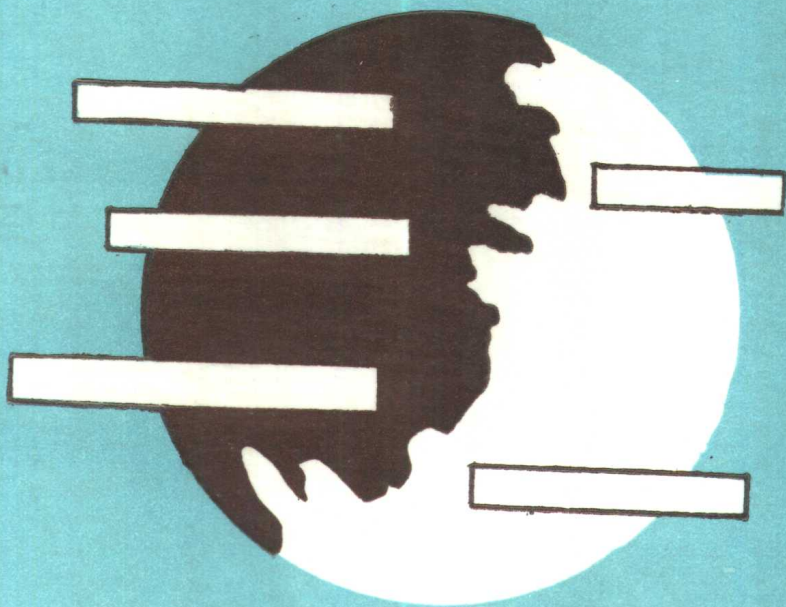




丑纪范  
刘式达  
刘式适

# 非线性动力学

现代大气科学技术丛书



出版社



中国科学院  
数学研究所  
数学研究所

# 非线性动力学

现代大气科学丛书



气象出版社

# 非线性动力学

丑纪范 刘式达 刘式适 编著

气象出版社

(京) 新登字046号

## 内 容 简 介

本书以近年来国内外关于大气非线性动力学问题的研究成果为基础，加上作者自己的研究成果，对大气非线性动力学的基本问题、基础知识、大气非线性波动、求解非线性方程的摄动法、非线性大气动力学的特点和大气中的非线性现象作了系统简明的阐述。对内容的叙述深入浅出，易读易懂，发人深思。

本书可供气象部门高级业务技术组织管理人员，高等气象院校的师生，研究生和业务科研等单位气象科技人员阅读。

本书是现代大气科学技术丛书之一。

## 非线性动力学

丑纪范 刘式达 刘式适 编著

责任编辑：杨长新 终审：顾仁俭

封面设计：严瑜仲 责任技编：席大光 责任校对：王旭

\*

气象出版社出版

(北京西郊白石桥路46号)

北京昌平环球印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销

\*

开本：787×1092 1/32 印张：6.5 字数：142千字

1994年8月第一版 1994年8月第一次印刷

印数：1—1100

ISBN 7-5029-1669-5/P·0676

定价：5.90元

000000

# 前 言

本书尝试对近年来发展起来的大气非线性动力学的基本问题、基础知识、求解方法、特点和大气中非线性现象的研究现状和新进展作一简要的、综合的概述。对内容的叙述既希望深入浅出，易读易懂，又力图简洁概括，引人深思。但限于作者水平，难免事与愿违，错误不当之处，一定很多，希望读者给以指正。

本书第一、六、七部分由丑纪范编写，第二、三部分由刘式达编写，第四、五部分由刘式适编写。

作者

1993年8月

# 目 录

一、开篇话	( 1 )
(一) 理论研究有什么用?	( 1 )
(二) 怎样进行理论研究?	( 3 )
二、非线性大气动力学的一些基本问题	( 7 )
(一) 从对流到湍流	( 7 )
(二) 从线性到非线性	( 9 )
(三) 从绝热到强迫	( 13 )
(四) 从地转风、单摆到孤立波	( 16 )
(五) 从同宿轨道到异宿轨道, 从孤立波到冲击波	( 19 )
(六) 从不稳定层结到稳定层结	( 22 )
三、研究非线性大气动力学的基础知识	( 27 )
(一) 动力系统的定常状态	( 27 )
(二) 定常状态的分岔	( 31 )
(三) 映射的分岔和周期解的分岔	( 37 )
(四) 分岔条件的归纳和整体形态	( 42 )
(五) 突变机理	( 43 )
(六) 混沌机理	( 46 )
四、大气非线性波动	( 55 )
(一) 特征线和Riemann不变量	( 55 )
(二) 浅水波和Boussinesq方程和KdV方程	( 67 )
(三) 非线性、耗散和频散的作用	( 72 )
(四) Burgers方程的行波解——激波	( 75 )
(五) KdV方程的行波解——椭圆余弦波和孤立波	( 77 )
(六) 其它非线性演化方程的行波解	( 84 )
(七) 非线性波的波参数	( 94 )

(八) 非线性项展开法.....	( 95 )
(九) 非线性波的共同特征.....	( 105 )
五、摄动法.....	( 108 )
(一) 摄动法.....	( 108 )
(二) 约化摄动法.....	( 123 )
六、非线性大气动力学的特点.....	( 140 )
(一) 来源于流体运动的实验研究提供的直观 启示.....	( 141 )
(二) 借助于几何直观进行全局定性分析.....	( 149 )
(三) 研究的主要对象是极限解集.....	( 153 )
(四) 定性分析与数值计算相辅相成.....	( 174 )
(五) 用概率论的语言对确定论系统的整体特征 进行统计描述.....	( 177 )
七、大气中的非线性现象.....	( 181 )
(一) 阻塞环流的形成和维持.....	( 181 )
(二) 对流层大气环流的指数循环.....	( 185 )
(三) 大气环流的季节性突变.....	( 187 )
(四) 热带季风和副热带高压的持续和变换.....	( 191 )
(五) 锋面的形成和维持——空间变化的集中化.....	( 193 )
(六) 行星环流型的持续和转换——时间变化的 集中化.....	( 195 )
结语.....	( 197 )
参考文献.....	( 200 )

# 一、开 篇 话

大气动力学致力于揭示大气运动的基本规律和机制，是长、中、短期天气预报和气候预测的基础理论。这些理论乃是对观测到的天气和气候演变现象作出解释，说明对该现象起作用的诸多的物理过程中，哪些是主要的，揭示出它形成的机理。但是一般不能直接用于天气预报，不能提供预报方法。从事这种理论研究达到很高水平的人，预报天气不一定比一般从事实际工作的人准确。这样一来，在我国气象事业的发展进程中，有人给理论研究戴了三顶帽子：脱离生产，脱离实际，脱离服务。那么究竟该怎样看待？

## （一）理论研究有什么用？

著名理论气象学家E.N.Lorenz（洛伦茨）在一次演讲中说：“我很清楚，一个有经验的预报员和一个没有经验的预报员作出的预报，其准确率可以相差很大，主观经验是很有价值的，应该提倡在实践中积累经验。但是经验没有历史，这东西父亲不能传给儿子，丈夫不能传给妻子，人存经验在，人亡经验消。作为发展气象科学，提高天气预报准确率，不能是主要的途径。而要依靠将经验的方法转变为数学和物理的方法。”

说到数学和物理的方法就要追溯到牛顿的年代。牛顿在《自然哲学的数学原理》中宣布物质的运动受某些普遍的物理原理所支配，最著名的也许是万有引力定律。空间科学家们用它来预测行星和卫星的轨道，精确度之高令人难以相信，



人们可以提前许多年预报日、月蚀的发生，结果分秒不差。在牛顿以前，自然科学的发展主要是靠经验积累，发展速度很慢；而牛顿以后，自然科学快速发展。其主要原因是研究方法的根本转变：从经验积累转变到追索物理机制，从物理的观点用数学的方法从理论上来研究自然现象。这个根本转变的重大意义已被历史证明了，它推动了人类科学的进步。由此可见，所谓“三脱离”的基础理论研究，并非气象科学独特的行为，不过是顺乎世界科学发展的潮流走上的康庄大道。

西方在总结1959年以前气象预报的准确率时提出：为什么有的年代预报准确率提高得很快，有的则不然？主要归因于两点：

(1) 取决于大气探测发展的情况；

(2) 取决于当时的数学、物理学在气象科学中应用的情况。

在那些大气探测发展较快，在使观测资料形成正确的概念上做得比较好，能较好地运用当时数学、物理学于气象科学的年代里，也就是气象预报准确率提高比较快的年代。

50年代以后，大气动力学的基础理论研究，在数值天气预报中结出了丰硕之果。数值天气预报，1955年首先在美国业务化。目前世界上许多国家都建立了自己的业务预报系统。全球及半球模式用来作3—10天大范围环流形势预报，区域模式用来做1—2天小范围天气过程预报。欧洲中期数值预报中心（简称EC）的19层 $T_{100}$ 模式可能是当前世界上中期数值预报水平最高的模式。以500hPa高度日距平与实况的相关系数达到0.6为预报有效的标准，严格的统计表明，预报准确率是在稳步的提高，EC的预报时效，1980年全年平均

才4.5天，而1989年全年平均已提高到7.5天，其中1989年3月的预报时效已达到9.5天，正在逐渐接近作10天中期数值预报的目标。这个成绩是来之不易的，显然这要归功于大型电子计算机的计算能力的迅速提高，探测技术的进步（地球同步卫星和极轨卫星），但是与大气动力学的基础理论研究取得的成果也是分不开的。由此可见，虽然经验也重要，但靠积累主观经验的方法，预报准确率不可能有稳步的提高。理论研究虽然不能直接解决预报问题，不能提供预报方法，但它是我们的希望所在。它可以帮助我们搞清楚大气运动的物理机制，搞清天气变化的根本原因，至于何时能提高预报准确率，能转变为现实的生产力，只是时间的问题。只有培养出一批既有实际经验，又有理论水平的预报员，只有认真开展继续教育，使第一线工作的预报员能及时掌握新的理论研究成果，才能缩短这个时间。

## （二）怎样进行理论研究？

大气科学属于地学的一个分支，是从一门描述性的学科开始的。对自然现象的观测、记录、分析和概括奠定了这门科学的基础。进一步就是要从物理学的观点，用数学的方法将其发展为一门数理的定量的学科。现在在大气科学里进行理论研究有四种既相互区别又相互联系的方法：观测资料的分析 and 诊断，流体运动模型实验，动力学理论研究和数值模拟。

（1）观测资料的分析 and 诊断 大家知道，它是天气学和气候学中分析研究观测事实和模拟结果的物理机制的基本方法。它为理论工作提出了问题，指明了方向和检验理论研究正确与否。它使数值模拟、数值试验工作进入一个新的阶段，

即从一般性了解到了解变化的物理机制，并可检验数值模拟与观测事实异同的物理原因。但是分析和诊断离不开理论和概念的指导，实际上是同某种理论和某种观点联系在一起的，所以这个理论和概念的正确性直接影响到诊断分析的成效。日本有位哲学家，曾把自然科学发展概括为三个阶段：第谷阶段、开普勒阶段和牛顿阶段。首先第谷观测和积累了许多天文资料，并对观测资料作过大量的分析和诊断，但未获得有价值的成果。在他临终前将这些宝贵的资料给了他的学生开普勒。开普勒对这些资料进行了分析和诊断，得到了著名的行星运动三大定律。同样的资料为什么第谷揭示不出规律而开普勒却揭示出了。这难道是个人才能的差异么？科学史告诉我们，导致这两种不同结果的根本区别在于，开普勒是用正确的理论——哥白尼的日心学说作为指导获得成功的，而第谷则始终不相信被教会视为异端的哥白尼的日心学说。由此可见，基础理论的研究植根于观测研究的大量感性认识的基础上，其进展与成效受到探测技求和资料的质量和数量的制约，反过来观测资料的分析研究有赖于正确的动力理论的指导，依赖于其深度和水平。有人认为，大气科学目前还处在开普勒阶段，还有大量的事实有待于揭露，有待于进一步发展到牛顿阶段。

(2) 流体运动模型实验 实验对于物理、化学是很重要的研究手段，而大气中的有天气、气候意义的运动是不可能是在实验室内完全模拟出来的。那么为什么还要开展实验研究呢？这是因为在实验室内利用人工装置进行实验可以观测到真实的流体运动在某些简单的已知的因素的作用下的状况。观测到的实际大气的运动状态虽然也是真实的自然界的状态，但它是众多的极其复杂的因素的综合作用结果，而且是无法

重复的个例。流体运动的实验则不然，可以反复进行并具有明显的直观性，比实际大气运动要简单得多。希尔伯特说：

“一个复杂的现象得不到解释，同时发现一个简单得多的现象也得不到解释，那么探讨如何解释这个简单得多的现象，就是问题的关键。”事实上流体运动模型实验使人们看到了一些新的现象，启发了人们的思考，走在理论的前面给理论导航，推动了大气科学基础理论的发展。在下面“非线性大气动力学的特点”那一节中我们再详细说。

(3) 动力学理论研究 应用物理学定律和数学方法研究大气运动的演变机理，解释观测到的现象。近代的大气动力学理论研究起源于北欧，在20世纪20年代，提出了锋面气旋学说，形成了以V.皮耶克尼斯为代表的挪威学派。相应地在前苏联，也有以H.E柯钦为首的一系列工作。到30年代，由于无线电探空仪的使用，发现北半球中纬度高空的大气环流具有自西向东的绕极运动，其上叠加有波长达数千公里的波动。这些波动除有自身结构和运动规律外，还与低空的锋面气旋存在内在的联系。C.G.罗斯贝(1939)在理论上指出，这是由于科里奥利参数 $f$ 随纬度变化造成的，提出了长波理论，并由此引出一系列研究，从而形成了以罗斯贝为首的芝加哥学派。其主要贡献还有：大气运动的地转适应理论，行星波的能量频散理论，行星波的正压和斜压不稳定理论，尺度理论，滤波理论。这些理论研究为数值天气预报的成功奠定了基础。动力学理论研究，既然是用数理方法来研究大气问题，就不能不受到数学物理学本身发展水平的限制，也将随着数学物理学的发展而发展。另一方面，随着探测技术的发展，观测资料的增多，揭示出了新的现象，提出了新的问题，给动力学理论研究不断地提供了压力和动力。

(4) 数值模拟 大家知道大气运动服从一些物理定律的，这些定律可以用数学的语言写成数学方程（主要是微分方程），于是对于大气运动规律的研究就变成了求解微分方程的数学问题。但是由于支配大气运动的方程是如此复杂，我们遇到了纯数学的困难，求不到解析解。动力学理论研究的办法是针对大气中不同运动的形式所具有的不同特点，抓住其主要因子对方程组进行简化，求出简化后的方程组的解，依据得到的解来揭示该运动形式的规律。研究者的技巧就在于，所作的简化是否合乎实际，合乎实际的简化后的方程组能否解出。常常发生的情况是为了获得方程组的解，所作的简化不合乎实际，而合乎实际的简化的方程组，仍然难以得到其解析解。这就制约了理论研究的深入进行。Richardson的逐步积分概念，推动了电子计算机的研制，有了电子计算机以后，极其复杂的方程组，可以求得其数值解。数值模拟成了大气科学理论研究的重要方法。数值模拟既是实验又不是实验，既是理论又不是理论。在下面“定性分析与数值计算相辅相成”一节中我们再详细论述。

理论研究有上述四种方法。可以说，其进展的快慢和成效大小，在某种意义上完全取决于这四种方法相互配合，相互补充的程度。下面我们只涉及动力学理论研究，而且只对它的一个分支，非线性大气动力学作简要介绍。

## 二、非线性大气动力学 的一些基本问题

大气中的运动能用数学物理的方法来描述这已是一种趋势。Bjerknes的斜压概念, Rossby的长波公式及适应理论, Richardson的湍流涡旋串级过程已经大大推进了大气动力学的发展。随着电子计算机的高速发展, 1963年气象学家 Lorenz发现的奇怪吸引子和混沌, 是近三十年来自然科学的重大突破, 使非线性的数学物理方法能实际用于大气动力学的问题, 使大气动力学的研究又向前推进了一大步。

### (一) 从对流到湍流

采用 Boussinesq 近似后的无量纲的垂直运动方程和热力学方程可表示为

$$\beta^2 \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \theta + \frac{\beta^2}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} + \text{Ri}w = \frac{1}{\text{PrRe}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (2.2)$$

其中  $\text{Re} = \frac{VL}{\nu}$ ,  $\text{Ri} = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$ ,  $\text{Pr} = \frac{\nu}{k}$ ,  $\beta = \frac{H}{L}$  分别是雷

诺数、里查逊数、普朗特数和高长比。(2.1)式右端第二项是浮力项，第三项是粘性项。(2.2)式左边最后一项是可压缩大气的层结引起的垂直运动，(2.2)式右边代表热传导项。

(2.1)式和(2.2)式是非线性的偏微分方程，无法找到其解析解。但是从物理上考虑，它们应该包括研究大气中的对流和湍流现象。为了研究对流和湍流，我们必须对(2.1)和(2.2)式作最大的简化。

大气中的对流主要是由于太阳加热地面后由于浮力引起的。若大气层结递减率小于干绝热(或湿绝热)递减率，那么空气团沿干绝热线上升时要比周围空气冷，因而下沉，当下沉后又比周围空气热，就再上升，这样在平衡位置作上下振荡，这种振荡的传播就形成内重力波。若大气层结超过了干(或湿)绝热递减率，那么空气团沿干(或湿)绝热线上升就要比周围空气团热，因而继续上升形成对流。

虽然(2.1)(2.2)式较复杂，但浮力振荡或对流的物理过程不外乎是浮力 $\theta$ 引起垂直运动 $w$ ，反过来垂直运动 $w$ 又引起温度 $\theta$ 的输送。

因此在(2.1)式中设 $\beta=1$ ，左边只保留 $\frac{\partial w}{\partial t}$ ，右边只有浮力项。(2.2)式中只保留 $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ 和 $Riw$ 项。则简化为

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = -Riw \end{cases} \quad (2.3)$$

(2.3)式比(2.1)(2.2)式简单多了，基本上抓住了浮

力振荡和对流的主要实质，因而应该可以用来解释大气中的对流现象。

大家知道，夏天对流云起来后逐步对流加强形成浓积云、积雨云，云中有剧烈的湍流运动。湍流从物理上讲一定是要有粘性的，所以(2.3)式虽简单，但是无粘性。一种最直观的想法是在(2.3)式第一式保留拉普拉斯粘性项，但这又提高了方程的阶数。

我们知道拉普拉斯算子 $\Delta$ 在流体力学中反映粘性，它和固体摩擦中摩擦力的大小和速度成正比但方向相反是一致的。即

$$\Delta u \text{ 概念上等同于 } -u \quad (2.4)$$

我们只要将 $u$ 表示成傅里叶级数就看明白了，例 $u = \sin x$ ，则

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x = -u。$$

因此我们可以在(2.3)式第一式右端根据(2.1)式加上粘性项 $-\frac{u}{Re}$ ，则(2.3)式变成

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \theta - \frac{1}{Re} w \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = -Ri w \end{cases} \quad (2.5)$$

(2.5)式既然有了对流及湍流中的粘性的物理本质，但能否描述湍流呢？

## (二) 从线性到非线性

(2.3)式和(2.5)式都是线性的，将(2.3)式第一式对 $t$ 微商一次，再用(2.3)式第二式代入便得



$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Ri w = 0 \quad (2.6)$$

若把 (2.6) 式中的  $w$  看成仅仅是  $t$  的函数, 那么它就和单摆振荡方程

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (2.7)$$

本质上是一样的。

也就是说当  $Ri > 0$  时, (2.6) 式确实反映了浮力振荡。当把  $w$  看成既是  $t$  又是  $x$  的函数时, 再将 (2.6) 式中的  $w$  换成  $-\Delta w$ , 那么 (2.6) 式就是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Ri \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.8)$$

那么 (2.8) 式就是和数学物理中的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

本质上是一致的。

因此  $Ri > 0$  时 (2.8) 式本质上是一种内波, 通常就是内重力波。无论 (2.6) 式或 (2.8) 式, 当  $Ri < 0$  时, 它们均是指数增长的解。下一章我们将看到 (2.6) 式在相平面上其轨迹是一个围绕中心点的圆族。

同样对 (2.5) 式微商一次, 将 (2.5) 第二式代入得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial w}{\partial t} + Ri w = 0 \quad (2.10)$$

(2.10) 式和带有阻尼的振荡方程

$$\ddot{x} + a \dot{x} + b x = 0 \quad (2.11)$$

本质上是一致的。(2.10) 式和 (2.11) 式代表一种衰减的振荡, 下一章我们将看到它在相平面上是一螺旋到焦点的螺旋族。