是不论n多大，由上式计算所得的面积，还是内接正多边形的面积，它只是圆面积的近似值，而不是圆面积的精确值，因此问题并没有解决.

为了从近似值过渡到精确值，我们必须引入极限的概念（详细内容将在第一章中介绍）. 十分明显，n无限增大，记作$n\to\infty$，内接正n边形的面积S_n将趋近于圆面积S，我们记作

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

其中lim是极限的意思. 可以看出，当$n\to\infty$时，内接正n边形的周长l_n趋近于圆周长$l=2\pi R$，边心距R_n趋近于圆的半径R，即

$$\lim_{n\to\infty}l_n=l,\quad \lim_{n\to\infty}R_n=R$$

因此，如果在内接正n边形的面积公式中，令$n\to\infty$，取极限就得到

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}a_iR_i\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}l_nR_n\right)=\pi R^2$$

这个极限就定义为圆面积公式，它是符合客观实际的.

上述用圆内接正多边形来推算圆面积的方法，是我国魏晋时期（公元三世纪）的数学家刘徽提出来的，称为“割圆术”，他曾正确地计算出圆内接正3072边形的面积，从而得出$\pi\approx3.1416$，这是一个非常卓越的成就.

以上的计算过程是将欲求的量（面积）分割为n个微小的量（许多小扇形），局部“以直代曲”（换成小等腰三角形），求和得近似值，（把这些小等腰三角形加起来），取极限得精确值. 这样得到的极限就叫做积分. 十分明显，初等数学向微积分过渡的过程的关键在于取极限. 因而极限理论是高等数学的基础，它从方法论上突出的表现了高等数学不同于初等数学的特点.

如果说本书前面三章研究的是客观世界中确定性的现象，那么概率论和数理统计所研究的对象则是客观世界中大量存在的随机现象. 因此，概率论与数理统计是一门研究随机现象规律性的学科.

概率论是数学的一个有特色的分支，一方面，由于它与其它数学分支的研究对象不同，因此它有着别开生面的研究课题，从而也有着自己独特的概念与方法；另一方面，它又是一个严谨的数学分支，它的概念有明确的定义，它所用的方法是严格的，它的结果是具有深刻意义的.

概率论中最基本的概念——事件、概率、随机变量与数学期望，在现代概率论中已分别看作是集合、规范化测度、可测函数与可测函数关于规范化测度的积分. 这种观点自从概率论的公理化结构体系出现之后，已被普遍接受，它对于概率论基本概念的明确定义是至关重要的.

统计独立性是概率论中特有的概念，它的引进大大丰富了概率论的研究，概率论基础中最深入的结果，大都是在独立性的假定下获得的，这主要是指几种形式的极限定理：大数定律、强大数定律和中心极限定理.

虽然概率论与数理统计研究的对象都是随机现象的规律性，但概率论研究的是随机现象规律性本身，而数理统计则是以概率论为基础，对大量的随机现象的统计资料进行分析、研究，得出这种现象的规律性，给以科学的解释. 也就是说，它是运用大量现象的资料研究母体中所抽取部份子样材料作为计算某些特征数来推算母体所表现的概率规律性的科学.

在概率论中，当讨论到事件与概率时，总是假定概率空间是给定的，研究随机变量时，总是假定分布函数是已知的. 但是，当把概率论的结果及方法应用于实际时，首先需要做的就是要确定这些特征，譬如要确定某现象是否具有某些概率特征，是否服从正态分布或其它分布，之后还要对这些分布的参数进行估计. 研究这些问题就是数理统计的任务.

假设检验中的小概率事件原理，两类错误的关系，这些都是数理统计中十分重要的概念.

数理统计的方法，就是对大量随机现象的规律性进行归纳的研究，因此，它的发展是和近代化大生产以及科学研究工作的发展密切联系的. 随着生产和科学的发展，数理统计的应用也越来越广泛. 在实践中一些不必要或不可能用全面调查的方法进行观察的事物，可以运用数理统计的方法进行观察或试验，并可利用样本指标推断总体指标，保证以最少的费用、最短的时间，取得准确的统计资料，获得足够正确的结果. 利用数理统计的方法，还可以进一步分析现象之间的关系，变量数列之间的关系，并研究现象之间的因果关系的显著性等等. 因此，目前它在国民经济各部门和科学研究中都得到了广泛的应用. 在生物学和医学各个领域的生产实践和科学研究中，数理统计也是不可缺少的基础知识.

概率论与数理统计至今仍是一门蓬勃发展的学科，以实际为背景的许多概率论中的新课题，以及不断产生的统计学新方法，日益增添了这门学科的丰富内容，它将随着生产和科学的飞速发展而迅猛前进.

第一章　一元函数微积分

第一节　函数的极限与连续

一、函数概念

当我们研究或观察一个自然现象或生产过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有些量在整个现象或过程的进行中，始终保持同一数值不起变化的，叫做常量（constant）；而另外有些量在现象或过程进行中取不同的数值，叫做变量（variable）. 变量之间往往是相互联系、相互依赖的，一个量的变化常引起其它一些量跟着相应的变化. 例如，正方形的边长 l 变大时，其面积 A 就跟着变大；自由落体下落的时间 t 越长（在允许的条件下），下落的距离 S 也越大；儿童的身高或体重，随着年龄的增加而增加等等. 从这些例子可以看出，虽然各变量之间有着相互联系，但就各变量之间联系的明确性来说，却是很不相同的. 上面第一个例子里，联系最明确，只要知道正方形的边长 l，我们就可以唯一地而且绝对准确地用公式 $A=l^2$ 来确定它的面积 A. 在第二个例子里，情况就稍有不同了，当我们知道物体自由下落的时间 t 时，也可以用运动学的公式 $S=gt^2/2$ 来唯一地确定物体下落的距离 S，但公式中的重力加速度 g 的值是随地域的不同而略有差异的，因而如果把 g 作为常量时，这个公式的成立只不过是某种程度的近似. 这种联系不够精确的情形，在最后一个例子里表现得更为突出. 虽然儿童的身高或体重与年龄有一定的联系，但即使我们精确地知道了儿童的年龄，也不能精确地计算出其身高或体重，而只能根据经验公式知其大概. 原因是身高或体重除与年龄有关外，还与生活、营养等等一系列其它复杂的因素有关.

在微积分学里，我们要研究的是变量之间的一种确定的依赖关系，即所谓函数关系（functional relation）. 在这一章中我们讨论两个变量之间的函数关系. 下面是函数的定义.

定义　设 x、y 是同一变化过程中的两个变量. 如果对于变量 x 在它的变域 D 内所取的每一个值，根据某一规律，变量 y 有一个唯一确定的值相对应，我们就说，变量 y 是变量 x 的一个函数（function）. 这时 x 称为自变量（independent variable），y 称为因变量（dependent variable），自变量的变域 D 称为函数的定义域（domain of definition），因变量取值的范围（即 y 的变域）M 称为函数的值域（range）.

y 是 x 的函数记为

$$y=f(x) \qquad x\in D. \tag{1-1}$$

由函数的定义可知，儿童的身高或体重和年龄并不是函数关系. 在两个变量的函数关系中，哪个变量是自变量，哪个是因变量，并不是固定不变的，要看具体情况来决定.

例 1　物体在时刻 $t=0$ 时从高为 h 处自由下落，设时间 t 时落下的距离为 S，则 S 是 t 的函数：

$$S=gt^2/2.$$

式中 g 可视作常数，区间〔0，$\sqrt{2h/g}$〕就是这个函数的定义域，因为当 $t=\sqrt{2h/g}$ 时，物体已达地面. 对于自变量 t 的每一个值 t_n，因变量的值为 $S_n=gt_n^2/2$.

例2　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2+x & (x\geqslant 0.5)\\ 2x^3-x & (x<0.5)\end{cases}$$

是定义在整个数轴上的一个函数，每给出一个 x 值，就有 $f(x)$ 的一个确定值. 在 x 的不同范围内，函数变化的规律不同，因此，这种函数称为分段函数（piecewise function）。

二、函数的极限

1. 极限的概念　在高等数学中除了上面所介绍的函数概念外，另一个重要的基本概念就是极限（limit）概念. 取极限的方法是解决高等数学中一系列问题的最基本的方法. 可以说，没有极限概念就没有高等数学. 因为高等数学中其它的一些重要概念，如导数、微分、积分、级数等等，都是用极限概念来定义或描述的.

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的，这在绪论里已作了初步介绍. 在求圆面积或曲边形面积的计算过程中，我们的目的都是去确定某一个量，但我们首先确定的不是这个量的本身，而是它的一连串越来越精确的近似值，然后通过考察这一连串近似值的总趋势，把那个量的精确值通过取极限的方法确定下来，这就是所谓极限方法. 通过对某种无限变化过程的研究来反映与确定客观事物某方面的固有特征，这在方法上是与初等数学解决实际问题有着本质差别的.

2. 数列的极限　在各种类型的极限中，数列（sequence）的极限最简单. 现在先从数列的极限谈起，其一般定义为

定义　给出一个数列 $\{y_n\}$：

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots$$

如果当 n 无限增大时，y_n 趋近于某一个定数 l，我们就说数列 $\{y_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时以 l 为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}y_n=l,\ 或\quad y_n\to l\ (n\to\infty) \tag{1-2}$$

所谓“当 n 无限增大时，y_n 趋近于 l”，意思是：当 n 充分大时，y_n 与 l 可以任意靠近，要多近就能有多近，或者是：当 n 充分大时，$|y_n-l|$ 可以任意小，要多小就能有多小.

例如数列 $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$：

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots$$

当 $n\to\infty$ 时，以 0 为极限，因为当 n 充分大时，

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$$

可以任意小，要多小就能有多小.

有的数列有极限存在，而有的数列没有极限.

例如数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{n}$，…和数列 0.3，0.33，…，$0.\underbrace{333\cdots}_{n个}$，…，都有极限，前者从右侧（大于零）趋于极限值 0；后者则从左侧（小于⅓）趋于极限值⅓. 而数列 1，-1，1，-1，…，$(-1)^{n+1}$，…，和数列lg1，lg2，…，lg n，…，都没有极限，因为当 n 无限增大时，前者正负 1 交错，不趋于定数；而后者则当 n 无限增大时，第 n 项的值也无限增大，不趋于任何定值.

3. 函数的极限　数列是一种特殊的函数，因而数列的极限也是一种函数极限. 下面我们定义函数的极限.

定义　如果当 x 无限增大时，$f(x)$ 趋近于定值 l，就说函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$时以 l 为极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=l \quad 或 \quad f(x)\to l \quad (x\to\infty). \tag{1-3}$$

这种函数极限同数列极限的意思是一样的，只是在数列极限中，自变量 n 只取正整数，取极限时它离散地增大，而在函数极限中，自变量 x 取任何实数，取极限时它连续地增大.

另外函数的变化是由自变量的变化决定的，因此，必须先指出自变量的变化趋势，才能谈到函数的变化趋势. 一般说来，自变量的变化趋势有两种情况：

(1) $x\to x_0$，即自变量 x 无限趋近于定值 x_0（但不等于 x_0）. 如果 x 只取比 x_0 大的值趋向于 x_0，就记为 $x\to x_0^+$；如果只取比 x_0 小的值趋向于x_0，就记为 $x\to x_0^-$.

(2) $x\to\infty$，即自变量 x 的绝对值无限变大，如果 x 只取正值无限变大，则记作 $x\to+\infty$；如果 x 只取负值而其绝对值无限变大，则记作 $x\to-\infty$.

下面我们给出函数极限的一般定义

定义　如果当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，函数$f(x)$无限趋近于一个定数A，我们就说，A是函数$f(x)$当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \quad 或当 \quad x\to x_0（或x\to\infty）时 \quad f(x)\to A. \tag{1-4}$$

在高等数学中，为了研究问题方便起见，常把常数看成是取同一值的变量，因而 $y=C$ 也可以看做是一个函数，即自变量取任何值时，函数的对应值总是C. 根据极限定义显见

$$\lim_{x\to x_0} C=C; \quad \lim_{x\to\infty}C=C$$

这就是说，常数的极限就是它本身.

例 1　函数 $f(x)=x^2+1$（如图 1-1），由图可见，当 x 沿横轴自任何一方趋向 0 时，$f(x)$ 的对应值都渐趋于 1，因此，当 $x\to0$ 时，$f(x)\to1$.

定义　当 x 从左（右）侧趋近于 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 无限接近于一个定数 A，我们就说，A 是函数 $f(x)$ 当 x 从左（右）侧趋近于 x_0 时的左（右）极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A,\quad (\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A).$$

定理　极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，等价于 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x). \qquad (1\text{-}5)$$

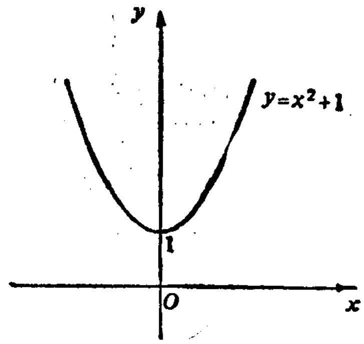

图 1-1

因此，我们说函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的必要且充分条件是左极限（left-hand limit）和右极限（right-hand limit）各自存在并且相等．若左、右极限都存在但不相等，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在．

例 2　当 $x\to\infty$ 时，求函数 $y=1+\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势．

解　我们先研究 $x\to+\infty$ 时函数 $y=1+\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势．给出一系列 x 逐渐增大的值，求出 y 的对应值：

x	1	10	100	1000	10000	100000	…
$y=1+\dfrac{1}{x}$	2	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	…

并作出 $y=1+\dfrac{1}{x}$ 的图形，如图 1-2 所示．可以看出，在 x 无限增大时，y 的值无限接近于 1，即 y 与 1 之差的绝对值可以变得任意小．我们说当 $x\to+\infty$ 时，函数 y 的极限是 1，记作

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

同样可得，当 $x\to-\infty$ 时，函数 y 的极限也是 1．于是

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$

例 3　求

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{当 } x<0; \\ 0, & \text{当 } x=0; \\ x+1, & \text{当 } x>0. \end{cases}$$

当 $x\to0$ 时的极限．

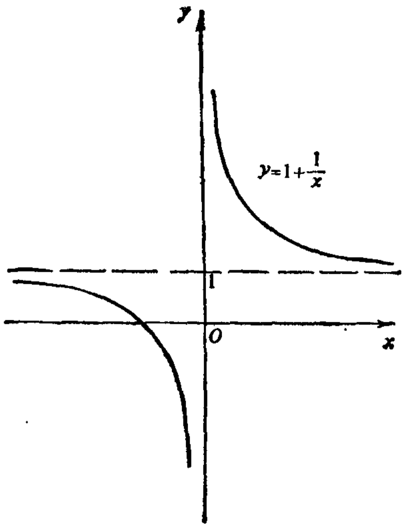

图 1-2

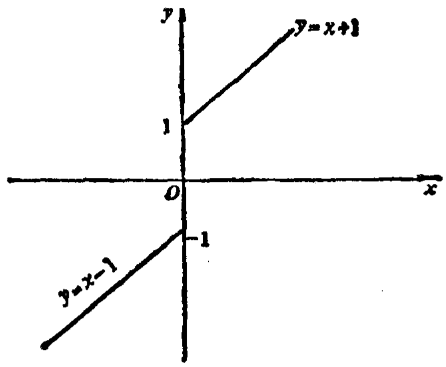

图 1-3

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，所以 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在，如图 1-3.

三、无穷小与无穷大、极限运算法则

1. 无穷小　我们常会遇到极限为零的变量，例如

当 $x\to+\infty$时，$\frac{1}{n}$的极限是零；当 $x\to 1$ 时，$x-1$ 的极限也是零.

定义　极限为零的变量称为无穷小（infinitesmal）. 若 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 的极限为零，则称当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 为无穷小.

例如　$x\to 0$ 时，x、$\sin x$都是无穷小，$x\to\infty$时，e^{-x}、$1/x$ 也都是无穷小.

由无穷小的定义可知，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则当 $x\to x_0$ 时 $a=f(x)-A$ 是无穷小. 反之，如果当 $x\to x_0$ 时 $a=f(x)-A$是无穷小，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

由于
$$a=f(x)-A,$$
所以
$$f(x)=A+a.$$

这就说明了在某一个过程中，具有极限的函数$f(x)$ 等于它的极限A与无穷小a 的和.

在上述关系中，如将“$x\to x_0$”改成“$x\to\infty$”时，结论仍然成立.

从无穷小的定义还可以得出：两个无穷小的和（或差）仍是无穷小；两个无穷小的积仍是无穷小.

2. 无穷大　在客观世界中，存在着另一类变量，它们的变化趋势和无穷小的变化趋势相反，在变化过程中其绝对值无限变大.