



高等学校电子信息类规划教材

毫米波 准光理论与技术

窦文斌 编著 徐善驾 主审

毫米波准光理论与技术

电子工业出版社



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL: <http://www.phei.com.cn>

高等学校电子信息类规划教材

毫米波准光理论与技术

窦文斌 编著
徐善驾 主审

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书介绍了毫米波的准光理论与技术,主要包括高斯束理论、高斯束校正理论、准光元部件、准集成天线及其在准光技术中的应用、准光焦面阵成像等;阐述了作为近轴波动方程解的高斯束理论和满足亥姆霍兹方程的高斯束校正理论,介绍了准光振荡器、混频器与接收机、各种准光无源部件及一些准光光路组件等与应用联系紧密的内容;最后,阐述了准光焦面阵成像的有关知识和已提出的各种焦面阵结构;分析了焦面阵-透镜天线的辐射特性和小 $f_{\text{数}}$ 成像透镜的焦区场分布等。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,翻版必究。

图书在版编目(CIP)数据

毫米波准光理论与技术/窦文斌编著. —北京:电子工业出版社,2000.8

高等学校电子信息类规划教材

ISBN 7-5053-6085-X

I. 毫… II. 窦… III. 极高频-微波光学 IV. TN015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 65781 号

丛 书 名:高等学校电子信息类规划教材

书 名:毫米波准光理论与技术

编 著 者:窦文斌

主 审:徐善驾

责任编辑:卢先河

特约编辑:朱 宇

排版制作:电子工业出版社计算机排版室监制

印 刷 者:北京天宇星印刷厂

出版发行:电子工业出版社 URL:<http://www.phei.com.cn>

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×1092 1/16 印张:12.25 字数:300 千字

版 次:2000 年 8 月第 1 版 2000 年 8 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-5053-6085-X
TN·1364

印 数:2 100 册 定 价:22.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页,所附磁盘或光盘有问题者,请向购买书店调换。

若书店售缺,请与本社发行部联系调换。电话 68279077

出版说明

为做好全国电子信息类专业“九五”教材的规划和出版工作,根据原国家教委《关于“九五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》和《普通高等教育“九五”国家级重点教材立项、管理办法》,我们组织各有关高等学校、中等专业学校、出版社,各专业教学指导委员会,在总结前四轮规划教材编审、出版工作的基础上,根据当代电子信息科学技术的发展和面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的要求,编制了《1996~2000 年全国电子信息类专业教材编审出版规划》。

本轮规划教材是由个人申报,经各学校、出版社推荐,由各专业教学指导委员会评选,并由我部教材办与各专指委、出版社协商后,审核确定的。本轮规划教材的编制,注意了将教学改革力度较大、有创新精神、特色风格的教材和质量较高、教学适用性较好、需要修订的教材以及教学急需,尚无正式教材的选题优先列入规划。在重点规划本科、专科和中专教材的同时,选择了一批对学科发展具有重要意义,反映学科前沿的选修课、研究生课教材列入规划,以适应高层次专门人才培养的需要。

限于我们的水平和经验,这批教材的编审、出版工作还可能存在不少缺点和不足,希望使用教材的学校、教师、同学和广大读者积极提出批评和建议,以不断提高教材的编写、出版质量,共同为电子信息类专业教材建设服务。

原电子工业部教材办公室

前 言

本教材系按原电子工业部的《1996~2000 年全国电子信息类专业教材编审出版规划》，由全国高校电磁场与微波技术专业教学指导委员会编审、推荐出版。本教材由东南大学窦文斌编著，中国科技大学徐善驾担任主审和责任编辑。

本教材的参考学时数为 40 学时。其主要内容为：高斯束理论；高斯束校正理论；准光元部件；准集成天线及其在准光技术中的应用；准光焦面阵成像。阐述了作为近轴波动方程解的高斯束理论和满足亥姆霍兹方程的高斯束校正理论；介绍了准光振荡器、混频器与接收机、各种准光无源部件及一些准光光路组件等与应用联系紧密的内容；比较严格地处理了在准光技术中有重要应用的各种准集成天线；最后，阐述了准光焦面阵成像的有关知识和已提出的各种焦面阵结构；分析了焦面阵-透镜天线的辐射特性和小 $f_{\text{数}}$ 成像透镜的焦区场分布等。

本书的适用对象为研究生。第 1、3 章为基本内容，第 2、4、5 章为较深入或较新的内容，教师可根据实际需要调整各章学时。

由于毫米波准光技术正在发展之中，本书不可能覆盖准光技术的所有方面，只是希望为读者进入到这个方向的前沿打下基础。本书主要取材于期刊文献，也包括了笔者近年来的一些工作。本书的编撰得到东南大学孙忠良教授、杨铨让教授的大力支持。中国科技大学徐善驾教授审阅了全书初稿并提出了修改意见，根据修改意见，笔者对初稿进行了删补、修改和校订，相信修改稿比初稿会有许多改善。在此笔者对各位教授的支持和帮助深表谢意。电子工业出版社的卢先河博士对全书进行了仔细的文字校订工作，在此向他表示诚挚的谢意。妻子黄瑞坤对全书初稿的打字付出了辛勤的劳动，笔者向她表示衷心的感谢。限于笔者水平，书中难免存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编著者

2000 年 7 月

目 录

第 1 章 高斯束理论	(1)
1.1 近轴波动方程与高斯束主模	(1)
1.2 厄米特-高斯(Hermit-Gauss)模	(4)
1.3 拉盖尔-高斯(Laguerre-Gauss)模	(5)
1.4 高斯束的变换	(6)
1.5 准光谐振腔	(13)
1.6 口径天线辐射高斯束分析	(18)
1.6.1 圆波纹喇叭辐射高斯束	(18)
1.6.2 介质加载混合模喇叭辐射高斯束	(20)
1.6.3 对角型角锥喇叭辐射高斯束	(23)
1.7 高斯束有效的束腰条件	(25)
1.8 关于高斯束的佯谬	(26)
第 2 章 高斯束校正理论	(29)
2.1 摄动理论	(29)
2.2 复宗量高斯束与复源点场	(31)
2.3 高斯束校正理论	(39)
2.3.1 对拉盖尔-高斯模(Laguerre-Gauss)的校正	(39)
2.3.2 对厄米特-高斯束(Hermite-Gauss)的校正	(43)
2.4 高斯束之间的关系	(46)
2.5 高斯束校正理论应用例子	(50)
2.6 矢量场理论	(53)
第 3 章 准光元部件	(60)
3.1 准光振荡器	(60)
3.2 准光混频器与接收机	(64)
3.2.1 超半球透镜结构准光分谐波接收机	(64)
3.2.2 准集成号角天线接收机	(66)
3.2.3 其他混频器结构	(67)
3.3 准光放大器	(68)
3.3.1 栅格放大器	(68)
3.3.2 号角式放大器	(69)
3.4 准光 PIN 开关	(70)
3.5 准光无源元件	(72)
3.5.1 介质片耦合元件	(72)
3.5.2 准光分束器(线栅)	(72)

3.5.3	穿孔板滤波器	(74)
3.5.4	波板	(74)
3.5.5	roof 反射镜	(75)
3.5.6	非互易组件	(76)
3.5.7	透镜	(82)
3.5.8	反射镜	(84)
3.6	一些准光光路组件	(85)
3.6.1	双束干涉计	(85)
3.6.2	Martin-Puplett 干涉计 (MPI)	(86)
3.6.3	其他元件	(87)
3.6.4	极化态和矩阵算法	(88)
3.6.5	阻抗测量电路	(90)
3.6.6	MPI 用做双工器	(92)
3.7	光路横向尺寸设计考虑	(93)
第 4 章	准集成天线及其在准光技术中的应用	(96)
4.1	集成电路天线	(96)
4.1.1	介质基片上的天线	(96)
4.1.2	介质基片上偶极子激发表面波的全波分析	(97)
4.2	口径天线	(105)
4.2.1	计算口径天线辐射场的傅里叶变换法	(105)
4.2.2	电、磁源和等效原理	(110)
4.2.3	Stratton-Chu 公式	(113)
4.2.4	交叉极化	(118)
4.3	口径天线辐射场的平面波角谱方法	(119)
4.3.1	平面波函数	(119)
4.3.2	口径天线向半空间的辐射	(120)
4.3.3	波导中存在多个不连续性的问题	(122)
4.3.4	Q 矩阵元素的计算	(122)
4.4	准集成号角天线分析与应用	(131)
4.4.1	分析	(131)
4.4.1.1	格林函数	(131)
4.4.1.2	电流分布与输入阻抗	(135)
4.4.1.3	口径场分布	(137)
4.4.1.4	台阶不连续性分析	(138)
4.4.2	应用	(141)
4.5	几何射线场方法与准集成透镜天线分析	(142)
4.5.1	准集成透镜天线	(142)
4.5.2	射线光学场方法	(143)
4.5.2.1	平面波在平面介质交界面上的反射与折射	(143)

4.5.2.2	射线追迹	(145)
4.5.2.3	几种天线系统的分析	(152)
第 5 章	准光焦面阵成像	(157)
5.1	图像的基本描述	(157)
5.1.1	灰度	(157)
5.1.2	分辨率与瑞利判据	(157)
5.1.3	信噪比	(158)
5.1.4	图像的频谱	(158)
5.1.5	取样定理	(159)
5.2	扫描成像	(160)
5.3	焦面阵成像	(161)
5.4	几种焦面成像阵	(163)
5.4.1	准集成号角焦面成像阵	(163)
5.4.2	基片透镜集成天线成像阵	(164)
5.4.3	波纹喇叭焦面阵	(165)
5.4.4	缝隙端射天线焦面阵	(166)
5.4.4.1	隐蔽武器和炸药的检测	(166)
5.4.4.2	飞机自动着陆系统	(167)
5.4.4.3	焦面阵的其他应用	(168)
5.5	焦面阵-透镜成像系统电磁特性分析	(168)
5.5.1	波纹喇叭焦面阵-透镜远区辐射场分析	(168)
5.5.2	小 $f_{\text{数}}$ 光学系统焦区场的矢量衍射分析	(173)
5.5.2.1	双曲面聚焦透镜焦面上的场分布	(175)
5.5.2.2	扩展半球与扩展半椭球透镜背面上的场分布	(178)
5.5.2.3	焦区绕射斑峰值的移动	(181)

第 1 章 高斯束理论

电磁波在空间的聚束传播可用高斯束来描述。在一定意义上,高斯束理论可看作准光技术的导波理论或传输线理论,它是准光技术的基础。我们将从 Helmholtz 方程出发推导高斯束的表达式。

1.1 近轴波动方程与高斯束主模

考虑一简谐波,它满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (1-1)$$

设波在 z 方向传播, Ψ 随 x, y 的变化远较随 z 的变化慢。于是可设

$$\Psi = \psi(x, y, z) e^{-jkz} \quad (1-2)$$

代入(1-1)式得

$$\nabla_t^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2jk \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (1-3)$$

在直角坐标系中

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

在柱坐标系中

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

其中 ψ 随 x, y 和 z 的变化远较因子 $\exp(-jkz)$ 慢。取振幅慢变化近似,即 $\left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \ll k\psi$, 故与 $k \frac{\partial \psi}{\partial z}$ 相比,可略去 $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$, 于是得近轴波动方程

$$\nabla_t^2 \psi - 2jk \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (1-4)$$

这是波动方程的近似形成。

方程(1-4)的解是一组高斯模,在直角坐标系为 Hermite - Gauss(厄米特 - 高斯)模,在柱坐标系为 Laguerre - Gauss(拉盖尔 - 高斯)模。它的基本解是高斯主模,推导如下。

设方程(1-4)的解具有形式

$$\Psi = \exp \left\{ F_2(z) - \frac{x^2 + y^2}{F_1(z)} \right\} \quad (1-5.1)$$

代入(1-4)式,经化简得

$$(x^2 + y^2) \left[\frac{2}{F_1^2(z)} - jk \frac{F_1'(z)}{F_1^2(z)} \right] - \left[\frac{2}{F_1(z)} + jk F_1'(z) \right] = 0 \quad (1-5.2)$$

于是有

$$\frac{2}{F_1^2(z)} - jk \frac{F_1'(z)}{F_1^2(z)} = 0 \quad (1-5.3)$$

$$\frac{2}{F_1(z)} + jkF_2'(z) = 0 \quad (1-5.4)$$

由(1-5.3)式求得

$$F_1'(z) = \frac{2}{jk} \quad F_1(z) = \frac{2z}{jk} + A \quad (1-5.5)$$

A 是复常数。代入(1-5.4)式得

$$F_2'(z) = -\frac{2}{jkF_1(z)} = -\frac{2}{jk\frac{2z}{jk} + A} = -\frac{1}{z + j\frac{Ak}{2}}$$

积分得

$$F_2(z) = -\ln\left(z + j\frac{Ak}{2}\right) + B \quad (1-5.6)$$

(1-5.6)式还可表示为

$$F_2(z) = -\ln\frac{jAk}{2}\left(\frac{2z}{jAk} + 1\right) + B = -\ln\left(\frac{2z}{jAk} + 1\right) + B'$$

令 $B' = 0$ (适当选择时间起点), 代入(1-5.1)式得

$$\Psi = \exp\left[-\ln\left(\frac{2z}{jAk} + 1\right) - \frac{x^2 + y^2}{\frac{2z}{jk} + A}\right] \quad (1-5.7)$$

适当选择 z 轴坐标原点, 使 A 为实数, 令 $A = w_0^2$, 有

$$\begin{aligned} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\frac{2z}{jk} + A}\right] &= \exp\left[\frac{-(x^2 + y^2)\left(A + \frac{j2z}{k}\right)}{A^2 + \frac{4z^2}{k^2}}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2\left(1 + \frac{4z^2}{k^2w_0^4}\right)} - j\frac{k(x^2 + y^2)}{2z + \frac{w_0^4}{2z}k^2}\right] - \ln\left(\frac{2z}{jAk} + 1\right) \\ &= -\ln\left[\sqrt{1 + \left(\frac{2z}{w_0^2k}\right)^2} \exp\left(-j\tan^{-1}\frac{2z}{w_0^2k}\right)\right] \end{aligned}$$

于是

$$\exp\left[-\ln\left(\frac{2z}{jAk} + 1\right)\right] = \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2z}{w_0^2k}\right)^2} \exp\left(-j\tan^{-1}\frac{2z}{w_0^2k}\right)\right]^{-1} = \frac{\exp\left(j\tan^{-1}\frac{2z}{w_0^2k}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{2z}{w_0^2k}\right)^2}}$$

令

$$\begin{aligned} \frac{w(z)}{w_0} &= \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad z_0 = \frac{kw_0^2}{2} \\ R(z) &= z + \frac{z_0^2}{z} \quad \phi(z) = \tan^{-1}\frac{z}{z_0} \end{aligned}$$

则

$$\Psi = \exp \left[-\ln \left(\frac{2z}{jAk} + 1 \right) - \frac{x^2 + y^2}{\frac{2z}{jk} + A} \right] = \frac{w_0}{w} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \\ \times \exp \left[-jk \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + j\phi(z) \right]$$

它也可以表示为

$$\Psi_{00} = \frac{w_0}{w(z)} \exp \left\{ -j \left[\frac{\pi r^2}{\lambda R(z)} - \tan^{-1} \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right] \right\} \exp \left(-\frac{r^2}{w^2(z)} \right) \quad (1-5)$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2$ 。记波振幅下降至轴上值 I/e 处的波束半径为 $w(z)$ 。最小的 $w(z)$ 为 w_0 ，称为束腰。

$$\text{令} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (1-6)$$

$$P = -\tan^{-1} \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} + j \ln \left(\frac{w_0}{w(z)} \right) \quad (1-7)$$

(1-5)式可写成

$$\Psi_{00} = \exp \left[-j \left(P + \frac{\pi r^2}{\lambda q} \right) \right] = \exp \left[-j \left(P + \frac{kr^2}{2q} \right) \right] \quad (1-8)$$

高斯束各参数有关系

$$\frac{1}{w^2(z)} = \frac{k}{2} \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \quad (1-9.1)$$

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \quad (1-9.2)$$

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{z}{z^2 + z_0^2} \quad (1-10.1)$$

$$\phi(z) = \tan^{-1} \frac{z}{z_0} = \tan^{-1} \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \quad (1-10.2)$$

$$z_0 = b = k w_0^2 / 2 = \pi w_0^2 / \lambda \quad (1-10.3)$$

z_0 称作共焦参数。注意

$$\hat{\Psi}_{00} = \Psi_{00} \exp(-jkz) \quad (1-11)$$

其他有关公式

$$q = \frac{R \left(1 + j \frac{\lambda R}{\pi w^2(z)} \right)}{1 + (\lambda R / \pi w^2(z))^2} \quad (1-12)$$

$$q = z + j \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (1-13)$$

$$2k \left[P' + \frac{j}{q} \right] + \left(\frac{kr}{q} \right)^2 (1 - q') = 0 \quad (1-14)$$

$$\frac{dw(z)}{dz} - \frac{w(z)}{q} = w \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right) = \frac{j\lambda}{\pi w(z)} \quad (1-15)$$

高斯束发散角定义为

$$\left. \frac{dw(z)}{dz} \right|_{z \rightarrow \infty} = \tan \theta \approx \theta = \lambda / \pi w_0 \quad (1-16)$$

高斯束的基本特性如下:

由(1-5)式可见高斯束的基本特性。高斯束振幅随离轴的距离 r 的增大而减小,呈高斯分布。高斯束在 z 处的波阵面是曲率半径为 $R(z)$ 的球面(固定相位 $\phi(z)$ 不影响波阵面分布),称为高斯球面波。在 $z = 0$ 处, $R(z) \rightarrow \infty$, 曲率中心在无穷远处,为平面波。从 $z=0$ 向 z 方向传播,即 z 增加时, $R(z)$ 由无穷大变小,曲率中心由 $z = -\infty$ 向 $z = 0$ 点移动。在 $z = \pi w_0^2 / \lambda$ 处, $R(z) = 2\pi w_0^2 / \lambda$, 曲率中心在 $z = -\pi w_0^2 / \lambda$, 此时曲率半径最小。然后继续沿 z 方向传播, $R(z)$ 又逐渐增大,波阵面传到无穷远时, $R(z) \rightarrow \infty$, 曲率中心移到 $z = 0$ 点。 $z > 0$ 时,高斯束发散; $z < 0$ 时,高斯束会聚。也就是说,当高斯束从束腰向外传播时,波前的曲率半径从无穷大迅速变小,通过一极小值 $R(z) = 2\pi w_0^2 / \lambda$, 又逐渐变大,最后以表征球面波曲率半径变化的直线为渐近线趋于无穷大。高斯束的波面近似为球面,但与点波源发出的球面波不同,它属于变心球面波,即波前曲率中心位置随波面位置而变化。在离束腰很远处,高斯束的波面才与中心位于束腰的球面重合。

由(1-9)式和(1-10)式知,只要 w_0 和 λ 已知,则 $R(z)$, $w(z)$, $\phi(z)$ 随 z 的变化可完全确定,高斯束的特性也就完全确定。注意,我们要求的是方程(1-1)在条件(1-2)式之下的解,即要求的是 Ψ ,故还须用因子 $\exp(-jkz)$ 乘(1-5)式的 Ψ_{00} 才能得到所要的波束表达式。

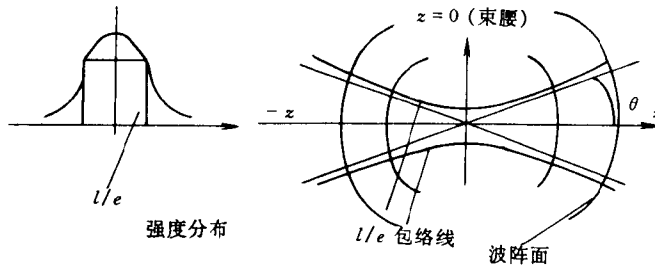


图 1.1 高斯束示意

1.2 厄米特-高斯(Hermit-Gauss)模

高斯主模或基模在直角坐标系和柱坐标系都具有相同的表达式。高阶模则需另外给出。在直角坐标系中,高阶模可导出为(用分离变量法):

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}(x, y, z) &= \frac{w_0}{w(z)} H_n \left(\sqrt{2} \frac{x}{w} \right) H_m \left[\sqrt{2} \frac{y}{w} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ -j \left[\frac{\pi r^2}{\lambda R} - (m+n+1) \tan^{-1} \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \right] \right\} \exp \left(-\frac{r^2}{w^2} \right) \\ &= H_n \left(\sqrt{2} \frac{x}{w} \right) H_m \left[\sqrt{2} \frac{y}{w} \right] \exp \left\{ -j \left[P + \frac{\pi r^2}{\lambda q} - (m+n) \tan^{-1} \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1-17)$$

这里 $H_n(t)$ 是如下厄米特方程的解:

$$\frac{d^2 H_n}{dt^2} - 2t \frac{dH_n}{dt} + 2nH_n = 0 \quad n \text{ 为正整数} \quad (1-18)$$

称为厄米特多项式,可表示为

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} \quad (1-19)$$

前几项为

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 & H_1(t) &= 2t & H_2(t) &= 4t^2 - 2 \\ H_3(t) &= 8t^3 - 12t & H_4(t) &= 16t^4 - 48t^2 + 12 & \dots \end{aligned} \quad (1-20)$$

$H_n(t)$ 的生成函数为

$$\exp(-t^2 + 2zt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n \quad (|t| < \infty) \quad (1-21)$$

$H_n(t)$ 的递推公式为

$$H_{n+1}(t) - 2tH_n(t) + 2nH_{n-1}(t) = 0 \quad (1-22)$$

$$H_n(t) = 2nH_{n-1}(t) \quad (1-23)$$

特殊值为

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \quad H_{2n+1}(0) = 0 \quad (1-24)$$

厄米特多项式在区间 $[-\infty, +\infty]$ 中构成一完备正交函数组,权为 e^{-t^2}

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(t) H_n(t) e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn} \quad (1-25)$$

因此,厄米特-高斯模构成一正交函数完备系。利用这些模式可将满足近轴波动方程的一切波场展开为级数。(1-17)式有一个重要结果,就是 w 的表达式[即(1-9.1)式,(1-9.2)式]和 R 的表达式(1-10.1)对一切厄米特-高斯模都相同。波的相位依赖于模数 n, m 。厄米特-高斯模的变换可以与模式无关,因为所有的模式具有相同的束宽参数和波前曲率,故关于高斯束变换的讨论,可仅限于最低阶的高斯束。

1.3 拉盖尔-高斯(Laguerre-Gauss)模

在柱坐标系中,高阶模为

$$\begin{aligned} \Psi_{ln} &= \left(\sqrt{2} \frac{r}{w} \right)^l L_n^l \left(2 \frac{r^2}{w^2} \right) \exp \left\{ -j \left[P + \frac{kr^2}{2q} + l\theta - (2n+l) \tan^{-1} \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{w_0}{w(z)} \left(\sqrt{2} \frac{r}{w} \right)^l L_n^l \left(2 \frac{r^2}{w^2} \right) \exp \left\{ -j \left[\frac{\pi r^2}{\lambda R(z)} + l\theta - (2n+l+1) \tan^{-1} \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \right] \right\} \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{r^2}{w^2(z)} \right) \end{aligned} \quad (1-26)$$

拉盖尔-高斯模同样构成一正交完备系,用它可展开满足近轴波动方程的任意波场。 $L_n^l(x)$ 称为拉盖尔多项式,它满足方程

$$x \frac{d^2 L_n^l(x)}{dx^2} + [l+1-x] \frac{dL_n^l(x)}{dx} + nL_n^l(x) = 0 \quad (1-27)$$

可表示为

$$L_n^l(x) = \frac{e^{x-l}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+l} e^{-x}) \quad (1-28)$$

生成函数为

$$\frac{\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)}{(1-t)^{l+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n^l(x) t^n \quad (|t| < 1) \quad (1-29)$$

递推关系为

$$(n+1)(L_{n+1}^l) + (x-n-1)(L_n^l) - (n+1)L_{n+1}^l + (l+2n+2-x)L_n^l = 0 \quad (n \geq 0) \quad (1-30)$$

$$x(L_n^l) = nL_n^l - (l+n)L_{n-1}^l \quad (n \geq 1) \quad (1-31)$$

$$L_n^l = L_{n-1}^{l+1} - L_{n-1}^l \quad (1-32)$$

$$(n+1)L_{n+1}^l + (x-l-2n-1)L_n^l + (l+n)L_{n-1}^l = 0 \quad (n \geq 1) \quad (1-33)$$

用于级数展开的正交归一关系为

$$\int_0^{+\infty} x^l e^{-x} L_n^l(x) L_m^l(x) dx = \frac{\Gamma(l+n+1)}{n!} \delta_{nm} \quad (1-34)$$

前几项为

$$L_0(x) = 1 \quad L_1(x) = 1 - x \quad L_2(x) = \frac{1}{2}[x^2 - 4x + 2] \quad \dots$$

拉盖尔多项式与厄米特多项式由下式互相联系：

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_{2k}(x) H_{2n-2k}(y) = (-1)^n n! 2^{2n} L_n(x^2 + y^2) \quad (1-35)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

与厄米特-高斯模相同，所有的高阶模都具有相同的束宽参数和波前曲率。

习题

1. 推导证明(1-17)式,(1-26)式为方程(4)的解。
2. 证明(1-12)至(1-15)式。

思考题

1. 设在 $z=0$ 平面有一线极化电磁场的切向场分布

$$E_x(x, y) = \begin{cases} \Phi(x, y) & (x, y) \in A \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

将 $\Phi(x, y)$ 用高斯模 Ψ_{nm} 展开: $\Phi(x, y) = \sum_{n,m} a_{nm} \Psi_{nm}(x, y, z=0)$, 问在 $z>0$ 区域, 展开式

$\sum_{n,m} a_{nm} \Psi(x, y, z)$ 是否代表 $E_x(x, y)$ 向 $z>0$ 区域的辐射场分布? 为什么?

2. 前面所述拉盖尔-高斯束是圆对称的, 其基模束斑形状为圆形。椭圆高斯束的基模束斑形状是随圆形的。试推导椭圆高斯束表达式。

1.4 高斯束的变换

准光应用中, 经常需要用适当的准光系统对高斯束加以处理。例如, 将发射机辐射的高斯束与天线匹配耦合, 或者将接收天线送来的高斯束与准光混频器匹配以及准光元件的连接等。这些处理涉及高斯束在空间的传播和高斯束经薄透镜的变换。高斯束的变换和传播的规

律,用高斯束的复参数 q 来表示可以变得很简单。这时传播和变换的公式与球面波相应的公式形式上相同。

球面波经薄透镜的变换公式可由几何光薄透镜成像公式

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f} \quad (1-36)$$

推出,公式中物距 s_1 是变换前球面波在薄透镜处的曲率半径 R_1 ,变换后仍为球面波。但传播时呈会聚球面波形式收缩到像点,故变换后在薄透镜处球面波的曲率半径为 $R_2 = -s_2$,所以球面波经薄透镜变换的公式为

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f} \quad (1-37)$$

这就是说,从 $z=+\infty$ 处看,波前是凸的,则曲率半径为正,否则为负。将此观点代到(1-36)式中即可得(1-37)式。一个球面波,只要等相面的曲率半径一个实参数就可以完全描述。如果球面波沿 z 轴传播,在 z_1 点等相面曲率半径为 $R(z_1)$,则传播到 z_2 的曲率半径 $R(z_1)$ 与 $R(z_2)$ 有如下简单关系:

$$R(z_2) = R(z_1) + (z_2 - z_1) \quad (1-38)$$

此即球面波在空间传播的公式。

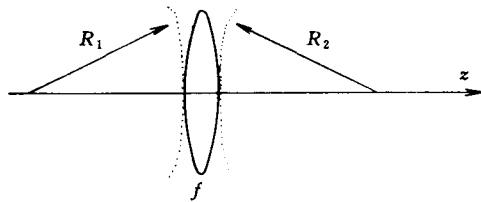


图 1.2 球面波经薄透镜变换示意

对于高斯束,由前面(1-6)式和(1-13)式有 q 参数。令 $z=0$ 时, $q(z) = q_0$,则有

$$q(z) = q_0 + z \quad q_0 = j \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (1-39)$$

于是

$$q(z_1) = q_0 + z_1 \quad q(z_2) = q_0 + z_2$$

两式相减得

$$q(z_2) = q(z_1) + (z_2 - z_1) \quad (1-40)$$

即(1-40)式与(1-38)式形式上完全相同,它是高斯束在空间传播的公式。

高斯束是一种特殊的球面波,叫做高斯束球面波。它经透镜变换时应遵守球面波变换公式

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \quad (1-37.1)$$

R_1 为高斯束变换前在透镜处曲率半径, R_2 为变换后在透镜处曲率半径。因为透镜薄,可设变换前后光斑半径相同,即

$$w_1 = w_2 \quad (1-41)$$

于是,把(1-41)式考虑进去,(1-37.1)式可写为

$$\left[\frac{1}{R_2} - j \frac{\lambda}{\pi w_2^2(z)} \right] = \left[\frac{1}{R_1} - j \frac{\lambda}{\pi w_1^2(z)} \right] - \frac{1}{f}$$

考虑到(1-6)式,于是有

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} \quad (1-42)$$

此即高斯束经薄透镜变换公式,形式上与球面波变换公式相同。

反复应用(1-42)和(1-40)两式可解出高斯束通过复杂光学结构,像薄透镜组合,厚透镜等的问题。这里对 z_1 和 z_2 的正负规定作点说明。对入射高斯束, z_1 正号对应于沿传播方向发散球面波;而对出射高斯束, z_2 正号对应于沿传播方向会聚球面波,这样规定与几何光学成像公式中物距和像距正负号规定相同。

例如,设 q_1 和 q_2 是距透镜 d_1 和 d_2 处之值,如图 1.3 示。应用(1-40)式,有

$$\begin{aligned} q_2 &= q_2' + d_2 & \text{或} & & q_2' &= q_2 - d_2 \\ q_1' &= q_1 + d_1 \end{aligned}$$

再应用(1-42)式,有

$$\frac{1}{q_2'} = \frac{1}{q_1'} - \frac{1}{f}$$

或

$$\frac{1}{q_2 - d_2} = \frac{1}{q_1 + d_1} - \frac{1}{f} \quad (1-43)$$

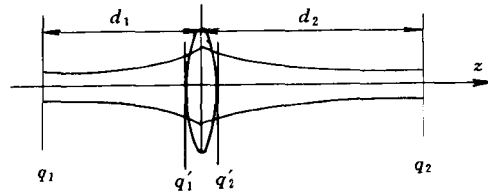


图 1.3 高斯束经薄透镜变换示意

可推得

$$q_2 = \frac{(1 - d_2/f)q_1 + (d_1 + d_2 - d_1 d_2/f)}{-q_1/f + (1 - d_1/f)} \quad (1-44)$$

模式匹配

把一个准光结构的高斯束与另一准光结构的高斯束匹配起来,必须把给定的高斯束变换成预先指定特性的高斯束。这样变换通常采用薄透镜完成,但是其他复杂的光学系统也可用。

设如图 1.3 所示,两高斯束的束腰距透镜分别为 d_1, d_2 ; w_1, w_2 为其束腰半径,已知 d_1, w_1 和透镜焦距为 f ,需求 w_2 和 d_2 。在束腰处 q 参量为虚(见(1-6)式),即

$$q_1 = j\pi w_1^2/\lambda, \quad q_2 = j\pi w_2^2/\lambda \quad (1-45)$$

对此系统已有(1-44)式描述,让此式虚部相等可得

$$(1 - d_1/f)q_2 = (1 - d_2/f)q_1 \quad (1-46)$$

$$\frac{d_1 - f}{d_2 - f} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{w_1^2}{w_2^2} \quad (1-47)$$

让实部相等可得

$$-q_1 q_2 / f = d_1 + d_2 - d_1 d_2 / f \quad (1-48)$$

即

$$(d_1 - f)(d_2 - f) = f^2 - f_0^2 \quad (1-49)$$

其中

$$f_0 = \frac{w_1 w_2 \pi}{\lambda}$$

由(1-47)、(1-49)式可解出

$$w_2^2 = \frac{f^2 w_1^2}{(d_1 - f)^2 + \left(\frac{w_1^2 \pi}{\lambda}\right)^2} \quad (1-50.1)$$

$$d_2 = \frac{f d_1 (d_1 - f) + f \left(\frac{w_1^2 \pi}{\lambda}\right)^2}{(d_1 - f)^2 + \left(\frac{w_1^2 \pi}{\lambda}\right)^2} \quad (1-50.1)$$

显见,若 $d_1 = f$,则 $d_2 = f$;若 $w_1 = w_2 = w$,则 $d_1 = d_2$

准直

准直的目的是压缩高斯束的发散角,由(1-16)式可知这要求高斯束经准光系统变换后束腰半径变大。通常用倒装望远镜实现高斯束的准直。图 1.4 为倒装望远镜准直高斯束的情形。 L_1 为短焦距透镜(目镜), L_2 为长焦距透镜(物镜)。调节透镜间距,使望远镜系统处于重焦状态,即使经 L_1 变换后的高斯束腰正好落在 L_2 的焦点上。由(1-50)式,当 $l_2 = f_2$ 时,有

$$w_{30} = \frac{f_2 \lambda}{\pi w_{20}}$$

同理,得 $w_{20} = \frac{f_1 \lambda}{\pi w_{10}}$ 代入上式得

$$w_{30} = w_{10} \frac{f_2}{f_1} = w_{10} M \quad (1-51)$$

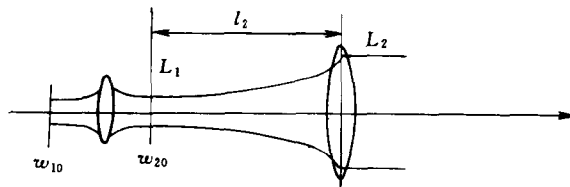


图 1.4 高斯束的准直

因为 $f_2 > f_1$,故 $M > 1$ 是望远镜放大率。由于 w_{30} 比 w_{10} 大 M 倍,实现束腰变大、发散角降低的目的。

高斯束变换的 ABCD 矩阵方法

ABCD 矩阵方法用于射线光学中。对近轴光线,有光线传递矩阵