数学规划的原理和方法

俞玉森 主编

華中工学院出版社

内 容 提 要

数学规划是运筹学的一个重要分支，它是近几十年才发展起来的一门新兴学科，它在工业、农业、交通运输、国防和经济管理等方面都有广泛的应用。本书包括数学规划的三个主要部分：线性规划、非线性规划和动态规划。论述了这三部分的数学基础、基本原理和基本方法，并注意了它们的应用。本书力求深入浅出、通俗易懂，每章后面都附有习题，便于自学。

本书可作为大专院校理工科各专业高年级学生和研究生的教材或教学参考书，也可供从事应用数学、运筹学、系统工程、经济管理和工程设计等方面的工程技术人员参考。

数学规划的原理和方法

解玉森 主编
责任编辑：陈礼珞

华中工学院出版社出版
（武昌喻家山）
湖北省新华书店发行
华中工学院出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：13.75　字数：315,000
1985年3月第一版　1985年3月第一次印刷
印数：1－10,000

统一书号：13255—027　定价：2.55元

前 言

在生产建设、计划管理和科学试验等许多方面，人们总是想采取种种措施以获得最优的结果。这一类问题就叫做最优化问题。数学规划所研究的也正是这类最优化问题，它是古典极值问题的新发展。

早在本世纪三十年代末，苏联数学家Л. Б. Канторович就研究了生产组织和经济管理中的数学方法，提出了线性规划问题。第二次世界大战期间，由于军事运输的需要，提出了线性规划问题的解法。1947年 G. B. Dantzig 提出的单纯形方法就是这方面最杰出的算法。到五十年代初，H.W.Kuhn 和 A.W. Tucker 提出了非线性规划的基本定理，为这方面的发展奠定了理论基础。此后，出现了很多算法，其应用也涉及到各个领域。六十年代可说是最优化方法飞速发展的十年。

线性与非线性规划所研究的问题，通常是与时间无关的，或者说是静态的。在实际问题中，还有不少是与时间有关的，或者说是动态的。五十年代，R.Bellman 提出了动态规划的最优化原则，创立了动态规划这一重要分支，它的应用也是极为普遍的。近年来，还广泛应用于最优控制方面。即使是静态的问题，我们也可以把它看作是按阶段进行的，因而也可以看成是一个动态规划问题。这就使得动态规划也成为求解一些线性、非线性规划的有效方法。

本文包括线性规划、非线性规划和动态规划三部分。它是根据作者为我院各专业（包括应用数学专业）高年级学生和研

究生讲课时所编的讲义改写而成的。第一篇线性规划由杨林锡编写，第二篇非线性规划由邓成梁编写，第三篇动态规划由甘应爱编写。

本书主要论述了数学规划的三个主要分支的基本理论和基本方法，并注意了这些理论和方法的应用。在计算方法方面，除了讲清基本方法以外，还介绍了比较新颖的方法，以便于应用。本书力求深入浅出，通俗易懂，只要是学过微积分和线性代数的读者，都可以看懂。每章后面都附有习题，便于自学。

我们希望，本书的出版不但能为大专院校理工科各专业高年级学生和研究生提供一本可用的教材，也能为从事应用数学、运筹学、系统工程、管理工程和工程设计等方面的广大科技人员提供一本合适的参考书。

在本书编写过程中，得到我院数学系优化与运筹学教研室同志们的大力支持，施保昌同志编选了非线性规划的部分习题，特此致谢！

由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，敬请广大读者给予批评指正！

俞玉森

1983年10月于华中工学院

目　　录

第二篇 非线性规划

第三篇 动态规划

第一篇　线性规划

对于数学规划或整个运筹学来说，线性规划是形成最早、最成熟的一个分支，到目前为止，它的应用也最广泛。它又是数学规划以及运筹学其它一些分支的基础，故成为学习运筹学的首要课程之一。

从数学上说，线性规划问题可以归结为一类条件极值问题，即在一组线性约束条件(等式及不等式)下，寻求一个线性函数的最大值或最小值。这样一类条件极值问题，用微积分方法来解决是显得无能为力的。

苏联数学家 Л.В.Канторович 被认为是线性规划这一学科的最早的创始人之一。1939 年，他就提出了解决下料问题和运输问题的解乘数法，并写了《生产组织与计划中的数学方法》一书。但是，直到 1947 年美国数学家 G.B. Dantzig 提出了求解一般线性规划问题的方法——单纯形法之后，这门学科才在理论上趋向成熟，并在应用方面获得极大的成功。

第一章　线性规划问题

§1　线性规划的实际例子

例 1　资源利用问题

设某大型企业有 m 种不同的资源（各种原材料、动力资源、资金、劳力等）可以用来生产 n 种产品。制定生产计划时，应该考虑如何有效地利用现有的资源条件，使企业的总产值最大。假定有关的数据为

a_{ij}——生产每一单位产品 B_j 所消耗的资源 A_i 的数量；

b_i——资源 A_i 的总数量（$i=1, 2, \cdots, m$）；

c_j——产品 B_j 的单价（$j=1, 2, \cdots, n$）；

d_j——产品 B_j 的定额（最低限度的产量）。

设产品 B_j 的生产数量为 x_j($j=1, 2, \cdots, n$)，则此问题可归结为如下的数学问题：

求一组变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使满足

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \leqslant b_i \quad (i=1, \cdots, m);$$

$$x_j \geqslant d_j \quad (j=1, \cdots, n),$$

且使总产值

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

达到最大。

例 2　物资调运与分配问题

设某种物资从 m 个发点 $A_1, \cdots, A_m$ 输送到 n 个收点 $B_1, \cdots, B_n$，其中发出量分别为 $a_1, \cdots, a_m$，收入量分为 $b_1, \cdots, b_n$，并且

$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$（称为产销平衡）。已知从第 i 个发点到第 j 个收点的距离（或单位运费）为 $c_{ij}(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$。应当考虑如何分配供应，才能既满足需要，又使总的运输吨公里（或运费）达到最小。

若用 x_{ij} 表示由第 i 个发点运到第 j 个收点的物资数量，则上述问题可归结为

求一组非负变量

$$x_{11},\cdots,x_{1n},\ x_{21},\cdots,x_{2n},\cdots,x_{m1}\cdots,x_{mn},$$

使满足

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=1,\cdots,m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=1,\cdots,n),$$

且使

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

达到最小。

实际上，线性规划方法已被广泛地应用于军事、经济、工业以及社会问题。各种各样的问题都可以用线性规划模型来描述，或者至少可以用它来逼近。至于如何建立模型，这主要依靠实践经验的积累。

§2　线性规划问题的数学形式

从数学上来说，线性规划问题可以归结为如下的一类条件极值问题：求一组非负变量（注：在以上例1中，若作代换 $x'_j = x_j - d_j$，则不等式 $x_j \geqslant d_j$ 就变为 $x'_j \geqslant 0$），满足一定的条件——线性方程组或线性不等式组，使一个线性函数取得极值（极小或极大），其中，限制条件叫做**约束条件**，被求极值的函

数叫做**目标函数**。亦即

求 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2\cdots,x_n)^T$，满足约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\lesseqgtr b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\lesseqgtr b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\lesseqgtr b_m; \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n), \end{cases}$$

（符号$\lesseqgtr$表示$\geqslant$，=，$\leqslant$三个符号中的任意一个）且使目标函数

$$f(\boldsymbol{X})=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

达到极小（或极大）。

对不同的问题而言，约束条件可以是线性方程组，也可以是线性不等式组。约束条件和目标函数这种形式上的不一致性，对我们讨论线性规划问题的求解增添了不少麻烦。下面介绍用统一的标准形式表示各种类型的线性规划问题

若“求 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，满足

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,\cdots,m);$$
$$x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,\cdots,n),$$

使得

$$f(\boldsymbol{X})=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

达到极小”的线性规划问题，则就能求解一切线性规划问题。这叫做线性规划问题的**标准形式**，简记为

$$\min f(\boldsymbol{X})=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,\cdots,m); & (1.2) \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,\cdots,n). & (1.3) \end{cases}$$

满足约束条件（1.2）和（1.3）的解 $(x_1,\cdots,x_n)^T$ 称为**可行解**；而满足(1.1)式的可行解称为**最优解**。不失一般性，我们还可假定（1.2）式的右端 $b_i \geqslant 0(i=1,\cdots,n)$。

现在介绍各种线性规划问题如何化为标准形式。

（1）如果约束条件是线性不等式

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \leqslant b_i, \tag{1.4}$$

则它等价于

$$\begin{cases} a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n+y_i=b_i; \\ y_i \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 y_i 称为**松弛变量**。同理，不等式

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \geqslant b_i \tag{1.6}$$

等价于

$$\begin{cases} a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n-y_i=b_i; \\ y_i \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

其中 y_i 称为**剩余变量**。

因此，如果约束条件中有形如（1.4）或（1.6）式的不等式，便可通过引进松弛变量或剩余变量的办法，化为（1.2）及（1.3）式的形式。

（2）若给出了满足约束条件（1.2）、（1.3），但需求目标函数最大值的线性规划问题，则可以先求满足（1.2）、（1.3）式使

$$\min f_1=\sum_{j=1}^{n}(-c_jx_j)=-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j;$$

的最优解.易知，新旧问题具有相同的最优解，而目标函数值恰好差一负号，因此，求出新问题的解，原问题的解也就得到了。

（3）关于变量的非负限制条件（1.3）。可能在某些问题中，有一个或几个变量没有非负限制，这样的变量称为**自由变**

量。比如 x_1 是这样的变量，则我们只要作代换

$$x_1 = x_1' - x_1'' \quad (x_1' \geqslant 0,\ x_1'' \geqslant 0),$$

就化为有非负限制的情形了。另一种办法是把自由变量消去。这样，约束方程组就只含 $n-1$ 个变量 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 和 $m-1$ 个方程了。

为了使数学形式更简练些，今后我们尽量用矩阵记号来表示线性规划。引进符号

$$\boldsymbol{C} = (c_1,\ c_2, \cdots, c_n),$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

则（1.1）～（1.3）式可简写为

$$\begin{cases} \min f = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}; \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列记为 $\boldsymbol{P}_j$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可写成分块的形式

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n).$$

$\boldsymbol{P}_j$ 是一列的矩阵，也称为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，可看作 m 维空间中的一点。这时，约束方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$ 也可以表示为线性组合的形式：

$$x_1\boldsymbol{P}_1 + x_2\boldsymbol{P}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{b}.$$

类似地，$\boldsymbol{X} = (x_1,\ x_2, \cdots, x_n)^T$ 一方面看作是一列的矩阵，另一方面又看作是 n 维欧氏空间的向量或点。所有可行解构成

的集合D，称为**可行解集**或**约束区域**，记为

$$D=\{X \mid AX=b,\ X\geqslant 0\},$$

它是有限个超平面和半空间的交集。弄清楚它的结构，对于线性规划的理论和方法来说，具有重要意义。

§3 两个变量的线性规划的图解法

当一个线性规划问题只含有两个变量时，可以采用**图解法**来求解。虽然在实际应用中这样的问题通常是不会遇到的，但图解法可用来说明解一般线性规划问题的一些基本概念。

求x_1，x_2，在约束条件

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2\leqslant d_1; \\ b_1x_1+b_2x_2\leqslant d_2; \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

（不等式的数目不一定只限于二个）之下，使目标函数

$$f(x_1,\ x_2)=c_1x_1+c_2x_2$$

达到最大值（或最小值）。

如图1—1所示。可行解集D是平面上由坐标轴$x_1=0$，$x_2=0$及直线

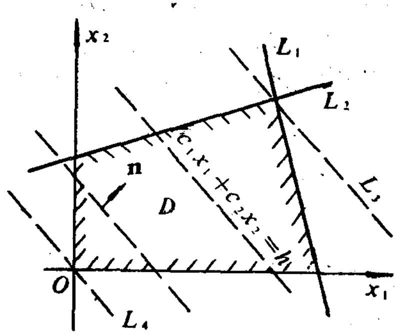

图 1—1

$$L_1:\ a_1x_1+a_2x_2=d_1;$$

$$L_2:\ b_1x_1+b_2x_2=d_2$$

所划分出来的四个半平面的交集（图中划有阴影的部分）。一般地说，当这个交集不空的时候，它是第一象限内的一个凸多边形区域(有界的或无界的)。问题是如何从这样的凸多边形区域（包括边界）中找出使目标函数 f 取最大值（最小值）的点（即最优解）来。

当目标函数等于一个指定值 h 时，

$$c_1x_1+c_2x_2=h$$

就表示一条直线，位于此直线上的点具有相同的目标函数值 h，因而称之为等值线；当参数 h 变化时，就得到一族平行直线，这一族平行直线完全刻画出目标函数 f 的变化状态。当 h 值由小到大地变化时，直线 $c_1x_1+c_2x_2=h$ 就随之移动（沿法线方向 n）而遍历可行解集 D 的每一点。从这移动的趋向上立即可以看出函数 f 在什么地方达到最大值或最小值。实际上，让等值线沿法线方向平行移动，$f(x_1,x_2)$ 逐步增大，所以刚开始要离开 D 的直线是经过 D，并且使 h 取最大值，如图 1—1 中的直线 L_3；让等值线沿法线方向的反方向移动，则 f 值逐步减小，这时刚开始要离开 D 的直线是经过 D，并且使 h 取最小值，如图 1—1 中的直线 L_4。总之，最大值及最小值（如果存在的话）一定在约束区域边界的某些点上达到。

例 1　约束条件

$$\begin{cases} -2x_1+x_2\leqslant 2; \\ x_1-2x_2\leqslant 2; \\ x_1+x_2\leqslant 5; \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0, \end{cases}$$

目标函数 $f=-x_1+x_2$。

可行解集是图 1—2 的凸多边形区域 OABCD(包括边界)；

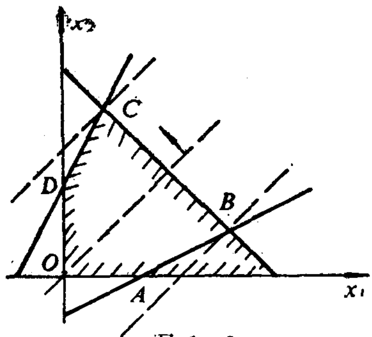

图 1—2

以虚线表示的平行直线族是目标函数的等值线，其中箭头指示着参数 h（即目标函数值）的递增方向。由此看出，目标函数在 B 点达到最小值，在 C 点达到最大值，即有

$$\min f = f(4,1) = -4+1 = -3;$$
$$\max f = f(1,4) = -1+4 = 3.$$

例 2 约束条件

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 1; \\ x_1 - 3x_2 \geqslant -3; \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

目标函数 $f = -2x_1 + x_2$。

如图 1—3 所示，可行解集是一个无界区域，虚线表示函数 f 的等值线族，其中箭头指示 f 的递增方向。显然，最大值由顶点 $B(0,1)$ 给出，$\max f = f(0,1) = 1$。但由于区域 D 在函数的递减方向上无界，即 f 可以无止境地下降，所以不存在最小解。