初中趣味数学300例

翟连林 主编

北京教育出版社

初中趣味数学300例

翟连林 主编

北京教育出版社

初中趣味数学300例
Chuzhong quwei shuxue sanbai li
翟连林　主编
*
北京教育出版社出版
（北京北三环中路6号）
新华书店北京发行所发行
香河县第二印刷厂印刷
*
787×1092毫米　32开本　7.625印张　167700字
1991年1月第1版　1991年1月第1次印刷
印数 1—23,500
ISBN 7-5303-0147-0/G·164
定 价：2.90元

前　言

为了培养初中学生学习数学的兴趣，提高分析问题与解决问题能力，掌握好初中数学基础知识，我们编写了这本《初中趣味数学300例》.

书中300道例题是从近十年全国各地初中升学、毕业考试以及数学竞赛的试题中精选出来的，按数与式、方程与方程组、函数及其图象、不等式、解三角形、直线形、圆、综合题等八部分作了编排，对每题的思路作了具体分析，并给出规范解答. 例题新颖、典型、有趣，有利于学生开拓思路，培养学习数学的兴趣，是一本较好的课外读物.

本书由翟连林主编，编者有：杨志刚、施锦坤、周维华、罗锦祥、谢璧芳、刘尚宽和李维正等同志.

由于我们水平有限，书中缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正.

编　者

1990年2月

目　　录

一 数 与 式

1. 填空题

用科学记数法表示0.0001989＝____.

【思路分析】依据科学记数法的定义，将所给数字用$a\times10^n$($1\leqslant a<10$，n为整数)的形式写出.

【答】1.989×10^{-4}.

2. 选择题①

下列语句中，正确的是(　　).

(A)无限小数都是无理数；(B)无理数都是无限小数；(C)带根号的数都是无理数；(D)不带根号的数一定不是无理数.

【思路分析】无理数都是无限小数，但无限小数未必都是无理数，无限循环小数就不是无理数.$\sqrt{9}$带根号，但并非是无理数；$\sin18^\circ$不带根号，但却是无理数.故正确语句是B.

【答】B.

3. 填空题

(1) ____的相反数是它本身；____的绝对值与它的倒数和等于零.

【思路分析】由相反数、倒数、绝对值的意义可知，零的相反数是它本身；－1的绝对值是1；－1的倒数是－1.所

---

① 本书的选择题都是单项选择题，即用字母代号给出的A、B、C等几个备选答案中，只有一个答案是正确的.

以-1的绝对值和它倒数的和等于零.

【答】 0， -1.

（2） 当$a=$____时，$|a-\sqrt{a^2}|=-2a$.

【思路分析】由绝对值的概念知$-2a\geqslant 0$，则$a\leqslant 0$.

【答】$\leqslant 0$.

（3） 若$a+b=0$，则这两个数的关系是____；若$a-b=0$，则这两个数的关系是____；若$a\cdot b=1$，则这两个数的关系是____.

【思路分析】略①.

【答】互为相反数，相等，互为倒数.

（4） 如果一个数与它的相反数相等，那么这个数是____；如果一个数和它的倒数相等，那么这个数是____.

【答】 0， ± 1.

（5） 一个数的倒数的相反数是$3\frac{1}{5}$，这个数是____.

【答】$-\frac{5}{16}$.

（6） 如果a与它的绝对值的和为零，则

$$|a|-\sqrt{4a^2}=\_\_\_\_.$$

【答】a.

（7） 若$|x|\leqslant 1$，则$|x+1|+|x-1|=$____.

【答】 2.

4. 填空题

（1） 若a、b、c为三角形的三边，化简$\sqrt{(a-b-c)^2}-|b+c-a|=$____.

---

① 在一组考查内容相同但从不同的角度所选的几个小题中，思路分析类似者不再赘述，以后也不再标明“略”字.

【思路分析】$\sqrt{(a-b-c)^2}=|a-b-c|=|a-(b+c)|$，利用“三角形的两边之和大于第三边”及绝对值的概念可求得结果.

【解】$\sqrt{(a-b-c)^2}-|b+c-a|=|a-(b+c)|-|b+c-a|=-[a-(b+c)]-(b+c-a)=0$.

（2）若$|a|=2$，$|b|=5$，且$ab>0$，则$a-b=$____.

【思路分析】由$ab>0$知a、b同号．当a、b同为正时，$|a|=a$，$|b|=b$.当a、b同为负时，$|a|=-a$，$|b|=-b$.

【答】± 3.

（3）若$|a|+|b|=0$，则a与b的大小关系是____.

【思路分析】两个非负数之和为0，则这两个非负数都为0.

【答】$a=b=0$.

5．选择题

实数a、b在数轴上对应的位置如图1-1，

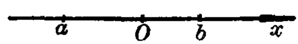

图 1-1

则 $|a-b|-\sqrt{a^2}$的结果是(　　).

(A)$-b$;　(B)$2a-b$;　(C)$b-2a$;　(D)b.

【思路分析】由图1-1可知，$a<0$，$b>0$，$a<b$，$a-b<0$．根据绝对值和算术根的概念，得$|a-b|-\sqrt{a^2}=b-a+a=b$.

【答】D.

6．已知实数a、b、c在数轴上的对应点是A、B、C，如图1-2，

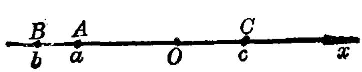

图 1-2

化简：$|a+c|+|b+c|-|a+b|$.

【思路分析】由图1-2可知，$a<0$，$b<0$，$c>0$，且$|a|>c$，$|b|>c$.

【解】$|a+c|+|b+c|-|a+b|$

$$=-(a+c)-(b+c)-[-(a+b)]=-2c.$$

7. 已知实数a，b，c在数轴上相应的点的位置如图1-3所示，

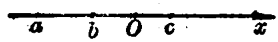

图 1-3

化简：$\dfrac{\sqrt{a^2}+|a-b|+|a+b|+|-3c|}{\sqrt{a^2-2ac+c^2}}$.

【简解】$\because$ $a<b<0$，$c>0$，$\therefore$ 原式$=3$.

8. 选择题

(1) 若a、b是实数，则下列四个命题中正确的命题是(　　).

(A)若$a\neq b$，则$a^2\neq b^2$； (B)若$a>|b|$，则$a^2>b^2$；

(C)若$|a|>|b|$，则$a>b$； (D)若$a^2>b^2$，则$a>b$.

【思路分析】采用筛选法.若a、b互为相反数，则(A)不成立.若$a=-3$，$b=-2$，但$a<b$，则(C)不成立.若$(-3)^2>(-2)^2$，则$-3<-2$，(D)不成立.所以只有(B)是正确的.事实上，因为$|b|\geqslant 0$，而$a>|b|$，所以$a>0$，且$|a|>|b|$，故$a^2>b^2$.

【答】B.

(2) 若$a^2>a$，则a应当是(　　).

(A)$a<0$； (B)$0<a<1$； (C)$|a|>1$； (D)$a<0$或$a>1$.

【答】D

(3) 若$0<x<1$，则x^2，x，$\sqrt{x}$，$\frac{1}{x}$四个数中最小数是(　　).

(A)x^2；(B)x；(C)$\sqrt{x}$；(D)$\frac{1}{x}$.

【思路分析】利用特殊值法．由已知$0<x<1$，取$x=0.04$.

【答】A.

9. 已知：$(x+y-1)^2+\sqrt{2x-y+4}=0$，求实数$x$、$y$及$y^x$.

【思路分析】求两个未知数必须具备两个方程．因此，本题应考虑如何由已知等式得出两个关于x、y的方程．根据非负数的性质，有$\begin{cases}(x+y-1)^2=0,\\ \sqrt{2x-y+4}=0.\end{cases}$从中可求出$x$、$y$及$y^x$.

【答】$x=-1$，$y=2$，$y^x=\frac{1}{2}$.

10. 设$\sqrt{\lg(3x+2y)}+|3x-2y+7|=0$.求

$$\log_{(\sqrt{2}-1)}\frac{\sqrt{2}y-2x}{2}\text{的值}.$$

【思路分析】根据非负数的性质：若有限个非负数之和等于零，则每一个非负数都等于零．由此，得$\sqrt{\lg(3x+2y)}=0$，$|3x-2y+7|=0$，于是可求x、y.

【解】由已知，得

$$\begin{cases}\lg(3x+2y)=0,\\ 3x-2y+7=0.\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}3x+2y=1,\\ 3x-2y+7=0.\end{cases}$$

解得　$x=-1$，$y=2$，

从而$\log_{(\sqrt{2}-1)}\dfrac{\sqrt{2}y-2x}{2}=-1$.

11．选择题

若数a增加它的$x\%$后得到数b，则b等于（　　）.

（A）$a\cdot x\%$；（B）$a(1+x\%)$；（C）$a+x\%$；　（D）$a\cdot(1+x)\%$.

【思路分析】“数a增加它的$x\%$”即$a+a\cdot x\%$.

【答】B.

12．填空题

若a增加本身的$p\%$得b，则b减少本身的$p\%$得______.

【思路分析】根据已知，$a(1+p\%)=b$；$b(1-p\%)=a(1+p\%)(1-p\%)=a[1-(p\%)^2]=a\left(1-\dfrac{p^2}{10000}\right)$.

【答】$a\left(1-\dfrac{p^2}{10000}\right)$.

13．选择题

用a克盐溶入b克水中得甲种盐水溶液，用c克盐溶入d克水中得乙种盐水溶液，则甲、乙两种盐水混合后的溶液浓度为（　　）.

（A）$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$；　（B）$\dfrac{a+c}{b+d}$；　（C）$\dfrac{a+c}{a+b+c+d}$；

（D）$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{c}{c+d}\right)$.

【思路分析】可由题意先求出甲、乙混合后的纯量（溶质），及混合后的总盐水量（溶液）.

【答】C.

14．选择题

(1) 代数式$1-\frac{1}{x}$是(　　).

(A)单项式；(B)多项式；(C)分式；(D)整式.

【思路分析】采用筛选法，$1-\frac{1}{x}$不是整式，更谈不到是单项式和多项式，逐一淘汰(D)、(A)、(B).

【答】C.

(2) 对于式子①xyz；　②x^2-xy+y^{-2}；　③$\frac{1}{x}$；

④$\frac{x^2-2x+1}{x-1}$；　⑤$\frac{1}{2}x+y$.正确的判断是(　　).

(A)①、③是单项式；(B)②是二次三项式；(C)②、⑤、④是多项式；(D)①、⑤是整式.

【答】D.

15. 已知$a:b:c=2:3:4$，$a+b+c=27$，求$a-2b-2c$的值.

【思路分析】设一份为x，分别求出a，b，c的值，进而代入$a-2b-2c$求值.

【解】设$a=2x$，$b=3x$，$c=4x$，

则$a+b+c=2x+3x+4x=27$.

$\therefore\ x=3$.

于是　$a=6$，$b=9$，$c=12$.

所以　$a-2b-2c=6-2\times9-2\times12=-36$.

16. 分解因式

(1) $x^3-2x^2y-\frac{1}{2}x^2z+xyz+xy^2-\frac{1}{2}y^2z$.

【思路分析】所给式子项数较多，宜分组分解.第一、

二、五项均只含x、y，将这三项分在一组，便于分解.

【解】原式$=(x^3-2x^2y+xy^2)-\left(\frac{1}{2}x^2z-xyz+\frac{1}{2}y^2z\right)$

$$=x(x^2-2xy+y^2)-\frac{1}{2}z(x^2-2xy+y^2)$$

$$=(x^2-2xy+y^2)\left(x-\frac{1}{2}z\right)$$

$$=(x-y)^2\left(x-\frac{1}{2}z\right).$$

【另解】原式$=\left(x^3-\frac{1}{2}x^2z\right)-(2x^2y-xyz)+\left(xy^2-\frac{1}{2}y^2z\right)$

$$=x^2\left(x-\frac{1}{2}z\right)-2xy\left(x-\frac{1}{2}z\right)+y^2\left(x-\frac{1}{2}z\right)$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}z\right)(x-y)^2.$$

(2) $4a^2+3b-3ab-4a$.

【答】原式$=(a-1)(4a-3b)$.

(3) $(x^2-1)(x^4+x^2+1)-(x^3+1)^2$.

【答】原式$=-2(x+1)(x^2-x+1)$.

(4) $4x^2+\frac{1}{4}-2x-9y^2$.

【答】原式$=\left(2x-3y-\frac{1}{2}\right)\left(2x+3y-\frac{1}{2}\right)$.

(5) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

【答】原式$=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

17. 分解因式

(1) $2x^2-7xy-15y^2-7x+9y+6$.

【思路分析】先把$2x^2-7xy-15y^2$用十字相乘法进行分解.

【解】原式$=(2x+3y)(x-5y)-(7x-9y)+6$

$=(2x+3y-3)(x-5y-2)$.

【另解】原式$=(3y-3)(-5y-2)-7x(y+1)+2x^2$(下同);

原式$=(2x-3)(x-2)-y(7x-9)-15y^2$(下同).

(2) $4a^2-2a+\frac{1}{4}-b^2$.

【答】原式$=\left(2a+b-\frac{1}{2}\right)\left(2a-b-\frac{1}{2}\right)$.

(3) $2x^3-3x-1$(在实数范围内).

【答】原式$=2(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\cdot$

$\left(x+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

(4) $(x^2-5x)(x^2-5x-2)-24$.

【答】原式$=(x+1)(x-1)(x-4)(x-6)$.

(5) $ab^2-2abc+ac^2-a^3$.

【答】原式$=a(b-c+a)(b-c-a)$.

18．填空题

（1）$x=$____时，$\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=0$；$x=$____时，

$\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$无意义．

【思路分析】$\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}$．

当分母不等于零，而分子等于零时，$\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=0$，

即　$x=-1$．

分母等于零，即$(x-1)(x-2)=0$，亦即$x=1,x=2$时，

$\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$无意义．

【答】-1； 1， 2．

（2）当 $x=$____时，分式$\dfrac{x-2}{x^2-4}$没有意义．

【答】±2．

（3）分式$\dfrac{x(x-1)}{x-1}$的值为零时，x的值为____．

【答】0．

（4）当$x=$____时，分式$\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$的值是零．

【答】-1．

（5）当$x=2$时，分式$\dfrac{x-a}{x-b}$的值为零，则$a=$____；当$x=$3时，这个分式没有意义，则$b=$____．

【答】2； 3．

（6）当$x=$____时，分式$\dfrac{x^2+2x-3}{6-2|x|}$的值为零．

【答】1.

(7) 当 $x=$____时，分式$\frac{|x|-2}{x^2-4x+4}$的值为零?

【答】-2.

(8) 若分式$\frac{|a|-1}{(2a-1)(a+1)}$的值为零，则$a=$____.

【思路分析】由 $|a|-1=0 \Longrightarrow a=\pm 1$，但$a=-1$时所给分式无意义，因此$a=1$.

【答】$a=1$.

19. 先化简，后求值.

(1) $\left(\frac{a^2+2a+1}{a^2-1}+\frac{1}{a^2-a}\right)\div\frac{a^3-1}{a^2-3a+2}$，其中 $a=-\frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

【思路分析】所给代数式各项均可进行因式分解，这样相同的项便可相约，进而化简．为计算方便，可把$a=-\frac{2}{\sqrt{3}+1}$分母有理化.

【解】原式$=\left[\frac{(a+1)^2}{(a+1)(a-1)}+\frac{1}{a(a-1)}\right]\div\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)(a-2)}$

$$=\left[\frac{a+1}{a-1}+\frac{1}{a(a-1)}\right]\cdot\frac{a-2}{a^2+a+1}$$

$$=\frac{a^2+a+1}{a(a-1)}\cdot\frac{a-2}{a^2+a+1}$$

$$=\frac{a-2}{a(a-1)}.$$

$\because \quad a = -\dfrac{2}{\sqrt{3}+1} = -\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = 1-\sqrt{3}.$

把a的值代入上面的化简式，得

$$原式 = \frac{1-\sqrt{3}-2}{(1-\sqrt{3})(-\sqrt{3})} = \frac{-(\sqrt{3}+1)}{3-\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{(\sqrt{3}+1)(3+\sqrt{3})}{6}$$

$$= -\frac{6+4\sqrt{3}}{6} = -1-\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

(2) $\left(\dfrac{a}{a-2b}-\dfrac{a}{a+2b}\right)\cdot\dfrac{a^3+8b^3}{a^3-2a^2b+4ab^2}$.其中$a=3$、$b=\sqrt{2}$.

【简解】原式$=\dfrac{4b}{a-2b}$，当$a=3$，$b=\sqrt{2}$时，原式$=16+12\sqrt{2}$.

(3) $\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}\div(x+3)\cdot\dfrac{x^2+1+2x}{x+3}$，其中$x=\lg5+\lg2$.

【简解】原式$=\dfrac{x+1}{x+3}$，　当 $x=\lg5+\lg2=\lg10=1$时，原式$=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\dfrac{x^2+x-2}{x^3-2x^2+x}-\dfrac{2x^2+2x+2}{x^3-1}+\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-x}\div\dfrac{x+1}{x}$，其中$x=\sqrt{2}$.

【答】原式$=\dfrac{2}{x(x-1)}$，当 $x=\sqrt{2}$时，原式$=2+\sqrt{2}$.

20. 已知：$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$，$a\neq0$、$b\neq0$、$c\neq0$，