应用数学与计算（修订版）

業出版社

应用数学与计算
（修订版）

车燕　戈西元　邢春峰　编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL: http://www.phei.com.cn

应用数学与计算(修订版)

车　燕　戈西元　邢春峰　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本教材是在1998年出版的《应用数学与计算》的基础上修订的，仍保留了《应用数学与计算》的风格和特色。主要内容包括微积分、级数与逼近、常微分方程、矩阵及其应用、概率论与数理统计。其特点是：从实例引入问题，以问题为引线，介绍数学概念及其实际意义、数学的思想方法及其实际用途；用大量的实例反映数学的应用；强调基本数值计算的一般方法，以图形直观地讲解概念；采用模块化设计，以便使书中内容适合不同专业选用；数值计算方法穿插于各相应内容之中。

本教材是为三教（高职、高专、成人高等教育）统筹的学生编写的，也可作为对数学及其应用感兴趣的读者的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学与计算（修订版）/车燕，戈西元，邢春峰编著. - 北京：电子工业出版社，2000.8
ISBN 7-5053-5866-9

Ⅰ.应… Ⅱ.①车…②戈…③邢… Ⅲ.计算数学 Ⅳ.O24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 40856 号

书　　名：应用数学与计算（修订版）
编 著 者：车　燕　戈西元　邢春峰
责任编辑：张孟玮
特约编辑：朱强国
排版制作：电子工业出版社计算机排版室监制
印 刷 者：北京民族印刷厂
装 订 者：三河市双峰装订厂
出版发行：电子工业出版社　URL：http://www.phei.com.cn
北京市海淀区万寿路173信箱　邮编 100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×1092　1/16　印张：16　字数：410千字
版　　次：2000年8月第1版　2000年8月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-5053-5866-9 / G·526
印　　数：5000册　定价：22.00元

原 版 前 言

数学一直被有些人认为“没有用”，但又是从小学到大学一直开设的一门必修课程，如何改变数学在人们心目中的这种地位是数学教学改革的重点内容之一。本书若能为此给人们一点启示，将使我们编者感到欣慰。

本书强调从实例引入问题，以问题为引线，进行数学的应用、数学的概念及其实际意义、定理及其实际内涵、数学的思想方法及其实际用途等方面的介绍，用大量的实例反映数学的应用，并逐步引入数学建模的思想；强调基本数值计算方法，以图形直观地讲解概念，并尽量以数学定理思想方法的直观解释代替数学证明；以适量的基本计算例题与练习题为依托，培养学生的基本演算能力；纳入了一些实用的计算思想及其实现过程，如分割枚举、计算机模拟、最优化等。在内容编排上尽可能相互独立，以便使用时可以筛选。

本书内容包括函数、曲面与曲线方程、极限与连续、微分学及其应用、积分学及其应用、级数与逼近、矩阵及其应用、常微分方程、傅氏级数与积分变换、统计与随机模拟基础。计算方法的基本内容穿插于各部分内容之中。

本书是作者在两年高职的数学教学基础上编写的，与之配套的还有《应用教学与计算实训》教材。本书可作为高等职业教育《应用教学与计算》课程的教材，也可作为大专相应课程的教材。我们建议在使用本书时，最好能与《应用数学与计算实训》配套使用。

本书第 1 章至第 3 章由张翼、杨明燕编写，第 4 章由王信峰编写，第 5 章由魏荣编写，第 6 章由戈西元编写，第 7 章由高进编写，第 8 章由车燕编写，第 9 章由钱瑛编写，第 10 章由王信峰编写。

本书由北京联合大学王友仁副教授主审；任开隆教授也仔细审阅了本书，并提出了不少改进意见；朱玉娥副教授也为本书提出了不少改进意见，并为本书的出版作了大量事务性工作，在此，我们向他们表示衷心感谢；同时，我们还特别感谢北京联合大学高林副校长、电子工业出版社在本书编写与出版过程中的积极支持与帮助。

限于编者的水平，不妥之处在所难免，希望广大读者批评指正。

编著者

1998.5.2

修订版前言

本教材的原版于1998年出版，我们和兄弟院校经过两年的教学实践，积累了一些经验，有关专家、教师和广大读者提出了许多很好的意见和建议，在此基础上，修订成本版教材。

这次修订，仍保留了原版的风格和特色，强调从实例引入问题，以问题为引线，力图将概念写得通俗易懂，做到数学源于实际并且用于现实生活；强调理论教学与实训课教学之间的配合。

我们修改了原版中存在的不当之处，在内容安排、例题与习题选择等方面均作了较大调整。首先，删除了对高职高专成人高等教育要求过高的部分内容，如曲线积分、特征值与特征向量、二次型、积分变换、方差分析、主成份分析、随机模拟基础等内容；增加了无穷大与无穷小、罗必达法则，在概率论与数理统计中增加了实验数据的处理等内容；在实例引入时，也注意调整了实例的难易程度与篇幅，实例引入尽力做到简明扼要、通俗易懂；内容的编排顺序也作了适当调整，使教材的内容结构尽可能趋于合理。其次，本次修订也注意了例题的筛选，例题选择以足够说明问题、简单易懂为原则，在不增加篇幅的情况下，兼顾全面解释相关理论与方法。最后，在选配习题时，以适量、有启发性、有广泛应用性为原则。这次修订，若能使使用本教材的学生对数学的应用有更多了解，从在数学的学习与应用中产生学习数学的浓厚兴趣；并能使使用本教材的教师更感到得心应手，将是我们最大的宽慰。

本书第1章、第2章和第8章由戈西元修订，第3章、第4章和第9章由邢春峰修订，第5章、第6章和第7章由车燕修订。

北京联合大学任开隆教授和钱瑛副教授认真审阅了修订稿，并提出了不少改进意见；王信峰副教授在修订过程中给予了大力支持与帮助，在此，我们向他们表示衷心感谢。此外，我们还向关心本书和对本书原版提出宝贵意见的同志们表示深切谢意。

限于编者水平，加之时间也比较仓促，书中一定存在不妥之处，希望广大读者提出批评和指正。

编著者

2000年3月

目　录

第1章 数学基础

1.1 概述

数学作为众学科的基础是众所周知的。首先，它是自然科学不可缺少的工具之一，如工程管理、自动控制、生物技术等。其次，它已渗透入科学技术应用的各个领域，如CT技术、药理、理疗等。另外数学在社会交通、人口理论、战略投资乃至于记忆学等都得到了广泛的应用。作为这门课的引言，以下从一则广告谈起。

1991年1月1日某城市晚报上的一则广告。

> **用薪金，买高品质住房**
>
> *对于大多数工薪阶层的人士来说，想买房，简直是天方夜谭，现在有这样一套房，自备款只需七万元人民币，其余由银行贷款，分五年还清，相当于每月只需付1200元人民币，那么，这对于您还有什么问题呢？*

任何人看了这则广告都会产生许多疑问，且不谈广告中有没有谈住房面积、设施等重要情况，也许人们更关心以下问题：

(1) 如果一次付款买这栋房子要多少钱呢？

(2) 当前的银行贷款利息是多少？

(3) 为什么每月要付1200元呢？月还金额是怎样算出来的？

(4) 更进一步，在(1)、(2)已知的情况下，如何针对第(3)条作出买房决策？

要想深入了解所提出的问题，除了认真分析，还应当仔细进行计算。

1. 明确变量、参量

需要借多少钱，用 A_0 记(它指：房价－备款)，单位为元；

银行贷款月利率(贷款通常按复利计算)，用 R 记，单位为：元/月；

每月还钱数，用 x 记，单位为元；

借款期限，用 N 记，单位为月。

2. 归纳变量关系

用 A_k 记为第 k 个月所欠款数，则

$A_1=(1+R)A_0-x$

$A_2=(1+R)A_1-x=(1+R)[(1+R)A_0-x]-x=(1+R)^2A_0-x[(1+R)+1]$

$A_3=(1+R)A_2-x=(1+R)[(1+R)^2A_0-(1+R)x-x]-x=(1+R)^3A_0-x[(1+R)^2+$

$(1+R)+1]$

$\vdots$

由数学归纳法易知：

$$
\begin{aligned}
A_k &= (1+R)^k A_0 - x[(1+R)^{k-1}+(1+R)^{k-2}+\cdots+(1+R)+1] \\
&= (1+R)^k A_0 - \frac{x}{R}[(1+R)^k-1] \qquad (1.1) \\
&= \left(A_0-\frac{x}{R}\right)(1+R)^k+\frac{x}{R}
\end{aligned}
$$

3. 针对本问题的求解

由广告内容易知，本问题的 $N=5$(年)$=60$(个月)，$x=1200$(元)，$A_N=A_{60}=0$，A_0与 R 未知，代入(1.1)式可得

$$0=A_0(1+R)^{60}-\frac{1200}{R}[(1+R)^{60}-1]$$

$$A_0=\frac{1200[(1+R)^{60}-1]}{R(1+R)^{60}}$$

若已知银行的贷款利率 R，即可计算出 A_0，从而可决定是否去银行借款。

若 $R=0.01$，则 $A_0\approx 53946$(元)，当该房地产公司说一次性付款的房价大于

$$70000+53946=123946(\text{元})$$

此时，应去银行借款。

如果某高校一对青年夫妇为买房要向银行贷款 60000 元，月利率为 0.01，贷款期限为 25 年，即 300 个月，这对夫妇希望知道每月要还多少钱，25 年就可还清？假设这对夫妇每月可节余 900 元，是否可以去买房？

本问题就是已知 $A_0=60000$，$R=0.01$，$k=300$，$A_{300}=0$，求 x，代入(1.1)式得

$$0=\left(60000-\frac{x}{0.01}\right)(1+0.01)^{300}+\frac{x}{0.01}$$

解出 x 可得 $x\approx 632$ 元，这说明这对夫妇有能力买房。

如果恰在决定买房前，这对夫妇又看到某借贷公司的一则广告："若借款 60000 元，22 年还清，只要：(i)每半个月还 316 元；(ii)由于文书工作多了的关系要你预付三个月的款，即 $316\times 6=1896$ 元"。这对夫妇想：提前三年还清当然是好事，每半个月还 316 元，一个月正好是 632 元，只不过多跑一趟去交款罢了；要付 1896 元，当然使人不高兴，但提前三年还清省下的钱为 $632\times 3\times 12=22752$ 元；这家公司为什么这么做？

先分别对(i)、(ii)进行分析，看能否缩短归还期限。

分析(i)，此时 $A_0=60000$ 不变，$x=316$，月利率变为半月利率可粗略地认为正好是原 R 的一半，即 $R=0.01\times 2=0.005$，于是求 $A_k=0$ 时的 k，有

$$0=\left(A_0-\frac{x}{R}\right)(1+R)^k+\frac{x}{R}$$

解 k 可得 $k=\dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{x-A_0R}\right)}{\ln(1+R)}\approx 598$(半个月)$=299$(个月)，这说明只能提前一个月还清，这是不可能的。

再分析(ii)。这时 $A_0=60000-1896=58104$(元)，即你的借款是 58104 元，而不是 60000

元，仍按问题 1 中银行的贷款条件计算，即令 $R=0.01$，$x=632$，求 $A_k=0$ 时的 k，则得 $k=\dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{x-A_0R}\right)}{\ln(1+R)}=\dfrac{\ln\left(\dfrac{632}{632-58104\times 0.01}\right)}{\ln(1+0.01)}\approx 253.05$(月)$=21.09$ 年，即实际上提前将近 4 年还清。这说明该借贷公司只要去同样的银行借款，即使半个月收来的钱不动再过半个月合在一起去交还给银行，他还可以坐收第 22 年开始的近 7000 元，更何况他还可以去做短期投资(不超过半个月)去赚取额外的钱。

从上面的论述可以看到，数学在各个领域里正发挥着重要的作用。所以只有掌握了一定的数学知识，才能在实际生活和科学实践中，研究问题，解决问题。

1.2 点与向量

1.2.1 空间直角坐标系

在中学我们学习过平面直角坐标系。它由平面内两条互相垂直并在原点相交的数轴组成，数轴称为**坐标轴**，其交点称为平面直角坐标系的原点。一般把横坐标轴记为 x 轴，纵坐标轴记为 y 轴。过平面上的点 P 作两条直线分别垂直于 x 轴、y 轴，顺次与坐标轴的交点为 P_x 和 P_y，点 P_x 和 P_y 在 x、y 轴上分别对应的实数数值 x、y 称为点 P 的横坐标、纵坐标。如图 1-1 所示，平面上点 P 与数对 (x,y) 构成了一一对应关系。因此，我们称 (x,y) 为点 P 的坐标。

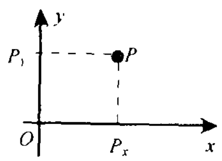

图 1-1

同样，由空间中三条交于原点且相互垂直的数轴所组成的三条坐标轴称为空间直角坐标系，其中三个相互垂直的坐标轴分别称为横轴(亦叫 x 轴)、纵轴(亦叫 y 轴)与竖轴(亦叫 z 轴)，坐标轴的方向按**右手螺旋法则**(即右手四指并拢，拇指与四指的方向垂直伸直，四指从指向 x 轴正方向旋转 90°指向 y 轴正方向，此时拇指指向 z 轴正方向)确定。三坐标轴的交点称为坐标系的原点，常记为 O。每两轴所在的平面称为坐标平面，其中 x 轴和 y 轴所在平面记为 xOy 平面，y 轴和 z 轴所在平面记为 yOz 平面，z 轴和 x 轴所在平面记为 zOx 平面。三个坐标面将空间分成了八个部分，每一部分称为一个卦限，如图 1-2 所示，在 xOy 平面上方的四个部分分别称为第 I、II、III、IV 卦限，在 xOy 面下方的四部分分别称为第 V、VI、VII、VIII 卦限。

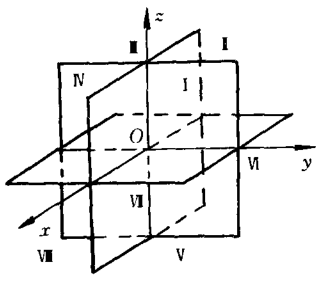

图 1-2

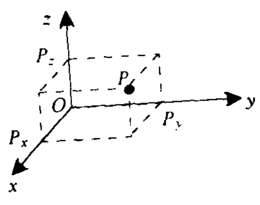

图 1-3

取定空间直角坐标系后，设 P 为空间中一点，过点 P 作三个平面分别平行于 yOz、zOx 和 xOy 坐标平面，顺次与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点为 P_x、P_y 和 P_z，它们分别在三个坐标轴上对应的数值 x、y、z 称为点 P 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标，这样点 P 在空间中的位置就确定了。反

之，给定有序数组(x,y,z)，就可以分别在x、y、z坐标轴上定出三个点P_x、P_y和P_z，以三个线段OP_x、OP_y、OP_z为三条垂直的棱作一个长方体，这个长方体上与原点相对的顶点就是点P，从而空间直角坐标系中的点就由有序数组(x,y,z)唯一确定。因此空间坐标系中点P与三元有序数组间构成了一一对应关系。如图 1-3 所示。

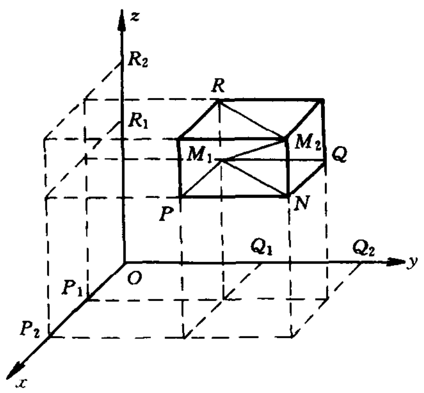

图 1-4

空间中点P的坐标记作(x,y,z)。其中x称为点P的横坐标，y称为点P的纵坐标，z称为点P的竖坐标。点P_x、P_y和P_z分别为点P在x、y和z轴上的投影。

例 1.1 求空间中两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$之间的距离。

解 过M_1、M_2各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以M_1M_2为对角线的长方体(如图 1-4)。由于$\triangle M_1NM_2$为直角三角形，$\angle M_1NM_2$为直角，所以$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$又$\triangle M_1PN$也是直角三角形，且$|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$，

所以$|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2$

由于$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$，$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$，$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$，

所以

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.2}$$

(1.2)式就是空间两点间的距离公式。

1.2.2 向量的概念

1. 向量的概念

在中学物理中我们曾经学习过位移、力、速度、加速度、电场等，尽管它们的物理意义不同，但它们都是既有大小又有方向的量，数学中把这一类量统称为**向量**。

向量往往用一条有方向的线段，即有向线段来表示。如图 1-5 所示，有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的长度表示向量的大小。向量通常用黑体的小写字母(有时也用一个上面加箭头的小写字母)表示，如$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$或$\vec{a}$,$\vec{b}$。以A为始点，B为终点的有向线段所表示的向量也记为$\overrightarrow{AB}$等等。

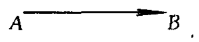

图 1-5

向量的大小也叫**向量的长度**或**模**。向量$\overrightarrow{AB}$的模记作$|\overrightarrow{AB}|$，向量$\boldsymbol{a}$的模记作$|\boldsymbol{a}|$，模为 1 的向量称为**单位向量**，模为 0 的向量称为零向量，记作$\boldsymbol{O}$。显然，零向量的始点和终点重合，所以它的方向任意。

在实际问题中有些向量与其始点有关，有些向量与其始点无关。由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以在这里我们只研究与始点位置无关的向量，并称这种向量为**自由向量**(简称向量)。这样规定以后，如果两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的模相等且方向相同，我们就说向量$\boldsymbol{a}$和向量$\boldsymbol{b}$是相等的，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。当向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的大小相等而方向相反时称向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$互为负向量，

记作 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$，如图 1-6 所示。另外两个向量的长度可以比较大小，但是方向就不能比较大小了，所以"大于"和"小于"的概念对于向量无意义，例如 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 没有意义，但 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 有意义。

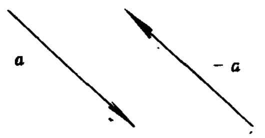

图 1-6

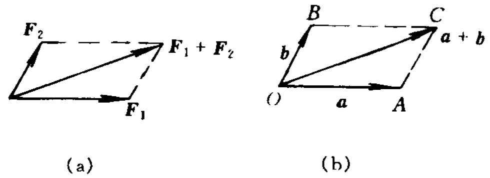

图 1-7

2. 向量的运算

(1) 向量的加法

物理上两个力的合力可以如图 1-7(a)所示按平行四边形规则计算。数学上向量的加法同样按平行四边形规则计算。规定两个向量的加法如下：设，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为边做一平行四边形 $BOAC$，取对角线 OC 作为一向量，记作 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 1-7(b)，通常称此法则为向量加法的平行四边形法则。

如果两个向量在同一直线上，那么规定它们的和向量是这样一个向量：当两个向量方向相同时，和向量的方向与原来两个向量的方向相同，其模等于两个向量模的和；当两个向量方向相反时，和向量的方向与较长的向量的方向相同，而模等于两个向量的模的差。

由于平行四边形的对边平行且相等，所以从图 1-7(b)可以看出：作向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，以 $\overrightarrow{OA}$ 的终点为始点作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接 $\overrightarrow{OC}$ 就得到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，这一方法叫向量加法的三角形法则。

向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律：　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$。

由图 1-8，图 1-9 很容易得出上述结果。

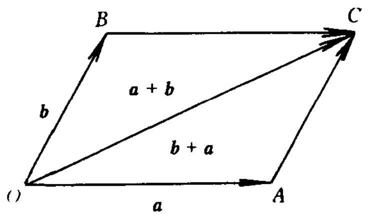

图 1-8

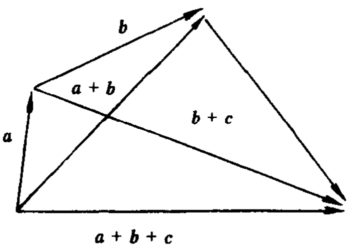

图 1-9

由向量加法的交换律与结合律，得任意多个向量加法的法则如下：以前一向量的终点作为次一向量的始点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$；再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作向量，这个向量即为所求的和向量。

注意：上面的加法运算是由几何作图完成的，所以也叫作几何加法。

(2) 向量的减法

向量的减法是向量加法的逆运算。根据两个向量的加法，规定两个向量的减法为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

具体做法如图 1-10 所示。由三角形法则可以看出，要从 $\boldsymbol{a}$ 减去 $\boldsymbol{b}$，只要把与 $\boldsymbol{b}$ 长度相同而方向相反的向量加到向量 $\boldsymbol{a}$ 上去，即得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

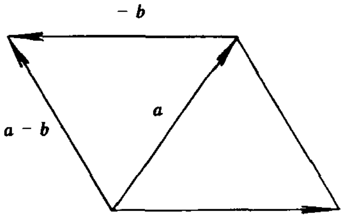

图 1-10

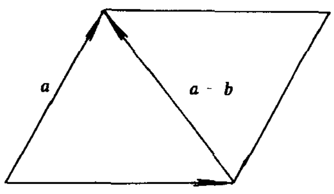

图 1-11

如果将向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 移到共同始点，再从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点向向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点引一向量也可得向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，见图 1-11。

(3) 数乘向量

物理学中将力 $\boldsymbol{F}$ 沿其方向扩大两倍，则扩大后的力的大小是原来力的大小的两倍，而方向不变。数学上向量 $\boldsymbol{a}$ 沿其方向扩 λ 大倍，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，称为数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积，含义是：$\lambda\boldsymbol{a}$ 也是向量，其大小满足 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$。当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；$\lambda=0$ 时，方向任意。

数乘向量满足：(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$。(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$。

(3) 分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$。

与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同的单位向量常记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$。显然，对于非零向量 $\boldsymbol{a}$ 有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$，即 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$。

例 1.2 利用向量证明三角形中位线定理。

解 如图 1-12 所示，D、E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB 与 AC 的中点，可知，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ 则 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

即 $\overrightarrow{DE}$ 的方向与 $\overrightarrow{BC}$ 相同，长度是 $\overrightarrow{BC}$ 的一半，也就是中位线平行于底边且长度是底边的一半。

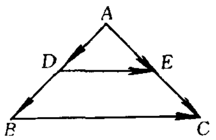

图 1-12

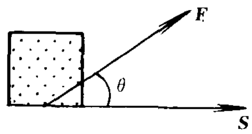

图 1-13

(4) 向量的数量积

物理上力 $\boldsymbol{F}$ 沿某位移方向 $\boldsymbol{S}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\theta \tag{1.3}$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的夹角，如图 1-13 所示。数学上将 (1.3) 式定义为向量 $\boldsymbol{F}$ 和向量 $\boldsymbol{S}$ 的数量积。

一般地，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积是指两个向量的模的乘积再乘以它们之间夹角的余弦（两个向量的夹角是指将它们的始点放在同一点时两向量所夹的不大于 π 的角，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角通常也用 $\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ 表示），向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积为一数，记做 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

由数量积的定义可知：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$。

(2) 两个非零向量相互垂直的充要条件是它们的数量积为 0。

(3) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$。

(4) 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$。

(5) 分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。

结论(2)成立是因为:向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直时,它们的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$;另一方面,当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$ 时,因 $|\boldsymbol{a}|\neq0$ 且 $|\boldsymbol{b}|\neq0$,所以 $\cos\theta=0$,故 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$,即向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直。

(5) 向量的向量积

向量积是向量间的另一种乘法运算。两个夹角为 θ(不大于 π)的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量 $\boldsymbol{c}$,其模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,$\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所确定的平面,其方向满足由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的右手螺旋法则。$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$。

如图 1-14 所示,如果用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边作一个平行四边形,则平行四边形的面积为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$。

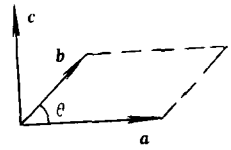

图 1-14

由向量积的定义可知:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$。

(2) 两个非零向量相互平行的充要条件是它们的向量积为 0。

(3) 负交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$。

(4) 结合律 $\lambda(\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$。

(5) 分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$。

结论(2)成立是因为:当向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行时,其夹角 $\theta=0$ 或 π,从而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0$;另一方面,当 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0$ 时,因 $|\boldsymbol{a}|\neq0$ 且 $|\boldsymbol{b}|\neq0$,所以 $\sin\theta=0$,故 $\theta=0$(或 π),即向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行。

例 1.3 求由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 所确定平行六面体的体积。

解 取向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所确定平面为平行六面体的底面,则由向量积的定义知,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为垂直于平行六面体底面的向量,记 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 所成的角为 α,则平行六面体的高为 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 方向上的投影,即高为 $||\boldsymbol{c}|\cos\alpha|$,由向量积的定义知 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 为平行六面体底面的面积,因此其体积为

$$V=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\alpha|=||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\alpha|=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$$

同理可知,该平行六面体的体积还可表示为:$V=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}|$。这就是用向量所表示的平行六面体体积公式。

1.2.3 向量的坐标表示及运算

在空间建立一直角坐标系 $Oxyz$。令 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示 x 轴、y 轴、z 轴正方向的单位向量,称做坐标向量。设点 $P(x,y,z)$ 在 x,y,z 坐标轴上的投影分别为 P_x,P_y,P_z,则以原点 O 为始点,点 P 为终点的向量有以下表示(如图 1-15),

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_{xy}}+\overrightarrow{OP_z}=\overrightarrow{OP_x}+\overrightarrow{OP_y}+\overrightarrow{OP_z}$$

因为 $$\overrightarrow{OP_x}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OP_y}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OP_z}=z\boldsymbol{k},$$

所以 $$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1.4}$$

可见向量 $\overrightarrow{OP}$ 由其终点唯一确定,并与一有序数组构成一一对应的关系。所以称(1.4)式为向量

$\overrightarrow{OP}$的坐标表示。为了方便，向量$\overrightarrow{OP}$也写成(x,y,z)，称做向量$\overrightarrow{OP}$的坐标。

有了向量的坐标表示，向量的加、减和数乘运算就容易了。

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\lambda$ 为常数，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k},\ \lambda\boldsymbol{a}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}$$

因此，两个向量坐标的加(减)就是这两个向量对应坐标的加(减)。而数乘以向量则是数乘以向量的每个坐标。

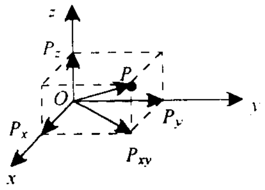

图 1-15

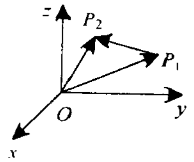

图 1-16

例 1.4 设$\overrightarrow{P_1P_2}$为空间直角坐标系中的任一向量，点 P_1 和点 P_2 的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)，求$\overrightarrow{P_1P_2}$及$|\overrightarrow{P_1P_2}|$。

解 如图 1-16 所示，因为

$\overrightarrow{OP_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OP_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，

所以 $$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k} \tag{1.5}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.6}$$

式(1.5)及(1.6)可作为公式用。

例 1.5 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$和 $M_2(1,3,0)$。计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模及和$\overrightarrow{M_1M_2}$方向一致的单位向量。

解 因为 $$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$$

所以 $$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+1+2}=2$$

所以 $$\overrightarrow{M_1M_2}^0=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$

利用向量的坐标表示也可以讨论向量的数量积与向量积。

设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的坐标表示分别为(a_x,a_y,a_z)和(b_x,b_y,b_z)，即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则其数量积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，所以两个向量的数量积为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，所以当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 都不是零向量时有公式

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \tag{1.7}$$

从公式(1.7)可以看出：两向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 互相垂直(即 $\cos\theta=0$)相当于 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

例 1.6 设$\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(1,1,1)$，$B(2,-1,2)$，$C(3,0,3)$试证明$\triangle ABC$ 为直角