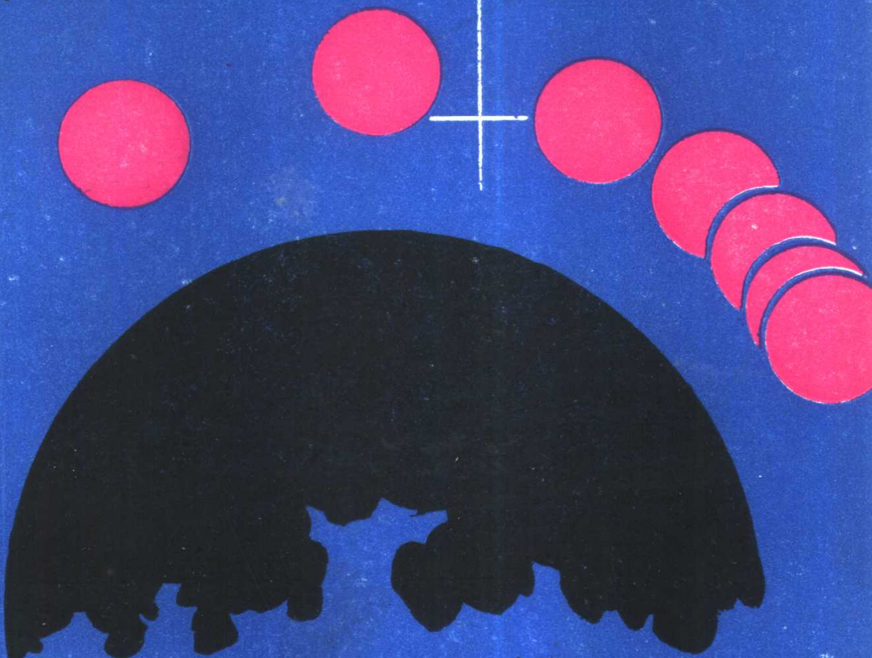
郑权旋 编

华中理工大学出版社



工程运动学

运动学 是关于物体运动的几何性质的科学，其任务是研究物体在空间的位置随时间改变的规律。

工 程 运 动 学

郑权旌 编

华中理工大学出版社

内 容 简 介

本书是在华中理工大学多年试用的《理论力学》讲义的基础上，根据1986年国家教委审定的《高等工业学校理论力学课程教学基本要求》进行了修改，并将该讲义分为《工程静力学》、《工程运动学》和《工程动力学》三本独立成册又能连贯使用的教材，将陆续出版。

本书为《工程运动学》，包括点的运动、刚体的基本运动、点的复合运动、刚体的平面运动和刚体的复合运动，共五章。概念清楚，理论严谨，深、广度适中，并注意将教学和工程实际相结合。各章均附有适量的习题，书末附有习题答案，便于教学使用和自学者参考。

本书可作为高等工科院校的运动学课程或多、中学时理论力学课程运动学部分的基本教材，也可供有关工程技术人员参考和作为高等教育自学教材。

工 程 运 动

郑权旌 编

责任编辑 杨志锋

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：6.375 字数：134 000

1988年7月第1版 1988年7月第1次印刷

印数：1—7 000

ISBN 7-5609-0194-8/TB·8

定价：1.08 元

序　　言

本书是以1986年由国家教委审定的《高等工业学校多学时类型理论力学课程中运动学的基本要求》为依据而编写的。根据当前高等学校普通物理、高等数学的教学情况、后继课程的需要以及本着"因材施教"的原则，本书适当地提高了教学起点，增补了一些高于基本要求的内容并由浅入深地编选了一定数量的例题和习题。

本书既可供单独设课使用，也可作为多学时或中学时类型理论力学课程中运动学部分的教材使用。

本书在编写过程中，得到张君明、吕佩珊、刘恩远、邹庆丽、朱仕明、周又和、陈建华等同志的大力帮助，谨在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，缺点错误在所难免，恳请广大读者提出批评和指正。

编　者

1986年10月

目　　录

引 言

运动学的任务是从几何学的观点来研究物体的运动，即只研究物体的位置随时间的变化，而不考虑物体的质量以及作用在物体上的力。研究物体的运动和作用力之间的关系，是动力学的任务。

从力学的发展史看，在过去很长的时间内，运动学一直和动力学合在一起，而没有被作为力学中的一个独立部分。19世纪初，由于机械制造工业的发展，提出了一系列要求从纯几何学方面研究物体运动的问题。法国著名科学家安培（Ampere 1775—1836）最先指出，将这类问题列为专题研究有好处，他还建议将力学中的该部分叫做运动学。

随着科学技术的发展，运动学已成为力学中一门系统的独立的学科。运动学不仅是研究动力学的基础，而且在工程技术应用上也有重要的意义。在分析机构的运动规律和设计新的机构时，都需要丰富的运动学知识。

研究任一物体的运动，都必须选取另一物体作为观察的依据，这个被选作观察依据的物体称为*参考系*。选好参考系后，就可在其上选取适当的坐标系来确定物体在空间的位置。显然，选用不同的参考系来描述同一物体的运动，可以得出不同的结果。例如，安装在运动着的车厢内的壁灯，以车厢作为参考系来观察它是静止的，但以地球作为参考系，则壁灯与车厢具有相同的运动。又如，相对于地面作匀加速垂直降落的物体，若以匀速直线行驶的汽车作为参考系，则物体相对汽车是作向后偏落的抛物线运动。由此可见，在运动学中对任何物体

运动的描述都是相对的。所谓确定某一物体的运动，就是要确定该物体相对于所选定的参考系的位置随时间改变的规律。在一般工程问题中，通常是取地球或与地球固连的物体作为参考系，凡本书未作特别说明之处，均应作这样的理解。

由于运动学中不涉及力和质量的概念，因此可将实际物体抽象为力学模型点或刚体来研究。点是指不计大小但在空间占有确定位置的几何点。刚体则指由无数点组成的不变形系统。运动学可分为点的运动学和刚体运动学两个基本部分。由于刚体运动时，刚体内各点可以有不同的运动情况，例如，沿直线轨道滚动的车轮，其轮心作直线运动，而轮上其余各点则作不同的曲线运动；又如在分析机构的运动问题时机构运动的传递是通过构件间的连接点进行的，故必须分析这些点的运动，才能进一步确定机构中每一构件的运动规律。由此可见，研究点的运动也是进一步研究刚体和物体系统运动的基础。

本书首先研究点相对于某一参考系的运动，然后研究点对不同参考系的运动之间的关系以及刚体的各种运动。

第一章　点的运动

本章的任务是研究点相对于某一参考系的运动，其内容包括：（1）确定动点在选定参考系中的运动规律，也就是建立点的运动方程；（2）计算描述物体运动状态的诸物理量，如速度、加速度、路程和时间等。

研究点相对于某一参考系的运动有多种方法，本章仅研究常用的三种方法：矢量法、直角坐标法和自然法。矢量法主要用于建立概念和理论推导，直角坐标法和自然法多用于实际计算。此外还有一些方法，如极坐标法、柱坐标法、球坐标法等，对研究某些特殊问题往往更为方便，这些方法将结合第三章的内容分别加以介绍。

§1-1　描述点的运动的基本概念

1. 点的运动方程

点相对于某一参考系运动时，表示点在空间的位置和时间的函数关系的方程式，称为动点的运动方程。

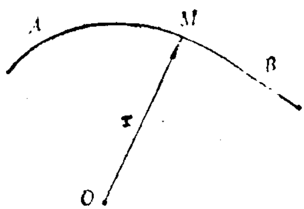


图 1-1

点在空间的位置可以用矢量表示。设点M相对于某一参考系沿空间曲线AB运动（图1-1），在参考系上任取一点O作为原点，自原点

O到点M作一矢量$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，称为点$M$在图示情况下瞬时的矢径，则点$M$的位置可由矢径$\boldsymbol{r}$的大小和方向唯一地确定。点$M$运动时，其矢径$\boldsymbol{r}$的大小和方向随时间$t$而变化，因此矢径$\boldsymbol{r}$是时间$t$的单值连续函数，可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t). \tag{1-1}$$

式(1-1)给出了点的位置随时间变化的规律，称为用矢量表示的点的运动方程。

当点运动时，其矢径的末端在空间所划过的曲线，称为矢径端图。显然，矢径端图就是动点的轨迹。

2. 点的速度

点的速度是描写点在某一瞬时运动的快慢和方向的物理量。

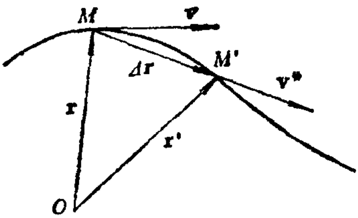


图 1-2

设动点在任一瞬时t的位置M由矢径$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$确定，经过很短的时间$\Delta t$后，点的位置移至$M'$，其矢径变为$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$如图1-2所示。点的矢径在$\Delta t$时间内的变化量为

$$\overrightarrow{MM'}=\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t).$$

称为点在Δt时间内的位移。由于Δt很短，故可用点沿弦$\overline{MM'}$的运动来近似地表示它沿弧$\widehat{MM'}$的运动，从而可用比值$\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$描写点在$\Delta t$时间内运动的平均快慢和方向，以$\boldsymbol{v}^*$表示此比值，则

$$\boldsymbol{v}^*=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}.$$

$\boldsymbol{v}^*$称为点在Δt时间内的平均速度。平均速度只是对点在Δt时间内运动的近似描写，当$\Delta t\to 0$时，则平均速度$\boldsymbol{v}^*$将趋向于一个极限，这就能反映点在瞬时t运动的快慢和方向，用$\boldsymbol{v}$表示此极限值，则有

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}^*=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dot{\boldsymbol{r}}。\qquad (1\text{-}2)$$

$\boldsymbol{v}$称为点在瞬时t的速度，它等于点的矢径对时间的一阶导数。速度的方向由位移$\Delta \boldsymbol{r}$的极限方向所确定，即沿轨迹上M点的切线方向，并指向点的运动方向。速度的大小$|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$，或称为速率。应该指出，在一般情况下，$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|\neq\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$，读者不妨自己举一实例说明这个问题。

速度的量纲是

$$[v]=[L][T]^{-1}。$$

在国际单位制中，常用的单位为米/秒（m/s）。

3.点的加速度

点的加速度是描写点的速度大小和方向变化率的物理量。

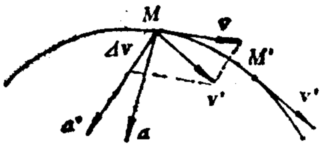


图 1-3

设动点从瞬时t到瞬时$t+\Delta t$，其位置由M移动到M'，其速度由$\boldsymbol{v}$变为$\boldsymbol{v}'$，如图1-3所示。点在Δt时间内速度的改变量为

$$\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}。$$

比值$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$描写点的速度在$\Delta t$时间内的平均变化率，称为平均加速度，用$\boldsymbol{a}^*$表示，则

$$a^* = \frac{\Delta v}{\Delta t}。$$

平均加速度a^*的方向与Δv的方向相同。当$\Delta t \to 0$时，平均加速度a^*的极限描述了点的速度在瞬时t的变化率，用a表示之，则

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a^* = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{r}。 \qquad (1-3)$$

a称为点在瞬时t的加速度。所以，点的加速度等于点的速度对时间的一阶导数，或等于点的矢径对时间的二阶导数。加速度的方向沿$\Delta t \to 0$时Δv的极限方向，加速度的大小$|a| = \left|\frac{dv}{dt}\right|$，

加速度的量纲是

$$[a] = [L][T]^{-2}。$$

在国际单位制中，加速度的常用单位为米/秒^2(m/s^2)。

当点沿其轨迹运动时，其速度的大小和方向都随时间而变化，与描绘矢径端图相似，如任选一固定点O，自O点画出动点在连续各瞬时t_1、t_2、t_3、…的速度矢量v_1、v_2、v_3、…，并连接各速度矢量的端点，可得一条连续的曲线，称为点的速度端图（图1-4）。与矢径端图的性质相比较，很显然，加速度a就等于速度矢量v的端点A沿速度端图运动的速度。因此，速度端图上对应于瞬时t的一点A的切线方向，也就是动点在瞬时t的加速度a的方向。

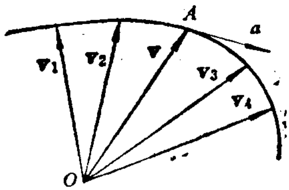


图 1-4

用矢量描述点的运动，对于建立基本概念和进行理论研究是极为简便的，但在解决实际问题时，还必须采取数学分析的方法或图解法。下面将分别研究常用的两种分析方法——直角

坐标法和自然法。

§1-2 分析点的运动的直角坐标法

分析点相对于某一参考系运动时，一般都可采用直角坐标法。这种方法的特征是以动点在与参考系固连的直角坐标系的三个坐标来决定该点的位置。

作直角坐标系$oxyz$如图1-5所示。沿坐标轴x、y、z分别取单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，则点M的矢径$\boldsymbol{r}$可解析地表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}。\tag{1-4}$$

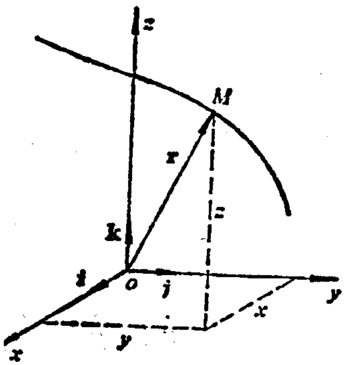


图 1-5

式中x、y、z是$\boldsymbol{r}$在相应坐标轴上的投影。点M运动时，其矢径$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$为时间$t$的单值连续函数，即

$$\left.\begin{aligned}x&=f_1(t),\\y&=f_2(t),\\z&=f_3(t)。\end{aligned}\right\}\tag{1-5}$$

方程组(1-5)称为**点的直角坐标形式的运动方程**。若已知点的运动方程，则在任何瞬时t，点在空间的位置均可由式(1-5)求得的坐标x、y、z确定。

方程组(1-5)也是以时间t为参变量的点的轨迹参变方程。点的轨迹方程可从运动方程中消去t得到，可写成下列三个方程组中的任一组：

$$\left.\begin{aligned}F_1(y,z)=0,\\F_2(z,x)=0;\end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned}F_2(z,x)=0,\\F_3(x,y)=0;\end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned}F_3(x,y)=0,\\F_1(y,z)=0。\end{aligned}\right\}\tag{1-6}$$

以上任一组方程中的每一方程均表示一空间曲面，二曲面的交线就是动点的运动轨迹。

若动点保持在oxy平面内运动，则该点的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t)。\end{aligned}\right\}$$

其轨迹方程为$F(x,y)=0$。

将式(1-4)代入式(1-2)，注意到单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$均为大小、方向不变的常矢量，它们对时间的导数为零，即得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \\ &= \dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}。 \end{aligned} \tag{1-7}$$

设速度$\boldsymbol{v}$在x、y、z轴上的投影分别为v_x、v_y、v_z，仿照公式(1-4)有

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}。 \tag{1-8}$$

比较以上两式，得

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x}, \\ v_y &= \dot{y}, \\ v_z &= \dot{z}。\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

即：点的速度在固定直角坐标轴上的投影，等于该点对应的坐标对时间的一阶导数。由此可见，若已知点的运动方程，则根据式(1-9)求得点的速度在直角坐标轴上的投影v_x、v_y、v_z后，由下列公式可求得点的速度的大小和方向为

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2};\\ \cos(\boldsymbol{v},x) &= \frac{\dot{x}}{v},\quad \cos(\boldsymbol{v},y)=\frac{\dot{y}}{v},\quad \cos(\boldsymbol{v},z)=\frac{\dot{z}}{v}。\end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

同理，将式(1-7)代入式(1-3)，得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}\right)\\ &=\frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}\\ &=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}。\end{aligned} \tag{1-11}$$

设加速度$\boldsymbol{a}$在x、y、z轴上的投影分别为a_x、a_y、a_z，则加速度$\boldsymbol{a}$还可表示为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}。 \tag{1-12}$$

比较以上两式，得

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \ddot{x},\\ a_y &= \ddot{y},\\ a_z &= \ddot{z}。\end{aligned}\right\} \tag{1-13}$$

即：点的加速度在固定直角坐标轴上的投影，等于该点速度的对应投影对时间的一阶导数，也等于该点的对应坐标对时间的二阶导数。已知加速度$\boldsymbol{a}$在直角坐标轴上的投影a_x、a_y、a_z，就可求得点的加速度的大小和方向：

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2};\\ \cos(\boldsymbol{a},x) &= \frac{a_x}{a},\quad \cos(\boldsymbol{a},y)=\frac{a_y}{a},\cos(\boldsymbol{a},z)=\frac{a_z}{a}。\end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

应用分析点的运动的直角坐标法解实际问题，通常有以下两种类型：

（1）已知动点运动的某些条件，求动点的运动方程、轨迹、速度和加速度；或已知机构的主动件的运动规律，求从动件上某一点的运动规律。

解这类问题需要先根据动点在任一瞬时t的位置和已知条件，建立其运动方程，从运动方程中消去时间t即得点的轨迹方程，再根据式(1-9)、(1-10)、(1-13)、(1-14)便可求得点的速度以及加速度的大小和方向。

（2）已知动点的加速度及其运动初条件（即在$t=0$时动点的位置坐标和速度），求动点的运动方程。

下面举例说明，分析点运动的直角坐标法的应用。

例1-1 曲柄连杆机构如图1-6所示。已知 $\overline{OA}=\overline{AB}=l$，曲柄按规律$\varphi=\omega t$转动($\omega$为常数)。试求连杆$AB$上点$M$（$\overline{AM}=b$)的运动方程、轨迹、速度和加速度。

解 （1）求点的运动方程和轨迹。

取坐标系oxy如图示。设点M到A点的距离为b，由图可见，当机构在任意位置$\varphi=\omega t$时，点M的坐标为

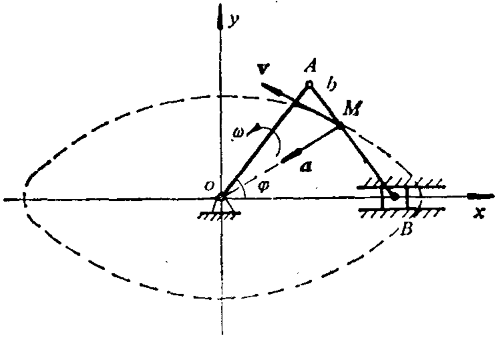


图 1-6

$$\left.\begin{aligned} x &= (\overline{OA}+\overline{AM})\cos\varphi=(l+b)\cos\omega t,\\ y &= \overline{BM}\sin\varphi=(l-b)\sin\omega t。\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

方程组(a)即点M的直角坐标形式的运动方程。从上列方程中消去时间t，得到

$$\frac{x^2}{(l+b)^2}+\frac{y^2}{(l-b)^2}=1。\tag{b}$$

这就是点M的轨迹方程，由此可见，点M的轨迹是一个椭圆。改变点M在连杆AB上的位置，可以得出各种不同参数的椭圆，描绘椭圆的仪器就是按此规律设制的。应当注意，动点的实际轨迹与轨迹方程所表示的曲线还有所不同，实际轨迹有时只是此曲线上的一个有限线段。另外还须明确，轨迹方程也不能反映出点的运动规律，只有点的运动方程才能确定该点的运动特征。

（2）求点的速度和加速度

将式(a)对时间t求导数，得到点M的速度在坐标轴x、y上的投影为

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\dot{x}=-(l+b)\omega\sin\omega t,\\ v_y&=\dot{y}=(l-b)\omega\cos\omega t。\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

故速度的大小为

$$\begin{aligned} v&=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\\ &=\omega\sqrt{(l+b)^2\sin^2\omega t+(l-b)^2\cos^2\omega t}\end{aligned}\tag{d}$$

速度的方向为椭圆在M点的切线方向。

再将式(c)对时间t求导数，便得点M的加速度在坐标轴x、y上的投影

$$\left.\begin{aligned} a_x&=\dot{v}_x=-\omega^2(l+b)\cos\omega t=-\omega^2x,\\ a_y&=\dot{v}_y=-\omega^2(l-b)\sin\omega t=-\omega^2y。\end{aligned}\right\}\tag{e}$$

因此，加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$