热力学·统计物理 习题解答

缪胜清　叶崇远

安徽大学物理系

说　　明

本书是汪志诚同志编《热力学·统计物理》（人民教育出版社，1980年9月第一版）一书中全部习题的解答。编写工作在汪志诚同志的热忱鼓励和帮助下进行。书中习题编号及解题过程中所引用的一些基本公式的编号均与《热力学·统计物理》书中者相同。

为了便于教学参考，我们在书中还扩充了一些习题。其中，有的选自马本堃等同志编的《热力学与统计物理学》一书；有的选自其他书籍或资料。凡属扩充题，均分别安排在《热力学·统计物理》书中相应各章的习题之后。

合肥工业大学应用物理系王必和同志审阅了题解的初稿，我系易佑民和胡凤鸣同志校阅了书稿，赵青生同志为本书出版做了许多工作，程锦荣和王富和同志给我们以支持帮助。安徽大学印刷厂的同志给我们大力支持。

在此，谨向汪志诚、王必和及其他有关同志一并表示感谢。

由于编者水平有限，经验不足，时间仓促，错误和不妥之处在所难免，敬请各位老师和读者们批评指正。

编　者

1982年3月于安徽大学

目　录

第一章　习　题

1.1　由物态方程$f(p,V,T)=0$证明

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p=-1$$

解：利用1.45题的（6）式，注意到$V\leftrightarrow x$，$p\leftrightarrow y$，$T\leftrightarrow z$的对应关系，即得证明。

1.2　试求理想气体的体胀系数α，压力系数β和压缩系数κ。

解：理想气体的物态方程为$pV=RT$，由此可算得

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\frac{R}{p},\qquad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\frac{R}{V},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T=-\frac{RT}{p^2},$$

再利用物态方程$pV=RT$，即得

$$\alpha=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\frac{1}{T},\quad \beta=\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\frac{1}{T},$$

$$\kappa=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T=\frac{1}{p}\quad。$$

1.3证明任何一种具有两个独立参量T，p的物质，其物态方程可由实验测得的体胀系数α及压缩系数κ，根据下述积分求得：

$$\ln V=\int(\alpha dT-\kappa dp)$$

如果，$\alpha=\frac{1}{T}$，　　$\kappa=\frac{1}{p}$，试求物态方程。

解：（i）$dV(T,p)=\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT+\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp$

两边除以V，得

$$\frac{dV}{V}=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT+\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp=\alpha dT-\kappa dp$$

积分后得　$\ln V=\int(\alpha dT-\kappa dp)$

（ii）如果　$\alpha=\frac{1}{T}$，$\kappa=\frac{1}{p}$，代入上式，得

$$\ln V=\int\left(\frac{dT}{T}-\frac{dp}{p}\right)=\ln T-\ln p+\ln C$$

$$\therefore\qquad pV=CT$$

与 1 mol理想气体的物态方程$pV=RT$相比较，可知所要求的物态方程即为理想气体物态方程。

1.4简单固体和液体的体胀系数α和压缩系数κ的数值都很小。在一定的温度范围内，可以把α和κ看作常数。试证明简单固体和液体的物态方程可以表为

$$v(T,\ p)=v_0(T_0,0)[1+\alpha(T-T_0)-\kappa p]$$

解：当选T，p为独立变量时，$v=v(T,\ p)$，由上题结果知道

$$\frac{dv}{v}=\alpha dT-\kappa dp$$

由题知，α和κ可看作常数，故从状态(T_0,p_0,v_0)准静态过渡到状态$(T,\ p,\ v)$时，经积分得，

$$\ln v\Big|_{v_0}^{v}=\int_{(T_0,p_0)}^{(T,\ p)}(\alpha dT-\kappa dp)=\int_{T_0}^{T}\alpha dT-\int_{p_0}^{p}\kappa dp$$

由此，即得

$$v(T,p)=v_0(T_0,p_0)\,e^{\alpha(T-T_0)-\kappa(p-p_0)}$$

$$\approx v_0(T_0,p_0)\left[1+\alpha(T-T_0)-\kappa(p-p_0)\right] \quad (1)$$

（∵α和κ值很小）当选$p_0=0$时，即为所求。

1.5 在0°C和1 atm下，测得一铜块的体胀系数和压缩系数为$\alpha=4.85\times10^{-5}K^{-1}$，$\kappa=7.8\times10^{-7}atm^{-1}$。$\alpha$和$\kappa$可近似看作常数。今使铜块加热至10°C，问（a）压力要增加多少大气压才能使铜块的体积维持不变？（b）若压力增加100atm，铜块的体积改变多少？

解：(a)由$dp=\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV+\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT$知，当$dV=0$时，有

$$dp=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT=p\beta dT=\frac{\alpha}{\kappa}dT$$

故 $$p_2-p_1=\frac{\alpha}{\kappa}\int_{T_1}^{T_2}dT=\frac{\alpha}{\kappa}(T_2-T_1)$$

即 $$\Delta p=p_2-p_1=\frac{\alpha}{\kappa}(T_2-T)=\frac{4.85\times10^{-5}}{7.8\times10^{-7}}\times10$$

$$=622atm。$$

利用（1.4）题的结果，即(1)式，有

$$V_2(T_2,p_2)=V_1(T_1,p_1)\left[1+\alpha(T_2-T_1)-\kappa(p_2-p_1)\right]$$

即得 $$\frac{\Delta V}{V_1}=\frac{V_2-V_1}{V_1}\doteq\alpha(T_2-T_1)-\kappa(p_2-p_1)$$

$$=4.85\times10^{-5}\times10-7.8\times10^{-7}\times100$$

$$=4.07\times10^{-4},$$

可见，体积增加万分之4.07。

1.6 1 mol理想气体，在27°C的恒温下体积发生膨胀，由20大气压准静态地变到1大气压。求气体所作的功和所吸

的热。

解：(a)在恒温准静态膨胀过程中，理想气体所作的功为

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT\ln\frac{V_2}{V_1},$$

因为 $p_1V_1 = RT$，$p_2V_2 = RT$，故有$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$，

$\therefore$ $W' = RT\ln\frac{p_1}{p_2} = 8.31\times 300\ln 20 = 7.46\times 10^3 J\cdot mol^{-1}$。

(b)理想气体在恒温膨胀过程中，内能不变，根据热力学第一定律，求得

$$Q = W' = 7.46\times 10^3 J\cdot mol^{-1}。$$

1.7 1 mol范氏气体，在准静态等温过程中体积由V_1膨胀至V_2。求气体在过程中所作的功。

解：范氏气体的物态方程为

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

故气体对外界作功

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2}\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)dV$$

$$= RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V-b} - a\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^2}$$

$$= RT\ln\frac{V_2-b}{V_1-b} + \left(\frac{a}{V_2} - \frac{a}{V_1}\right)。$$

1.8 在25°C下，压力在0至1000atm之间，测得水的体积为：

$$V = 18.066 - 0.715\times 10^{-3}p + 0.046\times 10^{-6}p^2 cm^3\cdot mol^{-1}$$

如果保持温度不变，将1 mol的水从1 atm加压至1000atm

求外界所作的功

解： 写出 $V = a + bp + cp^2$，

则 $dV = (b + 2cp)dp$

$$= (-0.715\times10^{-3} + 2\times0.046\times10^{-6}p)dp$$

所要求的功

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} pdV = -\int_1^{1000} p(b + 2cp)dp$$

$$= -\frac{1}{2}\left(bp^2 + \frac{2}{3}cp^3\right)\Big|_1^{1000}$$

$$\doteq \left[\frac{1}{2}(-0.715\times10^{-3}\times(10^3)^2 + \frac{2}{3}\times0.046\times10^{-6}\times(10^3)^3\right]$$

$$= 326.83\text{atm}\cdot\text{cm}^3/\text{mol} = 33.1\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$$

$$(1\,\text{atm}\cdot\text{cm}^3 = 0.101324\text{J})$$

1.9 在0°C和1 atm下，空气的密度为$0.00129\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$。空气的定压比热$C_p = 0.238\text{cal}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$，$\gamma = 1.41$。今有$27\text{m}^3$的空气，

(i)若维持体积不变，将空气由0°C加热至20°C，试计算所需的热量。

(ii)若维持压力不变，将空气由0°C加热至20°C，试计算所需的热量。

(iii)若容器有裂缝，外界压力为1 atm，试计算使空气由0°C缓慢地加热至20°C所需的热量。

解： 这是定容加热过程，定容热容量可以从定压热容量算出，

$$C_V = \frac{C_p}{\gamma} = 0.238/1.41 = 0.169\text{cal/g}\cdot\text{deg}。$$

27m^3的空气，其质量可由它的密度算得：

$$M = 0.00129 \times 27 \times 10^6 = 3.48 \times 10^4 \mathrm{g}$$

考虑到热容量为常数，使温度由 0 °C升至 20°C 所需的热量

$$Q_V = \int_{T_1}^{T_2} MC_V dT = MC_V (T_2 - T_1)$$

$$= 3.48 \times 10^4 \times 0.169 \times 20$$

即得 $$Q_V = 1.176 \times 10^5 \mathrm{cal}$$

(ii)在定压加热过程中，

$$Q_p = MC_p (T_2 - T_1) = 3.48 \times 10^4 \times 0.238 \times 20$$

$$= 1.658 \times 10^5 \mathrm{cal}.$$

(iii)因为加热过程是缓慢的，所以假定容器内的压力保持 1 atm。本问题，空气的质量是改变的。在保持压力p和容积V不变的条件下加热时，在温度T下的质量M（T）可由物态方程$pV = \frac{M}{\mu}RT$（其中μ为空气的平均分子量）确定之。设T_1时，容器内的空气质量之为M_1，则由

$pV = \frac{M_1(T)}{\mu} RT_1$算得 $M(T) = M_1 \frac{T_1}{T}$，所以

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} M(T) C_p dT = M_1 T_1 C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

$$= M_1 T_1 C_p \ln \frac{T_2}{T_1} \qquad (1)$$

将$T_1 = 273\mathrm{K}$，$T_2 = 293\mathrm{K}$，$M_1 C_p = 8.29 \times 10^3 \mathrm{cal/K}$代入(1)式，即得

$$Q = 8.29 \times 10^3 \times 273 \ln \frac{193}{273} = 1.60 \times 10^5 \mathrm{cal}.$$

1.10 抽为真空的小匣带有活门，打开活门让气体冲入。当压力达到外界压力p_0时将活门关上。试证明，小匣内的空气在没有与外界交换热量之前，它的内能U与原来在

大气中的内能U_0之差为$U-U_0=p_0V_0$，其中V_0是它原来在大气中的体积。若气体是理想气体，求它的温度与体积。

解：(a)求解这个问题，首先要明确我们所讨论的热力学系统是什么。为此，可以设想：使一个装有不漏空气的无摩擦活塞之绝热小气缸与绝热小匣相连。假定气缸所容空气的量，恰好为活门打开时进入该小匣之空气的量。这样，原来在小气缸中，后来处于小匣内的那一部分空气（为了方便，设恰为1 mol空气），就是我们所讨论的热力学系统。系统的初态（V_0，T_0，p_0；U_0）和终态（$V,T,p_0;U$）如图1.10所示：

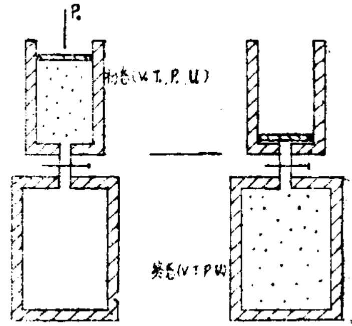

图1.10

当打开活门，有少量空气进入原来抽为真空的小匣，小气缸内的气压就降为比大气压力小一点，外界空气就迫使活塞向匣内推进。根据热力学第一定律，在此绝热过程中，有

$$dU=đW=-p_0dV$$

积分之，$$U-U_0=-\int_{V_0}^{0}p_0dV=p_0\int_0^{V_0}dV=p_0V_0 \quad (1)$$

(b)由$U-U_0=p_0V_0$，得到$C_V(T-T_0)=RT_0=(C_p-C_V)T_0$

即 $$C_VT-C_VT_0=C_pT_0-C_VT_0$$

从上式，得 $$T=\frac{C_p}{C_V}T_0=\gamma T_0 \quad (2)$$

(c)由于初态和终态的压力相等，故有

$$p_0V_0=RT_0 \quad 和 \quad p_0V=RT$$

从以上两式，得到 $$\frac{V}{V_0}=\frac{T}{T_0} \quad (3)$$

由(2)式知，(3)式可化为

$$V = V_0 \frac{T}{T_0} = \gamma V_0 \qquad (4)$$

1.11 满足$pV^n = C$的过程称为多方过程，其中常数n名为多方指数。试证，理想气体在多方过程中的热容量C_n为

$$C_n = \frac{n-\gamma}{n-1} C_V$$

解：根据热力学第一定律，有

$$C_n dT = C_V dT + p dV \qquad (1)$$

利用理想气体的物态方程，可将$pV^n = C$化为

$$TV^{n-1} = C_1$$

将上式微分，得

$$dV = -\frac{VdT}{(n-1)T} = -\frac{RdT}{(n-1)p} \qquad (2)$$

将(2)代入(1)式，得

$$C_n = C_V - \frac{R}{n-1}，由于R = C_p - C_V = (\gamma - 1) C_V，$$

即得

$$C_n = C_V - \frac{\gamma - 1}{n-1} C_V = \frac{n-\gamma}{n-1} C_V.$$

1.12 试证明，在某一过程中理想气体的热容量C_n如果为常数，这个过程一定是多方过程，多方过程指数$n = \frac{C_n - C_p}{C_n - C_V}$假设气体的定压热容量和定容热容量是常数。

解：根据热力学第一定律

$$C_n dT = C_V dT + p dV$$

由$pV = RT$，有$pdV + Vdp = RdT$，将dT代入上式，得

$$\left(\frac{C_n - C_V}{R} - 1\right) p dV + \frac{C_n - C_V}{R} V dp = 0$$

两边除以pV，再经整理，得到

$$n\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0，经积分即得 \quad pV^n = C.$$

1.13 声波在气体中的传播速度为

$$a=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

假设气体是理想气体,其定压和定容热容量是常数。试证明,气体单位质量的内能u和焓h可由声速及γ给出:

$$u=\frac{a^2}{\gamma(\gamma+1)}+\text{常数},\qquad h=\frac{a^2}{\gamma-1}+\text{常数}$$

解: 理想气体在准静态的绝热过程中,

$pV^{\gamma}=C$,经微分,得 $\frac{dp}{p}+\gamma\frac{dV}{V}=0$,从而得到

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s=-\gamma\frac{p}{V}\tag{1}$$

因为 $\rho=\frac{M}{V}$,所以

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_s=\left(-\gamma\frac{p}{V}\right)\left(-\frac{M}{\rho^2}\right)$$

$$=\gamma\frac{p}{V}\frac{MV^2}{M^2}=\gamma\frac{pV}{M}=\gamma\frac{RT}{M}$$

$$\therefore\quad =\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},\qquad \text{故}\quad T=\frac{Ma^2}{\gamma R}\tag{2}$$

对于理想气体,内能和焓分别为

$$U=C_VT+\text{常数},\qquad H=C_pT+\text{常数}\tag{3}$$

把(2)中的T代入(3)式,并注意到 $C_p-C_V=R$ 和 $C_p/C_V=\gamma$,得单位质量的内能u和焓h为

$$u=\frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)}+\text{常数},\quad h=\frac{a^2}{\gamma-1}+\text{常数}。$$

1.14 大气温度随高度降低的主要原因是在运流层中的低处与高处之间空气不断发生对流。由于气压随高度而降低,空气上升时膨胀,下降时收缩。空气的导热率很小,这

膨胀和收缩的过程可以认为是绝热过程。试计算大气温度随高度的变化率$\frac{dT}{dz}$

提示：根据流体静力学可导出气压随高度的变化率

$$\frac{d\rho(z)}{dz}=-\rho(z)g$$

再利用理想气体的绝热方程求出

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s=\frac{\gamma-1}{\gamma}\ \frac{T(z)}{p(z)}$$

从而可的求出$\frac{dT(z)}{dz}$。

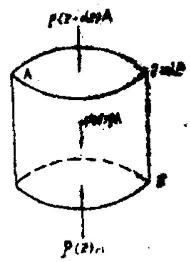

图1.14

解：（ i ）首先讨论在热平衡下，大气压如何随高度而改变。要注意到热平衡条件中包括力平衡条件，考虑在高 度 z 和 z+dz 之间，其截面积为A的空气园柱体（如右图所示），作用在它的上截面和下截面的力分别为

$$-p(z+dz)A \quad 和 \quad p(z)A$$

作用在园柱内空气的重力为

$$-\rho(z)gAdz$$

由上述三个力的平衡条件

$$-p(z+dz)A+p(z)A-\rho(z)gAdZ=0$$

得到

$$\frac{dp(z)}{dz}=-\rho(z)g \tag{1}$$

(ii)把(1)式的$\rho(z)$变换到$p(z)$：

如果空气的平均分子量为m，则1 mol空气的体积为$\frac{m}{\rho(z)}$，则可把理想气体的物态方程，$P=\frac{RT}{V}$表为

$$p(z)=\frac{RT(z)}{m}\rho(z),\qquad 或\quad \rho(z)=\frac{m}{RT(z)}p(z)$$

于是(1)式变为

$$\frac{dp(z)}{dz}=-\frac{mg}{RT(z)}\,p(z) \tag{2}$$

(iii)现考虑理想气体的准静态绝热过程：

从 $$\frac{dT(z)}{dz}=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\frac{dp(z)}{dz} \tag{3}$$

知，下面的任务是要求关于$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s$的表式。

由热力学第一定律及物态方程，在绝热过程中

$$đQ=C_VdT+pdV=C_VdT+RT\frac{dV}{V}=0 \tag{4}$$

由$pV=RT$，有 $pdV+Vdp=RdT$，两边除的$pV=RT$，得

$$\frac{dV}{V}=\frac{dT}{T}-\frac{dp}{p} \tag{5}$$

将(5)式代入(4)式，注意到$R=C_p-C_V$和$\gamma=\frac{C_p}{C_V}$则得

$$\frac{dT}{T}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{dp}{p}$$

或 $$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T}{p} \tag{6}$$

把(2)或和(6)式代入(3)式，得

$$\frac{dT(z)}{dz}=-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{mg}{R}\right)。 \tag{7}$$

式中$\gamma=1.41$，$m=29g/mol$，$g=980cm/sec^2$所以

$$(\gamma-1)mg/\gamma R=0.41\times29\times980/(1.41\times8.3\times10^7)$$
$$=1.00\times10^{-4}deg/cm=10.0deg/km$$

即每增高1千米，温度约降低$10^\circ C$。

1.15 图1—15所示的循环为奥托(Otto)循环。试证明，理想气体在奥托循环中的效率为

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

假设C_p和C_V是常数。

解：奥托循环是等容加热循环。在等容过程2→3中吸收热量$Q_1 = C_V(T_3 - T_2)$；在等容过程4→1中放出热量$Q_2 = C_V(T_4 - T_1)$，所以循环的效率为 $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$

$$= \frac{C_V(T_3 - T_2) - C_V(T_4 - T_1)}{C_V(T_3 - T_2)}$$

即
$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \tag{1}$$

因1→2和3→4是准静态的绝热过程，因此，

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \quad 和 \quad \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$$

而$V_2 = V_3$和$V_1 = V_4$，所以上面两式的右边是相等的，因此

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} \quad 或 \quad T_4 = \frac{T_1 T_3}{T_2} \tag{2}$$

把(2)代入(1)式，得

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad 或 \quad \eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

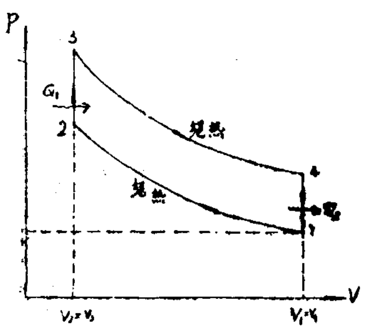

图1.15

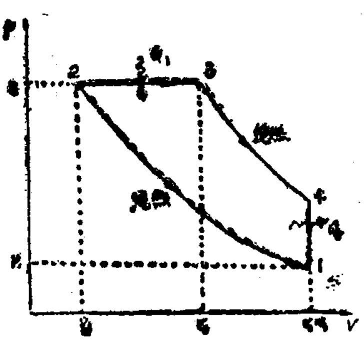

图1.16

1.16 图1—16所示的循环称狄塞尔（Diesel）循环。试证明，理想气体在狄塞尔循环中的效率为

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma} - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}}{\left(\frac{V_3}{V_1}\right) - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

假设 C_p和C_V是常数。

解：狄塞尔循环为等压加热循环，在等压过程 $2 \to 3$ 中，吸收热量$Q_1 = C_p(T_3 - T_2)$在等容过程$4 \to 1$中，放出热量$Q_2 = C_V(T_4 - T_1)$，所以该循环的效率

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{C_p(T_3 - T_2) - C_V(T_4 - T_1)}{C_p(T_3 - T_2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \qquad (1)$$

因$2 \to 3$为等压过程，所以

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} \qquad (2)$$

因$1 \to 2$和$3 — 4$为绝热过程，所以

$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$和$T_4V_1^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1}$（其中$V_1 = V_4$）

由上两式，得到，$T_4 - T_1 = T_3\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} - T_2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ (3)

将(3)式代入(1)式，并考虑到(2)式，经化简之后，则得

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma} - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}}{\left(\frac{V_3}{V_1}\right) - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)}。$$

1.17 假设理想气体的C_p和C_V之比γ是温度的函数，试求在准静态绝热过程中T和V的关系。这个关系式中要用到一个函数F（T），其表达式为

$$\ln F(T)=\int\frac{dT}{(\gamma-1)T}$$

解： 在准静态绝热过程中，$C_V dT+pdV=0$，因$pV=RT$，故得

$$C_V dT+RT\frac{dV}{V}=0\text{，或}\frac{C_V}{R}\frac{dT}{T}+\frac{dV}{V}=0$$

或 $$\frac{1}{\gamma-1}\frac{dT}{T}+\frac{dV}{V}=0\ \left(\because\frac{R}{C_V}=\gamma-1\right)\qquad(1)$$

上式积分后，得

$$\int\frac{dT}{(\gamma-1)T}+\ln V=\ln C\qquad(2)$$

即 $\ln F(T)+\ln V=\ln C$或$F(T)V=C$

讨论：当γ为常数时，则(1)式经积分后，得

$$\ln T+\ln V^{\gamma-1}=\ln C'$$

即有 $TV^{\gamma-1}=C'$。

1.18 利用上题结果证明，当γ为温度的函数时，一个理想气体的卡诺循环的效率仍为$\eta=1-\dfrac{T_2}{T_1}$。

解： 如图所示，Ⅰ→Ⅱ：

吸热 $Q_1=RT_1\ln\dfrac{V_2}{V_1}$

Ⅲ→Ⅳ：放热 $Q_2=RT_2\ln\dfrac{V_3}{V_4}$

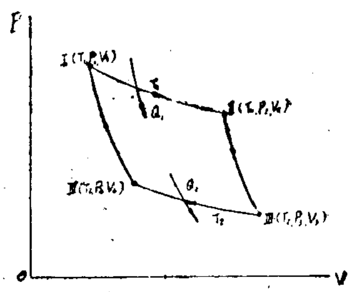

图 1.18

在整个循环过程中，对外所作的功为

$$W'=Q_1-Q_2$$

$$=RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}-RT_2\ln\frac{V_3}{V_4}$$

对于状态Ⅰ和Ⅳ有下面关系