YIYONG SHENGWU SHUXUE

医用生物数学

曾照芳 主编

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书根据医学检验专业的需要，系统地介绍了高等数学的基础理论知识，在各章中尽可能地结合医学和检验方面的内容。教材内容包括一元微积分、多元微积分、微分方程、医用数学模型、线性代数、概率论、医用数理统计、临床决策分析等。取材较新颖，深度及广度适宜。

本书可供医药院校检验专业本科学生及专修人员、医疗、儿科、口腔、药学、卫生等专业的学生作教材，可供医学研究生作必修或选修教材，也可供医药研究人员作学习和参考用书。

医 用 生 物 数 学

曾照芳 主编

责任编辑 李长惠

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重 庆 印 制 第 一 厂 印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：24 字数：599 千

1989 年 6 月第 1 版 1989 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—6000

标准书号：ISBN 7-5624-0248-5 / O·37 定价：4.73元

前　　言

医学检验是一个理工与生物医学互相交叉、相互渗透的边缘性学科，是现代医学中临床医学与实验室科学技术相结合的应用学科。随着现代医学科学的数量化、精确化，以及电子技术和计算机在医学领域中的广泛应用，医学检测手段也越来越先进，以定性描述为主的医药科学已逐步迈向定量化，临床检验和临床治疗正在发生深刻的变化。因此，对医生和实验室专家的数学水准提出了新的更高的要求。医学检验专业由此而产生，目前全国已有近三十所医药院校开办了检验系和检验专业，而现有的《医用高等数学》教材，在内容的深度和广度上都不能满足其要求。为了适应检验专业的需要，右江民族医学院、青岛医学院、南京铁道医学院、重庆医科大学、哈尔滨医科大学、温州医学院、镇江医学院等七所院校的有关教师经过两年的调查研究和充分准备，在已实践过的自编讲义的基础上，联合编写了本教材。我们力图通过本课程的教学，使学生获得必要的数学理论知识和常用的计算方法，增强学生数据处理能力、逻辑思维能力及分析解决实际问题的能力；为学生学习后继课程提供必要的数学基础，帮助学生在今后阅读国内外有关的医学科学文献、处理科研数据、总结科研成果、书写论文时能熟练使用有关的数学知识。

本教材内容丰富，覆盖了医药院校各专业学生必须学习的数学内容。在保持数学系统的完整性和逻辑的合理性的前提下，适当地与医学、检验实际相结合，既从现代医药研究的需要出发选编了新的内容，又根据专业的需要保持必要的深度和广度。本教材注重基础理论，删除了冗长的理论推导，例题尽力体现医药应用和检验应用的特点。内容由浅入深、前后呼应，尽可能达到教师好教、学生易学。各章后附有难度适当的各类习题，书末附有必要的附表和习题答案。

在教材编写过程中，得到浙江医科大学周怀梧、南京医学院黄大既两位同志的热情支持和帮助；得到天津第二医学院蔡乃木、湖北省药检专科学校尹舲、重庆医科大学陈宏等同志的大力协助，谨此一并致谢。

恳请使用本教材的教师、学生和医药工作者们对本教材存在的问题提出宝贵意见，以便再版时修正。

编者

1988年10月

目　　录

第一章　一元函数微分学

函数是高等数学的主要研究对象，极限是基本的研究方法，导数和微分问题构成了微分学的基本内容。在这一章里，主要介绍函数与极限、导数与微分的概念、计算及其应用。

第一节　函　数　与　极　限

一、函数

客观世界中一切事物都处在不断地运动和变化之中，而这种运动和变化往往又都是相互联系、彼此制约的。反映在数量上，就是变量与变量之间的依赖关系，即函数关系。

1．　函数概念

函数在中学数学中已学过，这里仅作必要的回顾与补充。

定义　设在某个过程中有两个变量x和 y，若变量x在它可能取值的范围内每取一值时，按照某种规律，变量 y 都有一个或多个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数。记为

$$y=f(x)$$

其中，x称为自变量，y则称为因变量。

如果对于自变量x的某一个值x_0，函数具有确定的对应值，则称函数在 x_0 处有定义。使函数有定义的自变量的取值范围称为函数的**定义域**。把以 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为

$$a-\delta<x<a+\delta \quad 或 \quad |x-a|<\delta$$

当函数用纯粹的解析式给出时，函数的定义域就是使该解析式有意义的自变量的一切实数值。而在实际问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定。

例1　已知自由落体运动规律（即物体下落距离 s 和时间 t 的关系）为

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \text{（}g\text{为重力加速度）}$$

假定物体着地时刻为$t=T$，则此函数的定义域为$0\leqslant t\leqslant T$或用区间$[0,\ T]$表示。

例2　在一次静脉注射给药的情况下，血药浓度C随时间 t 的变化规律可用下式表示

$$C=Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}$$

其中，A、B及α、β均为正的常数，e是无理数，其值是e＝2.7182818…，函数的定义域为：

$0\leqslant t<+\infty$，或用区间$[0,\ +\infty)$表示。

例3　设函数为$y=\dfrac{1}{x^2-1}$，因为分母不能为零，即 $x\neq\pm1$，所以函数的定义域为：$(-\infty,\ -1)$，$(-1,\ 1)$及$(1,\ +\infty)$。

对于函数$y=f(x)$，当自变量x在定义域中取一定值 x_0时，函数 $f(x)$的对应值叫做函数当$x=x_0$时的函数值。记为

$$f(x_0)\text{或}y|_{x=x_0}$$

例如，设$f(x)=x^2-x+7$，则$f(2)=2^2-2+7=9$；

$f(a)=a^2-a+7$，则$f(a+1)=(a+1)^2-(a+1)+7=a^2+a+7$；

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a}+7\quad(a\neq0)$$

前面所述的函数是单值函数，即自变量x在定义域内每取一值时，y只有一个确定的值与之对应，如果y有两个或两个以上的值与之对应，则称y是x的**多值函数**。例如：$y=x^2$的反函数有两个$y=\sqrt{x}$，$y=-\sqrt{x}$。当给定一个$x>0$，y有两个确定的值与之相对应，所以$y=x^2$的反函数是多值函数。又如，三角函数的反函数也是多值函数。本书所讨论的函数都是指单值函数。

2. 分段函数

在实际问题的研究中，有时需要对一个函数在自变量的不同范围内用不同的解析式表示，这样的函数叫做**分段函数**。对于分段函数求函数值时，要根据自变量所在范围代入相应的解析式计算。

例4 在等温过程中，理想气体的压力P与体积V之间的函数关系分两种情况，当V不太小时遵守波义耳—马略特定律；当V相当小时，服从范德瓦尔定理，即

$$P=\begin{cases}\dfrac{K}{V}, & \text{当}V\geqslant V_0\\[2ex] \dfrac{\gamma}{V-\beta}-\dfrac{\alpha}{V^2}, & \text{当}V<V_0\end{cases}$$

其中V_0，K，α，β和γ都是常数。

例5 根据实验测得血液中胰岛素浓度$C(t)$（unit/ml）随时间t（min）的变化数据，可建立如下经验公式

$$C(t)=\begin{cases}t(10-t), & \text{当}0\leqslant t\leqslant5,\\ 25e^{-K(t-5)}, & \text{当}t>5\end{cases}$$

其中，$K=\dfrac{\ln2}{20}$，$\ln2=\log_e2$，以e为底的对数称为自然对数。

例6

求函数 $y=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}, & \text{当}x<-1\\[2ex] \sqrt{1-x^2}, & \text{当}-1\leqslant x\leqslant1\\ 0, & \text{当}x>1\end{cases}$ 见图1-1

在$x=-2$，$x=\dfrac{1}{2}$，$x=1$，$x=\dfrac{3}{2}$处的函数值。

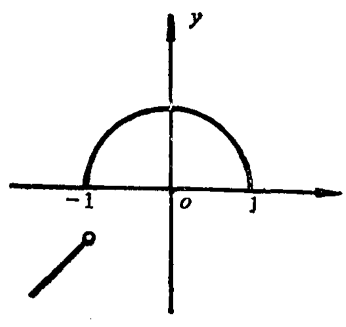


图1-1

解 $y|_{x=-2}=-2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$，$y|_{x=\frac{1}{2}}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$y|_{x=1}=\sqrt{1-1^2}=0$，

$y|_{x=\frac{3}{2}}=0$

3. 复合函数与初等函数

我们在中学学过的五种函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数，其性质与图形等在此不再赘述。

对于复合函数，我们先看两个例子。

例7 以初速度 v_0上抛物体（质量为m）的动能E是速度V的函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$，而速度v又是时间t的函数：$v=v_0-gt$。于是，动能E通过v而成为t的函数$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$ 这时，我们称E是t的复合函数。

例8 由$y=e^u$，而$u=-x^2$组成的函数 $y=e^{-x^2}$也叫做x的复合函数。

一般地，有如下定义

定义 若y是u的函数$y=f(u)$，而u又是x的函数$u=\varphi(x)$，当x在某一区间上取值时，相应的u值可使$y=f(u)$都有定义，则称y是x的复合函数，记为$y=f[\varphi(x)]$，其中，u称为中间变量。

复合函数不仅可由两个函数，而且可由更多个函数复合而成。

例9 $y=(\mathrm{arctg}\,e^x)^2$可看作是由$y=u^2$，$u=\mathrm{arctg}\,v$，$v=e^x$复合而成，其中有两个中间变量：$u$，$v$

同样$y=\ln\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$可看作是由$y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=2x-\frac{\pi}{4}$复合而成。

这种把一个复合函数分解为一串简单的基本初等函数的方法是很有用的，在第二节中我们将介绍它的应用。

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而成的且能用一个数学式子所表示的函数，称为**初等函数**。例如

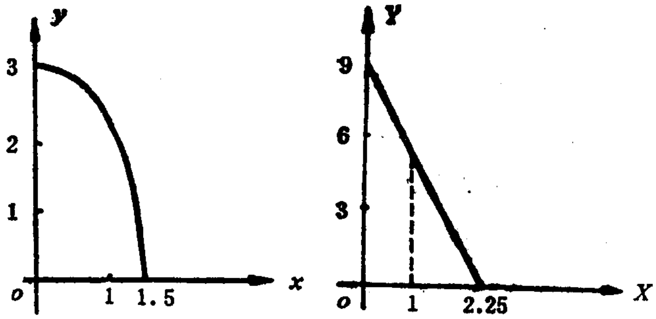
$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad y=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}},\quad y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$$

等都是初等函数。初等函数是本书的主要研究对象。

4. 曲线的直线化

在医药科学定量研究中，常常需要寻找实验数据所遵循的函数关系——经验公式。在许多实际问题中，两个变量之间的函数关系可能不是线性的。譬如，有些生物的生长曲线，血药浓度与时间的关系曲线呈非线性，要建立经验公式首先要将它们转化为线性函数来研究，曲线的直线化是建立经验公式的一种有效方法。

例如，曲线$y^2=9-4x^2(x\geqslant0, y\geqslant0)$的图形是椭圆在第一象限的部分，它可用描点法作图，如图1-2(a)所示。



(a) (b)

图1-2

如果以x^2值作为自变量X值，相应的y^2值为因变量Y值，则曲线$y^2=9-4x^2$变为

$$Y=9-4X$$

其图形是直角坐标系XoY中的一条直线，如图1-2(b)所示。

这种通过坐标变换使在旧坐标系中的曲线变成新坐标系中直线的方法叫做**曲线的直线化**。

在医学检验中，需要直线化的曲线最常见的有两种，现分别介绍如下。

（1） 指数函数的曲线直线化

指数函数$y=ae^{bx}(a>0)$的图形是一条曲线，如图1-3(a)所示。

对$y=ae^{bx}$两边取常用对数，得

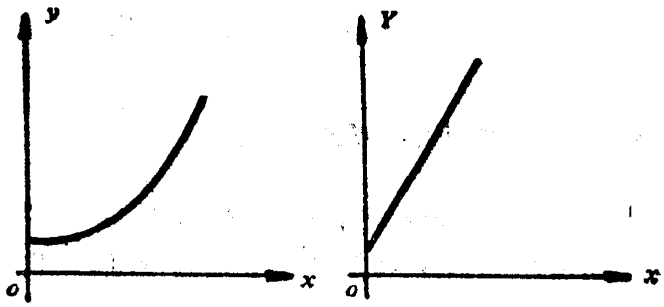
$$\lg y=bx\lg e+\lg a$$

即 $\lg y=0.4343bx+\lg a$

若令$Y=\lg y$，则原方程变为直线方程：

$$Y=0.4343bx+\lg a$$

它在以x为横轴，Y为纵轴的直角坐标系中的图形是直线，如图1-3(b)所示。



（a） （b）

图1-3

（2） 幂函数的曲线直线化

幂函数$y=ax^b$。我们只讨论$a>0$，$x>0$时的情形。对上式取常用对数，得

$$\lg y=b\lg x+\lg a$$

令$X=\lg x$，$Y=\lg y$，则它在新坐标系XoY中为一直线：$Y=bX+\lg a$

例：作函数$y=2x^{\frac{3}{2}}$（$x>0$）的图形，并把它直线化。

解 在直角坐标系xoy中作出函数$y=2x^{\frac{3}{2}}$的图形，图1-4(a)。对$y=2x^{\frac{3}{2}}$两边取常用对数，得

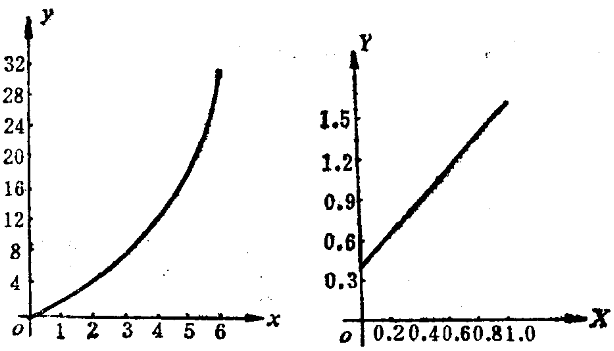
$$\lg y=\frac{3}{2}\lg x+\lg 2$$

令$X=\lg x$，$Y=\lg y$，则上式为

$$Y=\frac{3}{2}X+\lg 2$$

它在直角坐标系XoY中是一条直线，参见图1-4(b)。

曲线的直线化在医用统计及药物代谢动力学中经常用到。



（a） （b）

图1-4

二、函数的极限

1． 函数极限的概念

研究函数的极限就是研究函数变化的一种趋势。函数的变化是由自变量变化引起的，所以我们首先要指出自变量的变化趋势。自变量的变化方式很多，这里主要讨论以下两种：一种是自变量x的绝对值$|x|$无限增大，记作$x\to\infty$；另一种是自变量x趋向于某个定数x_0，记作$x\to x_0$。对于自变量变化的这两种情形，函数的极限定义如下。

医用生物水

定义1 若当$|x|$无限增大时，$f(x)$的对应值无限趋近于某一常数A，则称A为$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (当x\to\infty)$$

极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$有明显的几何意义，它表示当$|x|$越来越增大时，曲线$y=f(x)$与直线$y=A$无限接近，即当$x\to\infty$时，曲线$y=f(x)$上的点与直线$y=A$上的对应点的距离$|f(x)-A|$趋于零，参见图1-5。

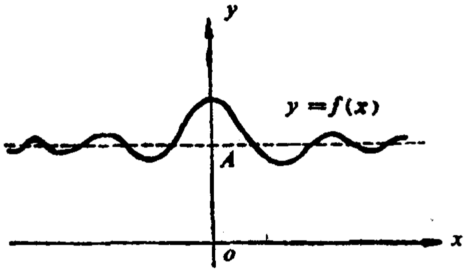


图1-5

若定义1中考虑的x值是正的，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (当x\to+\infty)$$

若考虑的x值是负的，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (当x\to-\infty)$$

例10 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{arc\ tg}x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{arc\ tg}x=-\frac{\pi}{2}$，

但极限$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{arc\ tg}x$不存在，因为$|x|\to\infty$时$\mathrm{arctg}x$不趋向一个确定的常数，如图1-6所示。

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ 如图1-7所示。

例11 设$f(x)=\sin x$，当$x\to+\infty$时，对应的$f(x)$的值总摆动于$+1$与-1之间，故极限不存在。

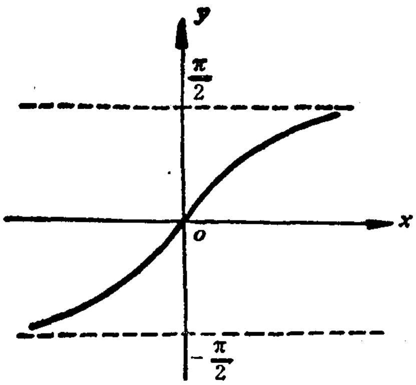


图1-6

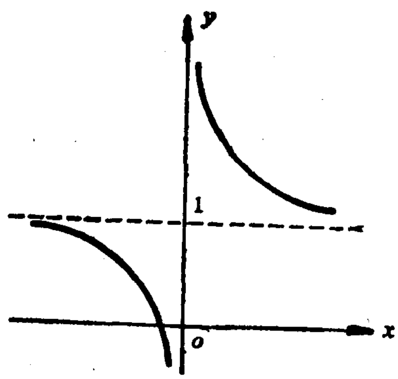


图1-7

定义2 设函数$f(x)$在点x_0的邻域内有定义（但在点x_0可以没有定义），若当x无论以何种方式无限趋近于x_0时，对应的函数值$f(x)$无限趋近于一个定数A，则称A为$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (当x\to x_0)$$

由此定义可见：(1)当$x\to x_0$时，若$f(x)$有极限A，则必有$|f(x)-A|\to 0$；(2)在考虑函数$f(x)$在点x_0的极限时，我们所关心的只是当$x\to x_0$时，$f(x)$的变化趋势，函数$f(x)$有没有

极限与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义及与点 x_0 的函数值 $f(x_0)$ 大小均无关，所以通常规定 $x\to x_0$ 但 $x\neq x_0$。

例12　考虑 $f(x)=2x-1$，当 $x\to 2$ 时的极限。

因为 $|(2x-1)-3|=2|x-2|\to 0$（当 $x\to 2$ 时），所以 $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$

例13　考虑 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时的极限。

注意函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 没有定义，但极限存在且 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$。

事实上，因为 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|\to 0$（当 $x\to 0$ 时）。所以 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$。

例14　考虑 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$　在 $x\to 1$ 时的极限。

因为当 $x\to 1$ 时 $x\neq 1$，故

$$|f(x)-2|=|2x-2|=2|x-1|\to 0,\quad (\text{当}x\to 1\text{时})$$

所以

$$\lim_{x\to 1}f(x)=2$$

（注意：$f(x)$ 在 $x=1$ 处函数值 $f(1)=1$）

在有些问题中，往往只需要考虑 x 从 x_0 的左侧或右侧趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，这就是所谓函数的左、右极限问题。

当 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 无限接近于一个定数 L，则称 L 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=L\quad\text{或}\quad f(x_0-0)=L$$

同样，当 x 从 x_0 的右侧趋近于 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 无限接近于一个定数 R，则称 R 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=R\quad\text{或}\quad f(x_0+0)=R$$

由定义 2 及左、右极限的定义，易得如下定理。

定理　极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的必要和充分条件是 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ 均存在且相等。

在极限存在的情况下，有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)$$

由此可知，即使 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ 都存在但不相等，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 也不存在。

例15　考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{当}x<0\\ 0, & \text{当}x=0\\ x-1, & \text{当}x>0\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时的左、右极限及极限。显然有

$\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x-1)=-1$，见图1-8。

尽管左、右极限都存在，但不相等，故极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。

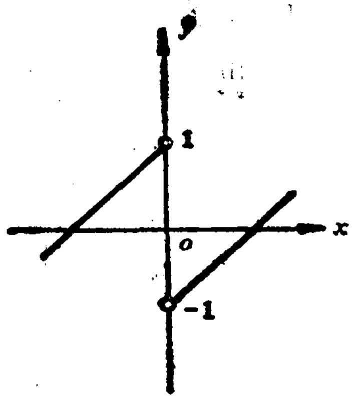


图1-8

2. 极限的运算法则及两个重要极限

（1） 极限的运算法则

定理 若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

1° $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

2° $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$；

3° $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$，当$B\neq 0$时

4° 复合函数的极限：设$u=\varphi(x)$当$x\to x_0$时有极限：$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$

由2°可得下面两个推论：

推论1) $\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)$，
其中，C为常数；

推论2) $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$，
其中，n为正整数。

注：上述运算法则对$x\to x_0$或$x\to\infty$均成立，故在极限号"lim"下没有标明自变量x的变化趋势。

例16 求极限$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2+3x)(x^2-1)}{6-x}$

解

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2+3x)(x^2-1)}{6-x}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2+3x)(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(6-x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2+3x)\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)}{6-\lim\limits_{x\to 2}x}$$

$$=\frac{(2+3\times 2)\times(2^2-1)}{6-2}=\frac{8\times 3}{4}=6$$

例17 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

解 由于$x\to 1$时$\dfrac{1}{1-x}$和$\dfrac{3}{1-x^3}$的极限都不存在，故不能用法则1°，但当$x\to 1$时$x\neq 1$，于是可将函数变形后再求极限

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1$$

例18 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+3}{5x^3+4x-7}$

解 由于分子、分母的极限都不存在，故不能用法则3°，但可用x^3同除分子、分母再求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+3}{5x^3+4x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{5+\frac{4}{x^2}-\frac{7}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{4}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}=\frac{2}{5}$$

（2） 两个重要极限

下面介绍两个重要极限（不证），它们在极限的计算中起着十分重要的作用。

1° $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$； 2° $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$

例19 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 3x}$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{3x\cdot\cos x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\right)=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{1}{3}$$

例20 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$$

例21 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{K}{x}\right)^x$（$K$为非零整数）

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{K}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{K}}\right)^{\frac{x}{K}\cdot K}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{K}}\right)^{\frac{x}{K}}\right]^K$$

$$=\left[\lim_{\frac{x}{K}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{K}}\right)^{\frac{x}{K}}\right]^K=e^K$$

3. 无穷小量与无穷大量

（1） 无穷小量及其比较

定义3 若函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的极限为零，则称$f(x)$为当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小量，简称无穷小。

例如 $f(x)=\sin x$是在$x\to 0$时的无穷小量；$f(x)=\frac{1}{x}$是在$x\to\infty$时的无穷小量；$f(x)=2x-3$是在$x\to\frac{3}{2}$时的无穷小量。

必须注意：我们不能把无穷小量与很小很小的数混为一谈。无穷小量是以零为极限的变量，不是数，但因为零的极限是零，所以零是可以看作无穷小量的唯一的一个常数。除此之外，任何一个很小很小的数都不能认为是无穷小量。

若函数$f(x)$（当$x\to x_0$或$x\to\infty$时）以A为极限：$\lim f(x)=A$，则$\lim[f(x)-A]$

$=\lim f(x)-\lim A=A-A=0$，即 $f(x)-A$ 为无穷小量；反之，若 $f(x)-A$ 为无穷小量，即 $\lim[f(x)-A]=0$，则由 $\lim[f(x)-A]=\lim f(x)-A=0$ 得 $\lim f(x)=A$

上述结果表明：

函数 $f(x)$ 以 A 为极限的必要和充分条件是 $f(x)-A$ 为无穷小量。若记 $f(x)-A=\alpha(x)$（无穷小量），则 $f(x)=A+\alpha(x)$，于是上述结论还可叙述为

具有极限的函数可表为它的极限（常数）与无穷小之和；反之，若函数能表示为一常数与无穷小之和，则此常数就是这函数的极限。

设 $f(x)$ 是无穷小量，$\lim f(x)=0$，$g(x)$ 是有界函数：$|g(x)|\leqslant M$（M 为某个常数），由

$$|f(x)g(x)-0|=|f(x)|\cdot|g(x)|\leqslant M|f(x)|\to 0$$

即 $f(x)\cdot g(x)$ 也是无穷小量。于是又得到如下结论：

有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量。

例如：$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}=0$，因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x-1}\right|\leqslant 1$，$\sin\dfrac{1}{x-1}$ 是个有界函数，而（$x-1$）当 $x\to 1$ 时是无穷小量。

特别有：常数与无穷小量的乘积是无穷小量。

由无穷小量的定义及极限运算法则，易证：**有限个无穷小量的和、差、积仍为无穷小量。**

但两个无穷小量的商不一定是无穷小量。

例如：当 $x\to 0$ 时，x 与 $\sin x$ 都是无穷小量，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，可见当 $x\to 0$ 时 $\dfrac{\sin x}{x}$ 不是无穷小量。

无穷小量都是以零为极限的变量，但它们趋于零的快慢程度可以很不一样。譬如：在 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{1}{x^2}$ 都是无穷小量，显然 $\dfrac{1}{x^2}$ 趋于零的速度比 $\dfrac{1}{x}$ 趋于零的速度要快得多。为了比较无穷小量趋于零的"快慢"程度，我们引入如下定义。

定义4　设 α，β 都是 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量。

1°　若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是 β 的高阶无穷小；2°若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c(c\neq 0)$，则称 α 与 β 是同阶无穷小；特别地，若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$。

例如：因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{x}=0$，故当 $x\to 0$ 时，$3x^2$ 是 x 的高阶无穷小；因 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$，故当 $x\to 3$ 时（x^2-9）与（$x-3$）是同阶无穷小；因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=1,$$

故当 $x\to 0$ 时 $\sin x$ 与 x，$\mathrm{tg}\,x$ 与 x 都是等价无穷小：$\sin x\sim x$，$\mathrm{tg}\,x\sim x$

（2）　无穷大量

在研究函数极限的过程中，常常会遇到与无穷小量相反的一种变化状态。

定义5 若当$x \to x_0$（或$x \to \infty$）时，$f(x)$的绝对值无限制地增大，则称$f(x)$在$x \to x_0$（或$x \to \infty$）时为无穷大量，简称无穷大。记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

亦可记为：

$$f(x) \to \infty \ (\text{当} x \to x_0) \quad \text{或} \quad f(x) \to \infty \ (\text{当} x \to \infty)$$

例如：$f(x) = \frac{1}{x-1}$当$x \to 1$时是无穷大量；$f(x) = \mathrm{tg}x$当$x \to \frac{\pi}{2}$时是无穷大量等。

易见，无穷小与无穷大有如下简单关系：

若$f(x)$为无穷大量，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小量；反之，若$f(x)$为无穷小量且$f(x) \neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大量。

三、函数的连续性

1. 函数连续的概念

在自然界中，许多事物的变化是连续进行的。譬如，生物的连续生长，血液在血管中的连续流动，人体体温的连续变化等等。这一特性反映在数量关系上就是我们所要研究的函数的连续性。为了弄清这一概念，先介绍函数的增量。

设函数$y = f(x)$在其定义域内当自变量x从x_0取得一个增量Δx（可正可负）变到$x_0 + \Delta x$时，相应地函数值从$f(x_0)$变到$f(x_0 + \Delta x)$，称$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$为函数在点$x_0$的增量（或改变量）。记为$\Delta y$，即 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

若当 $\Delta x \to 0$时，$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \qquad (1)$$

则称函数$y = f(x)$在点x_0连续。(1)式也可写为$\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$

若设$x = x_0 + \Delta x$，则$\Delta x \to 0$即$x \to x_0$，于是上式又可写为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (2)$$

因此，函数在一点连续的定义又可述之如下：

定义 设函数$y = f(x)$在点x_0及其邻域内有定义，极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数$y = f(x)$在点$x_0$处连续。

若函数$f(x)$在区间$[a, b]$上每一点都连续，则称$f(x)$在区间$[a, b]$上连续。$f(x)$在区间$[a, b]$端点a，b的连续分别指：在点a的右连续$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$，在点$b$的左连续$\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$。

连续函数的图形是一条没有间隙的连续不间断的曲线。

例22 证明$y = \sin x$在$(-\infty, +\infty)$内连续。

证 在 $(-\infty, +\infty)$ 内任取一点x，当x有增量Δx时，相应的函数的增量为

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

注意到：$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1$且$\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<\frac{|\Delta x|}{2}$，（$\Delta x\neq 0$）于是$|\Delta y|\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|$，故当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y\to 0$，即 $y=\sin x$ 在点x连续，再由 x 属于 $(-\infty, +\infty)$ 的任意性，所以$y=\sin x$在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续。

同样可证$y=\cos x$在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续。

我们还指出，由 $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$，(2)式可改写为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

这说明，如果函数在点x_0连续，则极限号与函数符号可交换次序，计算极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$只需算出$f(x)$在点$x_0$的值$f(x_0)$即可。

例如，上面已证$\sin x$在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，故

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. 函数的间断点

若函数$y=f(x)$在点x_0不连续，则称x_0为函数$y=f(x)$的间断点。根据函数连续的定义，若$f(x)$在点x_0处出现下列三种情形之一，点x_0就是函数$f(x)$的间断点。

1° $f(x)$在点x_0没有定义；

2° 极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；

3° $f(x)$在点x_0有定义，且极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

例23 考察函数$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$的间断点。

解 因为$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=1$，即$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$，但$f(1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$。故$x=1$为$f(x)$的间断点。

例24 考察函数 $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$的间断点。

解 因为$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$，但$f(x)$在$x=2$没有定义。所以$x=2$为间断点，见图1-9。

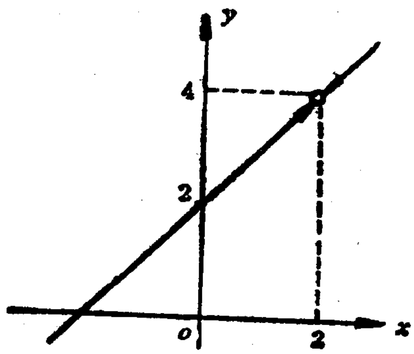


图1-9