

# 初中数学复习指导

北京市西城区教育教学  
研究中心数学组

地震出版社

1982

## 内 容 提 要

本书是根据现行初中数学教学大纲的要求编写的一本复习资料。共分代数与三角、平面几何、直线和圆的方程等三部分。每一部分又按照初中课本内容的顺序分成若干单元。每单元简列了内容提要，选配了典型例题阐明解题思路以及应注意的问题，还选列了一定数量的习题，并给出了答案或提示。可供初中学生学习，教师教学或指导复习参考使用。

### 初中数学复习指导 北京市西城区教育教学 研究中心数学组

\*

地 震 出 版 社 出 版

北京复兴路63号

北 京 印 刷 三 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

\*

787×1092 1/32 12 开本 字数：266千字

1982年5月第一版 1982年5月第一次印刷

印数 000,001—581,500

统一书号：13180·164 定价：1.00元

## 前 言

为了指导初中学生系统掌握初中阶段所学的数学基础知识，我们根据《全日制十年制学校数学教学大纲》（试行草案）的要求，在近几年编写的《初中数学复习参考资料》的基础上，进一步加工、整理成这本复习参考书，供初中学生学习、教师教学或指导复习参考使用。

本资料共分代数与三角、平面几何、直线和圆的方程等三部分。为了便于学生结合平时学习，每一部分都按照课本内容的顺序，分成若干单元进行编写。每一单元简列了内容提要，选配了典型例题，阐明解题思路，在应用基本概念进行解题时应注意的问题。为了便于学生掌握所学知识，训练、提高解题能力，本资料在各部分中还本着由易到难、循序渐进的原则编排了一部分习题，其中包括理解基本概念的习题，巩固和灵活应用基础知识的习题，以及有一定难度的单元综合题。

解题的方法是多种多样的，本书如能起到开拓思路举一反三的作用，就达到了编写的目的。

北京市西城区教育数学研究中心数学组

## 目 录

### 第一部分 代 数 与 三 角

|                   |        |
|-------------------|--------|
| 第一章 实数            | ( 1 )  |
| 第二章 代数式           | ( 21 ) |
| 一、代数式的有关概念        | ( 21 ) |
| 二、整式              | ( 22 ) |
| 三、因式分解            | ( 35 ) |
| 四、分式              | ( 49 ) |
| 五、二次根式            | ( 62 ) |
| 第三章 方程和方程组        | ( 78 ) |
| 一、方程              | ( 78 ) |
| 二、方程组             | (103 ) |
| 三、列方程(组)解应用题      | (123 ) |
| 第四章 不等式           | (137 ) |
| 一、不等式的基础知识        | (137 ) |
| 二、一元一次不等式及不等式组的解法 | (138 ) |
| 三、一元二次不等式         | (139 ) |
| 四、绝对值不等式          | (140 ) |
| 第五章 指数和常用对数       | (153 ) |
| 一、指数              | (153 ) |
| 二、常用对数            | (162 ) |
| 第六章 函数及其图象        | (173 ) |
| 一、函数的基本概念         | (173 ) |

|                    |       |
|--------------------|-------|
| 二、几种常见的函数·····     | (179) |
| 第七章 三角函数和解三角形····· | (196) |
| 一、三角函数·····        | (196) |
| 二、解直角三角形·····      | (204) |
| 三、解三角形·····        | (209) |

## 第二部分 平 面 几 何

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| 第一章 直线、相交线和平行线·····   | (220) |
| 一、线段、射线、直线·····       | (220) |
| 二、等量公理·····           | (220) |
| 三、不等量公理·····          | (220) |
| 四、相交线·····            | (220) |
| 五、平行线·····            | (222) |
| 六、基本作图题·····          | (223) |
| 第二章 三角形·····          | (228) |
| 一、三角形的分类·····         | (228) |
| 二、两个三角形全等·····        | (228) |
| 三、三角形边和角的关系·····      | (228) |
| 四、三角形的主要线段·····       | (229) |
| 五、特殊三角形的性质和判定·····    | (229) |
| 六、三角形的面积·····         | (231) |
| 七、三角形作图·····          | (231) |
| 第三章 四边形·····          | (246) |
| 一、从属关系及定义·····        | (246) |
| 二、几种特殊四边形的性质·····     | (246) |
| 三、几种特殊四边形的常用判定方法····· | (247) |

|               |       |
|---------------|-------|
| 四、平行线等分线段定理   | (247) |
| 五、中位线         | (247) |
| 六、四边形的面积      | (247) |
| 七、基本作图题       | (248) |
| 第四章 相似形       | (266) |
| 一、成比例的线段      | (266) |
| 二、平行线分线段成比例定理 | (267) |
| 三、三角形的角平分线的性质 | (267) |
| 四、相似多边形       | (267) |
| 五、基本作图题       | (269) |
| 第五章 圆         | (283) |
| 一、圆的基本性质      | (283) |
| 二、圆的切线        | (284) |
| 三、和圆有关的角      | (285) |
| 四、和圆有关的比例线段   | (286) |
| 五、圆与多边形       | (286) |
| 六、两圆的位置关系     | (288) |
| 附录            |       |
| 一、证题方法小结      | (315) |
| 二、轨迹          | (317) |
| 三、作图          | (318) |

### 第三部分 直线和圆的方程

|           |       |
|-----------|-------|
| 第一章 直角坐标系 | (323) |
| 第二章 直线的方程 | (331) |
| 第三章 圆的方程  | (342) |

## 附录

- 一、初三数学基础练习题……………(351)
- 二、北京市1980年高中统一招生数学试题……………(357)
- 三、上海市1980年高中招生数学试题……………(359)
- 四、天津市1980年初中毕业高中招生数学试题…(361)
- 五、南师附中、苏州中学、常州中学、扬州中学1980年高中联合招生数学试题(江苏省范围择优)……………(363)
- 六、北京市1981年高中、  
中专统一招生数学试题……………(365)
- 七、上海市1981年高中招生数学试题……………(368)
- 八、天津市1981年初中毕业高中招生数学试题…(370)
- 九、哈尔滨市1981年高中、中专招生数学试题…(372)
- 十、郑州市1981年重点中学高中招生数学试题…(374)

# 第一部分 代 数 与 三 角

## 第一章 实 数

### 一、自然数

1、2、3、4、5…都叫做自然数。

#### 1. 性质

(1) 自然数有无限多个，有最小的数1，但没有最大的数。

(2) 任何两个自然数都可以比较大小。

(3) 在自然数集合内可以进行加法和乘法的运算。

#### 2. 分解自然数为质因数的连乘积

(1) 质数与合数 在自然数集合内，除了1，只能被1和自己整除的数叫质数（或素数）。不但能被1和自己整除，还能被其它数整除的数叫合数。1既不是质数，也不是合数。

(2) 因数和质因数 在乘法运算中，被乘数和乘数都叫做积的因数，一个合数的质数因数叫做这个合数的质因数。

(3) 分解质因数 把一个合数表示成质因数的连乘形式叫做把这个数分解质因数。

如： $720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ 。

#### 3. 求两个数或几个数的最大公约数和最小公倍数

例如：求84、180、264的最大公约数。

先分解质因数： $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ ； $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ ； $264 = 2^3 \times 3 \times 11$ 。这几个数的公约数含有2的是 $2^2$ ，含有3的是



3, 此外再无其它的公约数, 因此最大公约数是  $2^2 \times 3 = 12$ 。

再如, 求48、56、105、225的最小公倍数。

先分解质因数:  $48 = 2^4 \times 3$ ;  $56 = 2^3 \times 7$ ;  $105 = 3 \times 5 \times 7$ ;  $225 = 3^2 \times 5^2$ 。这些数的公倍数一定含有约数2, 3, 5, 7, 而且它们的幂指数至少等于在各分解式中同一底的最高的幂指数, 因此最小公倍数应是,  $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 25200$ 。

如果两个自然数的最大公约数是1, 则称这两个数互质, 如: 4和9, 8和11都是互质数。

## 二、整数

1. 整数包括自然数(即正整数)、零和负整数

2. 性质

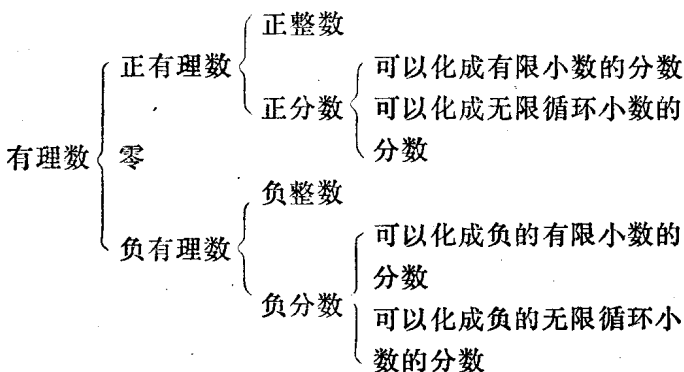
(1) 可以比较任何两个整数的大小。

(2) 整数中没有最小的数, 也没有最大的数。

(3) 在整数集合内可以施行加、减和乘三种运算。

## 三、有理数

1. 有理数的分类, 如下表:



一切有理数都可以表示为  $\frac{p}{q}$  ( $p, q$  为整数, 且  $q \neq 0$ )

的分数形式。而整数可以看作以1（即 $q=1$ 时）做分母的分数；零可以看作以零做分子，以零以外（即 $q \neq 0$ ）的其它整数做分母的分数。

## 2. 有理数的性质

（1）有理数中既没有最大的数，也没有最小的数。

（2）任何两个或几个有理数都可以比较大小。

（3）在有理数的集合内，永远可以施行加法、减法、乘法和除法（除数不得为零）四种运算。

## 3. 有理数的四则运算法则

| 原数<br>法则<br>运算 | 同 号            |      | 异 号   |         |
|----------------|----------------|------|-------|---------|
|                | 绝 对 值          | 符 号  | 绝 对 值 | 符 号     |
| 加              | 相 加            | 保持原号 | 相 减   | 同绝对值较大者 |
| 减              | 减去一个数等于加上它的相反数 |      |       |         |
| 乘              | 相 乘            | +    | 相 乘   | -       |
| 除              | 相 除            | +    | 相 除   | -       |

说明：（1）任何数加零或减零都等于原数。（2）零乘以任何数都得零。（3）如果被除数是零，只要除数不是零，商总是零。零不能作除数，任何数除以零都没有意义。（4）一个数除以另一个不等于零的数，等于乘以这个数的倒数。

## 4. 乘方运算

求相同因数的积的运算叫做乘方。把 $a$ 这个数 $n$ 乘方，就是求 $n$ 个相同因数 $a$ 的积，写成 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ 个}}$ 。把相同因

数  $a$  叫做底数，相同因数的个数叫做指数，乘方运算的结果叫做幂，即（底数）<sup>指数</sup> = 幂。

幂的符号规律：正数的任意次幂都是正数；负数的偶次幂是一个正数，负数的奇次幂是一个负数；零的任意次幂都是零。

规定： $a^0 = 1 (a \neq 0)$ ，而 0 的 0 次幂无意义。

#### 四、实数

##### 1. 开平方和开立方

(1) 一个数的平方等于  $a$ ，那么这个数就叫做  $a$  的平方根。一个数的立方等于  $a$ ，那么这个数就叫做  $a$  的立方根。求一个数  $a$  的平方根的运算叫做把  $a$  开平方。求一个数  $a$  的立方根的运算叫做把  $a$  开立方。一个正数的平方根是两个互为相反的数，负数没有平方根，零的平方根是零；一个正数的立方根是一个正数，一个负数的立方根是一个负数，零的立方根是零。

##### (2) 算术平方根

一个正数的正的方根，叫做算术平方根。零的算术平方根是零。当  $a \geq 0$  时， $a$  的算术平方根记作  $\sqrt{a}$ 。

##### 2. 实数和数轴

(1) 无理数 无限不循环小数叫做无理数。如  $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{10}$ ， $\pi$ ， $2 + \sqrt{5}$ ... 等，有理数和无理数统称实数。

(2) 规定了原点、方向和长度单位的一条直线叫做数轴。每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示。反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数，数轴上不同的点表示不同的实数，即实数和数轴上的点一一对应。

##### 3. 实数的性质

(1) 任何两个实数可以比较大小：即正数大于任何负

数；负数都小于0；两个正数中绝对值大的那个数较大；两个负数中绝对值大的那个数较小。

(2) 在实数中没有最小数，也没有最大数。

(3) 在实数集合内，永远可以施行加、减、乘、除（除数不为0）四种运算。

#### 4. 实数的运算

(1) 运算定律（式中  $a, b, c$  为任意实数）

加法交换律： $a+b=b+a$ ；

加法结合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$ ；

乘法交换律： $ab=ba$ ；

乘法结合律： $(ab)c=a(bc)$ ；

乘法对加法的分配律： $(a+b)c=ac+bc$ 。

(2) 运算顺序 在没有括号的运算中，先乘方，开方，然后乘除，最后加减；在有括号的式子中，括号内的式子先进行运算；在同级运算中，按照式子的顺序进行运算；根据运算定律可以变更上面的运算顺序。

#### 5. 倒数

两个数的乘积等于1，这两个数叫做互为倒数。如：

$\frac{3}{2}$  和  $\frac{2}{3}$ ， $-3$  和  $-\frac{1}{3}$ ， $\sqrt{2}$  和  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\pi$  和  $\frac{1}{\pi}$  等互为倒数。一

般来说，一个数  $a$  ( $a \neq 0$ ) 的倒数为  $\frac{1}{a}$ 。

#### 6. 绝对值

若  $a$  是实数， $|a|$  叫做  $a$  的绝对值。任何一个实数的绝对值都是一个非负数，即  $|a| \geq 0$ 。也就是，

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时;} \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

## 7. 相反的数

在数轴上，原点的两侧和原点的距离相等的两个点所表示的两个数叫做互为相反数。如 $+5$ 和 $-5$ ， $-\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}$ ， $a$ 和 $-a$ 都是互为相反的数。互为相反数的绝对值相等，即 $|a| = |-a|$ （ $a$ 表示实数）。

## 8. 近似值和有效数字

一个实数，如 $2.71828\cdots$ 如果取它的小数有限位数（例如，到小数两位，即 $2.71$ ），那么这个新数（ $2.71$ ）叫做原实数的不足近似值；要是在不足近似值的最后一位数字上加上一个单位（如 $2.72$ ），则所得的数叫做原实数的过剩近似值。

近似数的截取方法，最常用的是四舍五入法。

从第一个不是零的数字起到保留的数位为止，所有的数字都叫做有效数字。例如 $0.0016$ ，有两个有效数字 $1$ 、 $6$ 。又例如，用四舍五入法把 $0.68971$ 写成有三个有效数字的数就是 $0.690$ ，写成有两个有效数字的数就是 $0.69$ ， $0.690$ 和 $0.69$ 所表示近似位数不同。

## 例 题 分 析

例 1 （1）如果 $a$ 和 $b$ 是任意的自然数，能否断定方程 $x+a=b$ 的解永远是自然数？举出例子说明。

（2）如果 $a$ 和 $b$ 是任意自然数，下列各方程里哪几个在自然数范围不是永远有解：(I)  $x+a=b$ ；(II)  $\frac{x}{a}=b$ 。

（3）如果 $a$ 和 $b$ 都是自然数，要使方程 $ax=b$ 永远有解，应当引入哪种数？

（4）如果 $a$ 和 $b$ 都是正数，要使方程 $x+a=b$ 永远有解，应当引入哪种数？

(5) 如果  $a$  和  $b$  都是有理数, 要使方程  $x^2 + a = b$  在实数范围内有解,  $a$  和  $b$  应满足什么关系? 在整数范围呢?

解 (1) 如果  $a$  和  $b$  是任意自然数, 能够断定方程  $x - a = b$  的解永远是自然数。  $x = a + b$ , 两个自然数的和仍是一个自然数。如  $x - 5 = 7$ ,  $\therefore x = 12$ 。

(2) 如果  $a$  和  $b$  是自然数, 则方程

(I)  $x + a = b$  在自然数范围内不一定有解, 例如当  $a > b$  时,  $x = b - a < 0$ ,  $b - a$  不是自然数。

(II)  $\frac{x}{a} = b$  在自然数范围内永远有解。

(3) 如果  $a$  和  $b$  都是自然数, 要使方程  $ax = b$  永远有解, 必须引入分数 (包括小数)。

(4) 如果  $a$  和  $b$  都是正数, 要使方程  $x + a = b$  永远有解, 应当引入负数。

(5) 如果  $a$  和  $b$  是自然数, 要使方程  $x^2 + a = b$  在实数范围内有解,  $a$  和  $b$  满足  $b - a \geq 0$  关系。

要使方程  $x^2 + a = b$  在整数范围内有解,  $b - a$  必须是一个数的完全平方数。

例 2 试用语言叙述下列各式所确定的实数  $a$ 、 $b$  之间的关系或值的范围:

(1)  $a^2 = b^2$ ; (2)  $a + b = 0$ ; (3)  $a - b = 0$ ;

(4)  $a - b > 0$ ; (5)  $ab > 0$ ; (6)  $ab < 0$ ;

(7)  $ab \neq 0$ ; (8)  $ab = 0$ ; (9)  $ab = 1$ ;

(10)  $ab = -1$ ; (11)  $a^2 + b^2 = 0$ ;

(12)  $(a - b)^2 = 0$ 。

答: (1)  $a$  和  $b$  的绝对值相等;

(2)  $a$  和  $b$  互为相反数;

- (3)  $a$  和  $b$  相等; (4)  $a$  大于  $b$  或  $b$  小于  $a$ ;  
 (5)  $a$  和  $b$  同号; (6)  $a$  和  $b$  异号;  
 (7)  $a$  和  $b$  均不为 0;  
 (8)  $a$  和  $b$  中至少有一个为 0;  
 (9)  $a$  和  $b$  互为倒数;  
 (10)  $a$  和  $b$  互为负倒数;  
 (11)  $a$  和  $b$  均为 0; (12)  $a$  和  $b$  相等。

**例 3** 回答下列问题:

- (1)  $2\sqrt{3}$  是不是偶数?  
 (2) 不为零的数  $a$  乘以什么数才能得到它的倒数?  
 (3) 如果  $a$  的绝对值等于  $a$  的相反数? 那么  $a$  应该是什么数?

答: (1)  $2\sqrt{3}$  不是偶数。因为奇数和偶数的划分是在整数范围内进行的。 $2\sqrt{3}$  是无理数, 不属于整数, 更不是偶数。

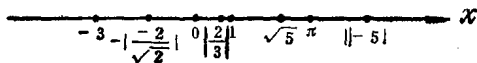
(2) 不为零的数  $a$  乘以  $\frac{1}{a}$  才能得到它的倒数  $\frac{1}{a}$ 。

(3) 如果  $a$  的绝对值等于  $a$  的相反数, 即  $|a| = -a$ ,  
 $\because |a| \geq 0, \therefore -a \geq 0$ , 即  $a \leq 0$ , 也就是  $a$  是小于零或等于零的数。

**例 4** 把下列各数按从小到大的顺序用不等号联结起来, 并把各数表示在数轴上:

$$|-5|, -3, \left| \frac{2}{3} \right|, 0, \sqrt{5}, \pi, -\left| -\frac{2}{\sqrt{2}} \right|.$$

解



(图 1-1)

$$\therefore -3 < -\left| -\frac{2}{\sqrt{2}} \right| < 0 < \left| \frac{2}{3} \right| < \sqrt{5} < \pi < |-5|.$$

**例 5** 化简下列各式 (式中  $a$ 、 $b$  是任意实数) :

(1)  $\sqrt{a^2}$ ; (2)  $|a-b|$ ;

(3)  $\sqrt{a^2} + \sqrt{(1-a)^2}$ .

$$\text{解 (1) } \sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{当 } a > 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } a = 0 \text{ 时,} \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时;} \end{cases}$$

$$(2) |a-b| = \begin{cases} a-b, & \text{当 } a > b \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } a = b \text{ 时,} \\ b-a, & \text{当 } a < b \text{ 时;} \end{cases}$$

$$(3) \sqrt{a^2} + \sqrt{(1-a)^2} = \begin{cases} 2a-1, & \text{当 } a \geq 1 \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } 0 \leq a < 1 \text{ 时,} \\ 1-2a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

注意: (1)  $\sqrt{a^2}$ ,  $\sqrt{(1-a)^2}$  均表示算术根, 是一个非负数。

(2)  $a$  是实数, 不要产生  $a$  一定表示正数,  $-a$  一定表示负数的错觉。

**例 6** 计算:

(1)  $(-3) \times (-2)^3 \div 4 \div 2 + \sqrt{(-2)^6} \div (-4) \times 2$ ;

(2)  $16 \times (-3)^2 + 5 \times (-3) - 12 \div 2 + (-60) \div (-4) + 18 \times (-2)^3 - (-3) \times 2$ .

$$\begin{aligned} \text{解 (1) 原式} &= (-3) \times (-8) \div 4 \div 2 + \sqrt{64} \div (-4) \times 2 \\ &= 3 + (-4) \\ &= -1; \end{aligned}$$

(2) 原式  $= 16 \times 9 + 5 \times (-3) - 12 \div 2 + (-60) \div$



$$\begin{aligned}& \div (-4) + 18 \times (-8) - (-3) \times 2 \\& = 144 - 15 - 6 + 15 - 144 + 6 \\& = 0.\end{aligned}$$

说明：（1）运算顺序，应是先乘方或开方，再乘除，最后加减；（2）化成代数和的形式后，根据加法的交换律和结合律把正数与正数合并，负数与负数合并，最后把合并后的正负两数相加。如出现互为相反数时，则先合并相反数较为简便。

**例 7** 计算： $-1\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} \times (-0.2) \times 1\frac{3}{4} \div 1.4$   
 $\times \left(-\frac{3}{5}\right).$

**解** 原式  $= -\frac{3}{2} \div \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \frac{7}{4} \div \frac{7}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right)$   
 $= -\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \frac{7}{4} \times \frac{5}{7} \times \left(-\frac{3}{5}\right)$   
 $= -\frac{3 \times 4 \times 1 \times 7 \times 5 \times 3}{2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 7 \times 5}$   
 $= -\frac{3}{10}.$

说明：（1）在乘除混合运算中，要先把带分数（包括小数）化成假分数（或真分数）的形式。

（2）再把乘除混合化成连乘积的形式。

（3）连乘积的符号由乘数中负数的个数来决定。有偶数个负数时，积为正；有奇数个负数时，积为负。

**例 8** 计算：

（1） $2.75 - \left[ \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{3}{8}\right) + 4\frac{2}{3} \right],$