彭立民编著

长知识、增智力
——趣味概率小集锦

湖南科学技术出版社

长知识、增智力

——趣味概率小集锦

彭立民编著

湖南科学技术出版社

长知识、增智力

——趣味概率小集锦

彭立民编著

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版　（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湘潭地区印刷厂印刷

*

1983年1月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米1/32　印张：6.25　字数：141,000

印数：1—16,900

统一书号：13204·70　定价：0.67元

前　言

亲爱的读者，当你看到这个书名的主题时，可能会说：这个书名没有特点，一般化。正是考虑到这个原因，编者给它加了个副标题。把两下加起来，总的意思就是：读者通过阅读这本书，将有助于进一步增长知识，发展智力。

自从有人类以来，人们在日常生活中，在生产上，在社会活动中，都要应用概率这个数学工具。有人不免会问：“我没有学过概率，甚至连什么叫概率也不知道，怎么谈得上应用呢？”其实，这并不奇怪。概率，大多数人虽然没有学过，但大家确实在用它，只不过这种“用”，是不知不觉的罢了。比如：今天会不会下雨；明天有没有客人来；打扑克牌、下棋中的谁胜谁负，等等。对于这些常见的问题，人们总是习惯地进行预测，估计各种情况发生可能性的大小。这就是概率的实际应用。再往大处看，工业、农业、商业、军事、科研等各个方面，由于社会环境、自然条件的影响，将会出现各种各样的情况。为了使生产、工作卓有成效，人们也需要对于可能发生的种种情况进行预测和估计。所有这些，都要用到概率这个基本思想方法。因此，对于概率，人人要学习它，自觉地运用它，这是科学技术发展的必然趋势。

本书试图通过讲故事的方式，给大家传授概率的基本知识，介绍它的实际应用。这些事例都晓有情趣，引人入胜。本书自成体系。书中（一）至（八），着重传授概率的基本知识；

（九）至（三十四），着重介绍巧用概率的典型例子。我们希望这本书对于启迪思想、开阔眼界、培养兴趣、发展智力，起到促进作用。

湘潭大学杨向群教授对本书的立意和写法事先作了指导，后来又审阅了初稿；湖南教育科学研究所副所长王汉生和讲师郭郁、谢遇生、张绥定等同志对初稿作了审订。工人邹兰田、中学生孙祥一试读了初稿，对于上述同志，在此一并表示衷心的感谢！

作　　者

一九八二年二月于株洲基础大学

目　　录

（一）有奖储蓄

小华怀着好奇的心情，参加了一次有奖储蓄的开奖大会。

“叮叮哨哨，叮哨哨”。号码珠在空心钢球里滚动，发出清脆悦耳的声响，千百双眼睛都注视着摇奖机。

摇奖机的钢球内，放有十个大小一样、质地匀称的号码珠。号码珠上面分别标记着０、１、…、９。

摇奖时，先摇四等奖。操作摇奖机的一名少年，在储户代表随意指挥下摇转钢球，很快就跳出一个乒乓球大小般的号码珠，上面写着“７”字，这就是四等奖中奖的号码。然后采取“有放回的摇珠法”，将这颗“７”号珠放回钢球内，又摇出一个号珠，上面的号码是“６”。再将它放回钢球内摇第三次，这次落下的号珠号码数是“４”。这两次的号数排列是“46”这就是三等奖中奖号码。依此类推，继续连摇三次，得到的三个号码排列为“028”，这是二等奖的中奖号码；最后摇四次得到了头等奖的中奖号码是“8163”。

全部中奖号码都摇出来了。顿时，会场上欢笑声、喝采声响成一片，当场有不少的人拿出了储蓄卷高兴地喊道：“我中奖了！”小华看见一位老工人激动地告诉记者：“没想到，我

中了二等奖。人民储蓄为人民，开奖的组织工作非常民主，摇奖机非常科学。”

回到学校后，小华把开奖大会的盛况告诉了宋老师，请他讲解：“采用‘有放回的摇珠法’，为什么公平合理？”

宋老师说，从数学物理的理论来看，这样的摇奖机确实是一个非常理想的“等概模型”。所谓等概，就是指每一个号码珠被摇出来的机会是均等的，即它被摇出来的可能性都是$\frac{1}{10}$。用数学语言来说，这个可能性的大小就是‘概率’的大小。因此，可以说每个号码珠被摇出的概率均相等，都等于$\frac{1}{10}$。根据概率的乘法公式还可以进一步说明，采用‘有放回的摇珠法’，连摇两次得出的每一个两位数的概率都是$\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$，即$\frac{1}{100}$；连摇三次所得的每一个三位数的概率都是$\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{1000}$；连摇四次所得的每一个四位数的概率是$\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10000}$。由此可推算出，对于每张储蓄卷的号码来说，得奖的机会是均等的，它有$\frac{1}{10000}$的机会获头等奖，有$\frac{1}{1000}$的机会获二等奖，有$\frac{1}{100}$的机会获三等奖，有$\frac{1}{10}$的机会获四等奖。

在场的小敏听入了神。她想：“可能性用数来描述，这个办法好！我们在日常生活中经常会碰到带有可能性大或小的事情，怎样来表示呢？”她请宋老师多讲点这方面的学问。

宋老师说：“这是属于概率的理论，它是一门既有趣又有用的学问。今天，先给你们讲摇奖中提到的‘概率’和它的乘法公式吧。

1.概率是什么？‘概’是概括，‘率’是指两个相关数之比。这里是用一个比值来概括某事件出现的可能性大小的一种度量。

因为有很多事情的发生与否，要受到一些偶然的因素干挠。例如‘可能中奖或不可能中奖’，‘可能下雨，不可能下雨’等等。象这样有可能发生也可能不发生的事件，称为**随机事件**，也叫偶然事件。概率论就是研究随机事件的数量规律性的一门科学。应当指出，随机事件是不受人们意志支配的，例如：

（1）摇奖时，摇出“7”号珠的事件，就带有随机性，“7”号珠可能被摇出，也可能不被摇出。

（2）投掷一颗正六面体的骰子，出现“5”点的事件也带有随机性。它可能出现，也可能不出现。

（3）袋中放有红、蓝、白三色球各一个，任摸一球，得到“红球”的事件也带有随机性，它可能发生，也可能不发生。

凡此种种，类似这样的随机事件是很多的。它们的特点是在每次试验（如“摇”、“掷”、“摸”等）中，都随着一定的偶然机会而出现，因此称它们为随机事件。实践和理论都证明，随机事件的发生虽带有偶然性，但并不能说它无规律可循。例如，有两个袋子，在第一个袋中装有99个红球、1个白球，第二个袋中装有5个红球、95个白球。让你任意选择一袋，从中摸出一个球，要是红球。自然你会选择第一袋，因为它比从第二袋摸到红球的可能性（把握性）要大得多。我们可以这样想象，第一袋中有99个红球、1个白球，从中任摸一球是红球的可能性大概是99%；同样，从第二袋中摸到一个红球的可能性大概是5%，这两个数就把可能性的大与小刻划出来了。

它们都是用一个简单的比值来表示的。这个比值是指有利于某事件发生的情况数与总的情况数的比(例如，对第一个袋来说，有利于摸到红球的情况数是99，而总的情况数是100，二者之比为99%）。这个比值，概括地刻划出该事件发生的可能性大小。它称为概率。一般地说，在一个试验中，假如总的情况数为有限，设为n个，其中，有利于某事件A的情况数为k个(k≤n)，并且所有这些情况的发生都是等可能的，则事件A发生的概率为

$$P(A)=\frac{\text{有利于A发生的情况数}}{\text{总的情况数}}=\frac{k}{n}.$$

通常称这样定义的概率为**古典型概率**。

在这里，我们把试验和观察的结果称为事件。所谓‘等可能’的含意是指各事件出现的‘机会均等’。例如，摇奖机每次摇得任一个号码珠的机会是均等的。总的情况数是10个数码，而有利于某个号码A的情况只占1个，用古典概率定义计算，有 $P(A)=\frac{1}{10}$.

又如，袋中放有大小、形状都相同的红、蓝、白三色的球各十个，它也是一个等可能概型，从中任意摸取一球是红的可能性有多大呢？用古典型定义计算，有

$$P(\text{摸出一红球})=\frac{\text{有利于红球情况数}}{\text{总的情况数}}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

讲到这里，宋老师还提醒同学们要注意两点："第一点，概率是对某一事物发生的可能性大小的一个度量。它是客观存在的，不能凭个人的兴趣、心理状态来臆造。譬如，‘他可能喜欢看那部电影’，这里的可能性有多大呢？各有所好，这就难于用概率来刻划了；第二点，用概率来表述事件发生的可能性大小，是指多次（大量地）试验时，从平均意义上来说的。

譬如，摇出‘7’号珠的概率是$\frac{1}{10}$，这个意思是说，摇100次，大概将有10次摇出‘7’号珠来，而决不是指摇完一次后，‘7’号珠掉下来$\frac{1}{10}$。摇完一次，‘7’号珠要么出来，要么不出来，二者必居其一。

为了方便，我们称试验中的最简单事件为**基本事件**。如，摇奖试验中，对四等中奖号为个位数来说，这仅有十个（0、1、…、9）基本事件；而对三等奖中奖号为两位数（00、01、…、99）来说，所含的基本事件共有100个。显然，基本事件是在指定的试验中，它是最简单的，再也不能‘分解’的事件。而其他较复杂的事件可由基本事件组成。如，对四等奖中奖号来说，发生0、1、…、9号是十个基本事件，每一个再也不能‘分解’了。但‘出现奇数号珠’的事件就不是基本事件，因为它包含出现‘1、3、5、7、9’五个基本事件；对三等奖中奖号数来说，每个基本事件是两位数（如，67），都不能再‘分解’了。譬如，不能把67分解为“6”和“7”，这不能算为三等奖的摇奖试验了。‘分解’后变成了个位数，应属于四等奖的摇奖试验。

基本事件有三条性质：

（1）在各次试验中，每个基本事件发生的概率是相等的（这叫等可能性）；

（2）在一次试验中，只能发生基本事件中的一个。换句话说，任何两个或两个以上的基本事件，不可能在一次试验中同时发生（这叫“互斥性”或“**互不相容性**”）；

（3）在一次试验中，所有的基本事件必然有一个发生。换句话说，所有基本事件概率之和为100%（这叫完备性）。

这样，古典型概率定义又可以叙述为：

在一个试验中，如果只有有限个基本事件（设为n个），且一切基本事件的出现是等可能的，设事件A由k个不同的基本事件组成，则A的概率定义为

$$P(A)=\frac{k}{n},\quad (k\leqslant n).$$

例如，摇奖时，对三等奖中奖号数的试验来说，基本事件00、01、…、99共一百个，有一人购储蓄券5张，其最末两位数为30、31、33、34、35。显然$n=100$，$k=5$，此人获三等奖的可能性（概率）为$\frac{5}{100}$。”

正当小华、小敏听得津津有味的时候，宋老师拿出两颗骰子，同时投掷观察各颗出现的点数。并问：“小敏，一次掷两颗骰子的试验中，共含多少个基本事件？”

小敏不厌其烦地列出了所有情况数，共36个：

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

… … …

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)。

小华在一旁用排列组合计算法，得出$C_6^1\cdot C_6^1=36$（个）*，与小敏列的个数一致。

宋老师又问“其中出现两颗骰子上的点数的和为4的概率是多少？和为1或13的概率呢？和为2到12的概率呢？”

“有利于和为4的基本事件仅有（1，3），（2，2），（3，1）三个，所以它的概率为$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$。”小敏回答。

---

* 计算概率时，经常要用到排列组合知识，不熟悉它的读者请看附录一

小华又说："在这36个基本事件中点数的和为1或13是不存在的，所以它们的概率为0。而和为2到12的情况定会发生（这叫必然事件一宋老师插话），它的概率为100%。"

宋老师补充说："在一个试验中，不可能发生的事件叫不可能事件；必然会发生的事件，叫必然事件。二者都不带有随机（偶然）性了。常把它们作为随机事件的特例来看待。

弄清了概率的定义之后，我们就可以学习概率的乘法公式了。"

2.概率的乘法公式

在摇奖的实例中，多次用到了一个乘法公式。为了使同学们深刻理解公式的来源，宋老师拿出了三个红球和七个白球（大小形状都一样的球），放入口袋中让小敏摸取两次，每次摸出一个，并且要求第一次摸出的球不放回袋中（这称为无放回地抽样法），问第二次摸到红球的概率是不是$\frac{3}{9}$呢？

小敏一边摸球，一边思索着，当她第一次摸出的是白球时，袋中剩下9个球，其中有三个红球，再去摸一次得到红球的概率是$\frac{3}{9}$；可是她又想，如果第一次摸出的是红球时，袋中剩下9个球，其中只含二个红球了，再去摸一次得到红球的概率应为$\frac{2}{9}$！她问宋老师："计算这样的问题，有没有一般的规律？"

宋老师回答："有。这是属于条件概率的问题，就是说第二次摸到红球的概率确实是受到第一次摸球的影响。设第一次摸到红球的事件为A，在A发生的条件下第二次摸到红球的事件记为B|A，A与B二事件同时发生（即两次都摸到红球）记

为AB，那么，有下列重要公式：

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (1)$$

在古典概型的情形下，这个公式推证如下：

设总的基本事件数为n，其中A包含的基本事件数为m（$m \geqslant 1$），B包含的基本事件数为l，A和B同时包含的基本事件数为k。用古典概型得：

$$P(A)=\frac{m}{n}, \quad P(AB)=\frac{k}{n},$$

$$P(B \mid A)=\frac{\text{在A发生的前提下B中含的基本事件数}}{\text{在A发生的前提下基本事件的总数}}=\frac{k}{m}.$$

这三个式子的关系是很明显的，只要将第三个式子的分子分母同时除以n，得

$$P(B \mid A)=\frac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

因为$P(B \mid A)$表示在A发生的条件下B发生的概率，称为**条件概率**。**（1）式称为条件概率计算公式**。为了加深对这个公式的理解，再看一个例子。

已知甲乙两班人数相等，又知甲班的女生占两班总人数的$\frac{1}{5}$，今问在碰到甲班同学的条件下，碰到的是一个女同学的概率是多少？

设A表示碰到一个同学为甲班的事件，B表示碰到一个同学是女生的事件。因为$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{1}{5}$，所以

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}.$$

将这个例子再具体化：若甲、乙二班共110人，甲班人数占$\frac{1}{2}$，为55人，甲班女生占两班人数的$\frac{1}{5}$，为22人。显然，在碰到甲班同学的前提下正好碰到一个女生的概率应为$\frac{22}{55}=\frac{2}{5}$。可见用条件概率公式计算既准确又迅速。

为了方便，通常把公式（1）改写为

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B \mid A). \qquad (2)$$

（2）式称为概率的**乘法公式**。”

宋老师进一步启发同学，问小敏：“在上面谈到的摸球问题中，连摸两次都是红球的概率是多少？”

小敏说：“设第一、二次摸得红球的事件分别为A、B，就是要求$P(AB)$。

因为$P(A)=\frac{3}{10}$，$P(B \mid A)=\frac{2}{9}$，所以$P(AB)=P(A)\cdot P(B \mid A)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}\approx 0.07$。”

“要是采取有放回的抽样法呢？”宋老师又问。

小敏想：“第一次摸出的球又放回袋中，这时，第一次摸出任何一球对第二次毫无影响，即$P(B \mid A)=P(B)=\frac{3}{10}$，所以$P(AB)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=0.09$”她把这个结果告诉了宋老师。

宋老师肯定了小敏的想法，并说：“如果两事件A、B出现的概率互不影响，我们就称AB是相互独立的。如‘有放回的抽

样'问题，各次取样的事件都是独立事件。对独立事件A与B来说，$P(B|A)=P(A)$。因此公式（2）变为

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)。\qquad (3)$$

有的书上直接把满足（3）式的两个随机事件A、B称为相互独立的。"

听了宋老师的耐心讲解，小华联想到摇奖问题。她说："摇奖时，采用'有放回的摇珠法'，这说明各次摇出某号珠的事件是互相独立的。因此，应采用概率乘法公式（3）来计算连摇几次的概率。如果用A、B、C、D分别表示摇出个位、十位、百位、千位数码字的事件，那么，摇出三等、二等、头等奖的概率分别为：

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100},$$

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{1000},$$

$$P(ABCD)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\cdot P(D)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10000}.$$

讲到此，小华又想到开奖大会上遇到的一个允许"兼中兼得"的问题。就是说，允许同一张储蓄卷的号码同时获得头奖（500元）、二奖（100元）、三奖（10元）、四奖（2元），共612元，这个概率是多少呢？她请宋老师讲一下。

宋老师说："这要分两种情况来考虑。第一种，如果指望某一张奖卷（如018136号）能兼得四个奖，就要求摇四等奖时，正好出"6"；摇第二、三次正好出现36，作为三等奖中奖号；再连摇三次，得136，作为二等奖中奖号；最后连摇四次，恰好得到8136，作为头奖中奖号。这就是说，共摇了十次，要求正